



Congruências e a aritmética do **calendário**

MATEUS ALEGRI

ATANIEL ROGÉRIO GONÇALVES GOMES

Resumo

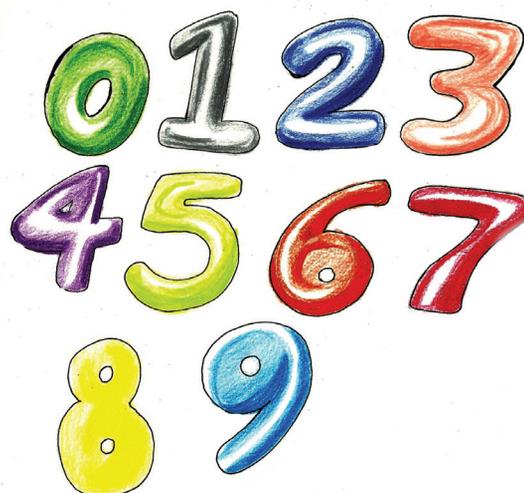
O presente tem como objetivo introduzir a ideia de congruência, uma ferramenta útil em problemas de contagem. Resolveremos problemas envolvendo o calendário, de forma simples fazendo uso de ideias concernentes a divisão inteira com restos.

Palavras-chave

Congruências, divisibilidade, calendário.



Nosso objetivo neste artigo é apresentar uma técnica de contagem que se faz útil em estruturas cíclicas. A única ferramenta que necessitamos aqui é o conhecimento de divisão com resto de números inteiros. No caso, o conjunto de números inteiros é o conjunto numérico $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$. Como sabemos, nosso calendário (Gregoriano) tem estrutura cíclica: cada ano tem 365 dias (exceto anos bissextos), meses variam de 28 a 31 dias e tem-se sete dias em cada semana. A seguir, vamos apresentar alguns problemas que podem ser resolvidos de maneira fácil utilizando a ideia de congruências.



PROBLEMA 1

Um ano bissexto é um ano composto por 366 dias, um dia a mais do que anos normais, que são compostos por 365 dias. No calendário adotado pelo nosso país, esse dia extra é acrescentado no final do mês de fevereiro, que tem normalmente 28 dias, mas que nesses anos passam a ter 29 dias. Ocorrendo a cada quatro anos, esse dia extra tem o intuito de manter o calendário anual ajustado com a translação da Terra e com os eventos sazonais relacionados às estações do ano. Sabendo que um ano é bissexto se o número relativo ao ano for divisível por 4, por exemplo, 1984 é um ano bissexto, pois 4 divide 1984, já que 1984 dividido por 4 é igual a 496. Sendo assim, quantos anos bissextos existem entre 1986 e 2061, inclusive? Descreva-os.

Solução:

Utilizando o processo de divisibilidade por 4 em todos os anos entre 1986 e 2061 inclusive, temos que o primeiro ano bissexto no período acima questionado é 1988, pois 4 não divide 1986 nem 1987, mas 4 divide 1988, já que $1988 \div 4 = 497$.

Assim, como anos bissextos ocorrem a cada 4 anos, temos que os anos bissextos no período são: 1988, 1992, 1996, 2000,

2004, 2008, 2012, 2016, 2020, 2024, 2028, 2032, 2036, 2040, 2044, 2048, 2052, 2056 e 2060, num total de 19 anos bissextos.

Outra maneira de resolver este problema é entender que a sequência de números (1988, 1992, 1996, 2000, 2004, 2008, ..., 2060, ...) se trata de uma progressão aritmética (P.A.) de razão quatro e primeiro termo 1988. Utilizando a fórmula que calcula os n primeiros termos de uma P.A., podemos encontrar $n=19$ (anos), advindo da equação: $2060 = 1988 + 4(n-1)$.

O problema anterior está relacionado com a divisão de números inteiros por quatro. No caso, estamos interessados em números múltiplos de quatro, ou seja, em números que deixam resto zero na divisão por quatro. Estenderemos esta noção com a definição a seguir.

