

O TEOREMA DE BANACH-TARSKI NA CIRCUNFERÊNCIA

José Carlos de Oliveira Junior
Universidade Federal do Tocantins
jc.oliveira@uft.edu.br

Maria Cristina Cordeiro de Sousa
Universidade Federal do Tocantins
cristinacordeiro18.to@uft.edu.br

Nelly Almeida da Silva
Universidade Federal do Tocantins
nellyalmeida@uft.edu.br

Matheus Pereira Lobo
Universidade Federal do Tocantins
mplobo@uft.edu.br

Resumo

O Paradoxo de Banach-Tarski é um dos diversos paradoxos de decomposição [1]. Ele garante que é possível separar a circunferência S^1 em pedaços dois a dois disjuntos e, rotacionando-os adequadamente, formar duas novas circunferências. Neste trabalho, apresentamos este resultado e sua demonstração.

Abstract

The Banach-Tarski Paradox is one of several decomposition paradoxes [1]. It ensures that it is possible to disassemble the circumference S^1 into pairwise disjoint pieces and, by properly rotating them, reassemble into two new circumferences. In this paper, we present this result along with its proof.

1 Introdução

Os paradoxos de decomposição são frutos das propriedades dos conjuntos infinitos não-enumeráveis. O teorema de Banach-Tarski (BT), que é um paradoxo de decomposição, consiste em duplicar e ampliar esferas em \mathbb{R}^n . Outros paradoxos de decomposição fazem o mesmo para outros tipos de objetos [1]. Por meio de uma engenhosa sucessão de passos, é possível, por exemplo, particionar uma bola do tamanho de uma

ervilha em finitos pedaços (isto é, encontrar um número finito de subconjuntos de uma bola de raio positivo pequeno) que podem ser rearranjados para formar uma bola do tamanho do Sol [2]! Esse resultado, associado com outras abordagens matemáticas, pode ter profundas implicações para a expansão do universo, levando-se em consideração, por exemplo, escalas microscópicas do espaço-tempo [3].

Ainda que o resultado seja conhecido, nossa abordagem, aqui, é original no sentido de que demonstramos o teorema na esfera unidimensional da forma mais simplificada que pudemos vislumbrar, utilizando, dentre outras ferramentas, rotações. Além disso, trazemos na Seção 4 algo mais surpreendente ainda, a saber, mostramos, sem artifícios de indução, que a circunferência unitária S^1 pode ser dividida em infinitas outras circunferências unitárias em um mesmo processo. As referências envolvendo a demonstração do Paradoxo de Banach-Tarski são demasiadamente técnicas [4, 5] e tratam em sua maioria de dimensões a partir de três. Um dos livros mais citados sobre decomposições paradoxais [1] está baseado em \mathbb{R}^3 , e recomendamos-no fortemente àqueles que desejam aprofundar-se no tema.

O paradoxo de BT tornou-se a fundação para a teoria de medidas aditivas, que envolve a inter-relação entre análise (teoria da medida e funcionais lineares), álgebra (teoria combinatória de grupos), geometria (grupos de isometria) e topologia (grupos topológicos localmente compactos) [1]. Como veremos a seguir, utilizando classes de equivalência, enumerabilidade tanto dos racionais quanto dos subconjuntos infinitos dos naturais e, sobretudo, o axioma da escolha, é possível duplicar a circunferência $S^1 \subset \mathbb{R}^2$. Mais especificamente, o resultado principal deste trabalho é o seguinte teorema.

Teorema 1.1. *(Banach-Tarski) A circunferência S^1 pode ser particionada em um número infinito enumerável de subconjuntos de tal forma que, rotacionados convenientemente, pode-se gerar duas novas esferas S^1 .*

Destacamos que os axiomas de Zermelo-Fraenkel (ZF) são os axiomas padrão da teoria de conjuntos, e eles não incluem o axioma da escolha (AC, do inglês *axiom of choice*). O sistema ZF, que inclui AC, é denominado ZFC. O axioma da escolha é fundamental para o Paradoxo de Banach-Tarski. Por isso, ele não é um teorema em ZF. Em 1964, Solovay provou, a partir do método *forcing* de Paul Cohen, que ZF e “Não existe paradoxo de Banach-Tarski” são consistentes. Nas referências [1, 6], os leitores interessados poderão se aprofundar acerca do papel do axioma da escolha em paradoxos de decomposição [1] bem como compreender os processos matemáticos envolvidos no axioma da escolha [6].

2 Preliminares

Para apresentar a demonstração do teorema de Banach-Tarski, é necessário compreender alguns conceitos da Álgebra Abstrata, apresentados a seguir. Para uma revisão de Relações, consulte as referências [7, 8].

Definição 2.1. Seja A um conjunto qualquer. Um conjunto $R \subseteq A \times A$ é chamado relação entre os elementos de A ou, simplesmente, relação binária em A . Neste caso, dizemos que o elemento $x \in A$ está relacionado com o elemento $y \in A$ via relação R se o par ordenado $(x, y) \in R$, e escreve-se xRy ou $x \sim y$.