Definição:

Dado m inteiro, $m > 1$, a e b inteiros. Dizemos que a é congruente a b módulo m e escrevemos $a \equiv b \pmod{m}$, se a e b possuem o mesmo resto na divisão por m .

Exemplos:

$7 \equiv 5 \pmod{2}$, pois tanto 7 e 5 na divisão por 2 deixam resto 1;

$41 \equiv 29 \pmod{12}$, pois 41 deixa resto 5 na divisão por 12, bem com 29;

$-15 \equiv -3 \pmod{6}$, pois tanto -15 quanto -3 tem restos iguais na divisão por 6;



PROBLEMA 2

O Cometa Halley é um cometa brilhante de período intermediário que retorna às regiões interiores do Sistema Solar a cada período que varia entre 75 e 76 anos, aproximadamente. Foi o primeiro cometa a ser reconhecido como periódico: descoberta feita por Edmond Halley em 1696. Em sua última passagem na órbita terrestre, o Cometa Halley pôde ser observado a olho nu, em 09/02/1986, um domingo. Sabendo que a próxima passagem do Cometa Halley será daqui a 75 anos e 169 dias a partir de 09/02/1986, descubra a data e o dia da semana em que ocorrerá a próxima passagem do Cometa Halley na órbita do nosso planeta.

Solução:

Podemos, para melhor compreensão, dividir o problema em dois questionamentos:

1) Qual a data da nova passagem?

Como a próxima passagem do Cometa Halley será daqui a 75 anos e 169 dias a partir de 09/02/1986, temos que em 09/02/2061 completará 75 anos da última passagem, assim, para sabermos a data do evento, basta adicionar 169 dias a data de 09/02/2061. Como 2061 não é um ano bissexto, logo o mês de fevereiro deste ano tem 28 dias, assim, temos 19 dias a serem contados em fevereiro, 31 dias em março, 30 dias em abril, 31 dias em maio, 30 dias em junho, completando até o momento

141 dias a mais que 09/02/2061, faltando 28 dias para completar os 169 dias necessários, portanto, a data da próxima passagem é 28/07/2061.

2) Qual é o dia da semana da nova passagem?

Como temos 7 dias na semana, sendo eles: domingo, segunda-feira, terça-feira, quarta-feira, quinta-feira, sexta-feira e sábado, o problema se resume a um problema de congruência módulo 7. Assim, como domingo foi o dia da semana da última passagem, escolhemos o mesmo como o dia base, assim, sendo x o total de dias percorridos da última passagem até a próxima passagem, temos que:

Domingo $\rightarrow x \equiv 0 \pmod{7}$;

Segunda-feira $\rightarrow x \equiv 1 \pmod{7}$;

Terça-feira $\rightarrow x \equiv 2 \pmod{7}$;

Quarta-feira $\rightarrow x \equiv 3 \pmod{7}$;

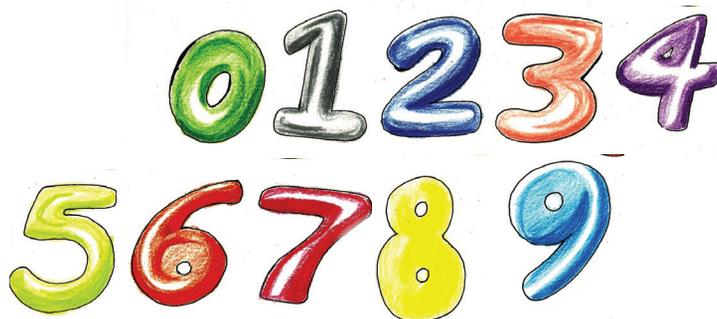
Quinta-feira $\rightarrow x \equiv 4 \pmod{7}$;

Sexta-feira $\rightarrow x \equiv 5 \pmod{7}$;

Sábado $\rightarrow x \equiv 6 \pmod{7}$;

Sendo assim, como temos 75 anos e 169 dias no intervalo entre as duas passagens, temos que descobrir o número de anos bissextos no período que vai de 1986 a 2061. Conforme resolução do Problema 1, existem 19 anos bissextos, assim: $75 \times 365 + 169 + 19 = 27563$ dias.

Como 27563 dividido por 7 deixa resto 4, temos que $27563 \pmod{7}$, ou seja, a próxima passagem se dará no dia 28/07/2061, uma quinta-feira.





PROBLEMA3

É sabido que em 22 de abril de 1500 o Brasil foi descoberto. O dia em que este texto foi escrito, 06/03/2015, era uma sexta-feira. Utilizando a ideia de congruência, é possível saber com certeza qual o dia da semana o Brasil foi descoberto?

Solução:

Como o mês de janeiro possui 31 dias, fevereiro, 28 dias adicionando 6 dias no mês de março, temos um total de 65 dias em 2015.

De 1500 a 2014, inclusive, temos 514 anos. Têm-se 129 anos bissextos neste intervalo, e assim de 22 de abril de 1500 a 06 de março de 2015 temos 188056 dias.

Como $188056 \equiv 6 \pmod{7}$, e considerando:

Domingo $\rightarrow x \equiv 0 \pmod{7}$;

Segunda-feira $\rightarrow x \equiv 1 \pmod{7}$;

Terça-feira $\rightarrow x \equiv 2 \pmod{7}$;

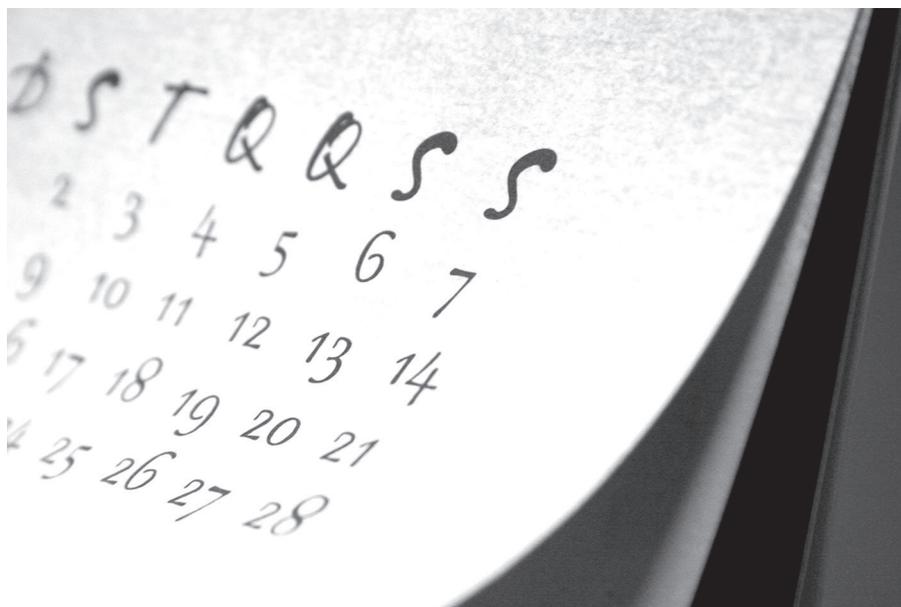
Quarta-feira $\rightarrow x \equiv 3 \pmod{7}$;

Quinta-feira $\rightarrow x \equiv 4 \pmod{7}$;

Sexta-feira $\rightarrow x \equiv 5 \pmod{7}$;

Sábado $\rightarrow x \equiv 6 \pmod{7}$;

O nosso querido Brasil foi descoberto em uma segunda-feira.



Referências

ALEGRI, M. **Notas de aula de estruturas algébricas**, Itabaiana, SE, 2015.

GOMES, A. R. G., **Uma abordagem do ensino de congruência na educação básica**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Departamento de Matemática, Universidade Federal de Sergipe, Itabaiana. 2015.