Neste trabalho, as relações de equivalência ganharão destaque e serão apresentadas na definição a seguir.

Definição 2.2. Seja A um conjunto qualquer. Uma relação R em A é dita ser uma relação de equivalência se satisfaz essas três condições:

- a. $\forall x \in A, (x, x) \in R$;
- b. $\forall x, y \in A, (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$;
- c. $\forall x, y, z \in A, (x, y) \in R$ e $(y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$.

A condição *a.* é chamada de Reflexiva, *b.*, Simétrica, e *c.*, Transitiva. Essas condições serão úteis para a construção de um conjunto importante na demonstração do teorema de BT.

Existem várias aplicações e exemplos de relações de equivalência, e os interessados poderão encontrar alguns deles nas referências [7, 8].

Definição 2.3. Sejam A um conjunto, $R \subseteq A \times A$ uma relação de equivalência em A e $a \in A$. Definimos a classe de equivalência do elemento a com relação a R como:

$$[a] = \{x \in A; (x, a) \in R\}.$$

Um exemplo famoso de classe de equivalência é o conjunto dos restos da divisão dos inteiros por $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

O axioma a seguir tem em sua simplicidade um grau enorme de sofisticação. Decidimos apresentá-lo nesta seção, uma vez que ele será aplicado na demonstração do Teorema de BT em uma família de classes de equivalência.

Axioma 2.4. (*Axioma da Escolha*) Para qualquer conjunto de conjuntos não-vazios S , existe uma função chamada “função escolha para S ” tal que a imagem de cada conjunto S é um elemento de S [9, 6].

Dizer que é possível escolher um elemento de cada conjunto não-vazio de uma família de conjuntos é até aceitável quando esta família é infinita enumerável (tem a mesma cardinalidade dos naturais) ou finita. O que torna o Axioma da Escolha uma “verdade” intrigante é a possibilidade da família considerada de conjuntos não-vazios ser não enumerável (como, por exemplo, é o caso do conjunto dos números reais), o que acontece na demonstração do Teorema de BT.

A força do axioma da escolha está no fato de podermos demonstrar teoremas a partir da existência de uma função escolha, muito embora não possamos conhecê-la [10].

3 Resultados Principais

Antes de enunciarmos o Teorema de BT na circunferência, apresentamos sua versão em \mathbb{R}^3 cuja conclusão é completamente contra o senso comum [1].

Teorema 3.1. *(Banach-Tarski em \mathbb{R}^3) Dada uma bola E em \mathbb{R}^3 , existe uma família finita de subconjuntos, dois a dois disjuntos, $A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, B_m$ de E e isometrias de \mathbb{R}^3 $g_1, g_2, \dots, g_n, h_1, h_2, \dots, h_m$ tais que*

$$E = \bigcup_{i=1}^n g_i(A_i) \quad e \quad E = \bigcup_{j=1}^m h_j(B_j).$$

Nesse resultado, isometria significa, a grosso modo, movimentos no espaço \mathbb{R}^3 que não alteram o comprimento do vetor, ou seja, são rotações e translações. Em outras palavras, o Teorema 3.1 diz que toda bola em \mathbb{R}^3 pode ser dividida em um número finito de pedaços (subconjuntos da bola) tais que, reorganizando-os, é possível formar duas novas bolas iguais à primeira.

Na versão do Teorema de BT na circunferência, que enunciaremos e demonstraremos a seguir, ela será dividida em infinitos pedaços, dois a dois disjuntos, o que, apesar de diferir da versão em \mathbb{R}^3 , continua sendo um resultado não intuitivo.

Teorema 3.2. *(Banach-Tarski) A circunferência S^1 pode ser particionada em um número infinito enumerável de subconjuntos de tal forma que, rotacionados convenientemente, pode-se gerar duas novas esferas S^1 .*

Demonstração: Cada ponto da circunferência S^1 , definida como sendo o conjunto dos pontos (a, b) de \mathbb{R}^2 tais que $a^2 + b^2 = 1$, está associado de maneira única a um ponto da forma $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ para algum $\theta \in [0, 2\pi)$ em radianos, e a recíproca também é verdadeira. Para não carregarmos a notação e definirmos novas variáveis, vamos assumir, portanto, que cada $x \in S^1$ é um ângulo em radiano. Ainda a fim de simplificar a

compreensão, não vamos fazer diferenciação entre pontos que são congruentes a outros módulo 2π , isto é, se $x, y \in S^1$ e $x = y + 2k\pi$ para algum $k \in \mathbb{Z}$, vamos dizer simplesmente que $x = y$. Isso faz sentido porque, quando olhamos os pontos x e y sobre a circunferência, não vemos dois pontos diferentes. Dito isso, considere a seguinte relação de equivalência em S^1 , definida entre os ângulos x e y (em radianos) da circunferência:

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}.$$

Escrevemos $x - y \in \mathbb{Q}$ para representar que o ângulo y é obtido a partir de x por uma rotação de um ângulo racional. Esta relação na circunferência S^1 é de equivalência. Considere, então, $[x] = \{y \in S^1; y \sim x\}$, isto é, $[x]$ é a classe de equivalência do elemento $x \in S^1$. Por estarmos tratando de uma relação de equivalência, é verdade que $x \in [x]$ seja qual for o elemento $x \in S^1$, pois a relação é reflexiva. Assim,

$$S^1 = \bigcup_{x \in S^1} [x].$$

Em cada classe $[x]$, com $x \in S^1$, escolha apenas um elemento e considere V o conjunto desses elementos, ou seja, $V = \{\text{um único elemento da classe } [x]; x \in S^1\}$. Isso é possível pelo Axioma da Escolha 2.4.

Seja $\{r_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ uma enumeração do conjunto \mathbb{Q} (veja [11]). Para cada $i \in \mathbb{N}$, considere

$$V_i = r_i + V,$$

isto é, para cada $i \in \mathbb{N}$, o conjunto V_i é a rotação de V pelo ângulo r_i .

Afirmamos que

$$S^1 = \bigcup_{i=1}^{+\infty} V_i. \tag{3.1}$$

Com efeito, a inclusão $\bigcup_{i=1}^{+\infty} V_i \subseteq S^1$ é óbvia, pois os V_i 's foram construídos a partir de elementos de S^1 . Seja, então, $z \in S^1$ e considere sua classe $[z]$. Pela construção do conjunto V , existe $w \in V$ tal que $w \in [z]$. Pertencer à classe do elemento z significa que a diferença $z - w$ é algum número racional, digamos r_{i_0} . Logo, $z = r_{i_0} + w \in r_{i_0} + V = V_{i_0}$,

o que mostra a inclusão $S^1 \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} V_i$ e prova nossa afirmação.

Sejam

$$A = V_1 \cup V_3 \cup V_5 \cup \dots = \bigcup_{i=1}^{+\infty} V_{2i-1}$$

e

$$B = V_2 \cup V_4 \cup V_6 \cup \dots = \bigcup_{i=1}^{+\infty} V_{2i}.$$

Naturalmente, $S^1 = A \cup B$. Pela construção de V_i , temos que $V_i \cap V_j = \emptyset$ para $i \neq j$, pois V foi construído apenas com um único elemento de cada classe de equivalência. As classes de equivalência sempre formam uma partição, lembrando que a partição divide um conjunto em subconjuntos não-vazios e dois a dois disjuntos (veja [8]). Isso garante que $A \cap B = \emptyset$. Agora, vamos provar que é possível rotacionar os pontos dos conjuntos A e B e obter duas novas circunferências S^1 .

Ora, podemos rotacionar V_2 para obtermos V_1 . Basta rotacionarmos V_2 de um ângulo $r_1 - r_2$. Teremos

$$(r_1 - r_2) + V_2 = (r_1 - r_2) + r_2 + V = r_1 + V = V_1.$$

De modo geral, para cada $i \in \mathbb{N}$,

$$(r_i - r_{2i-1}) + V_{2i-1} = (r_i - r_{2i-1}) + r_{2i-1} + V = r_i + V = V_i$$

como também

$$(r_i - r_{2i}) + V_{2i} = (r_i - r_{2i}) + r_{2i} + V = r_i + V = V_i.$$

Utilizando esse processo em todos os elementos (pontos) de A e, similarmente, de B , segue de (3.1) que

$$\begin{array}{ccccccc} V_1 & \cup & V_3 & \cup & V_5 & \cup & \dots & = & A \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \dots & & \downarrow \\ V_1 & \cup & V_2 & \cup & V_3 & \cup & \dots & = & S^1 \end{array}$$

como também

$$\begin{array}{ccccccc} V_2 & \cup & V_4 & \cup & V_6 & \cup & \dots & = & B \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \dots & & \downarrow \\ V_1 & \cup & V_2 & \cup & V_3 & \cup & \dots & = & S^1. \end{array}$$

Portanto, uma vez que $S^1 = A \cup B$, rotacionando os pontos dos conjuntos disjuntos A e B , obtemos duas novas circunferências S^1 , o que conclui a prova do teorema. ■

4 Comentários

Uma pergunta pertinente seria: É possível separar a circunferência S^1 em pedaços que, após rotações, seja possível obter três novas circunferências S^1 ? E quatro novas

circunferências? E infinitas? A resposta para todas essas perguntas é positiva. A seguir, mostramos como se procede para responder cada uma.

Para obtermos três novas circunferências, precisamos separar apropriadamente os índices dos V_i 's da união (3.1) dada por $S^1 = \bigcup_{i=1}^{+\infty} V_i$. Considere, para isso, $A = \bigcup_{i=1}^{+\infty} V_{3i}$,

$B = \bigcup_{i=1}^{+\infty} V_{3i+1}$ e $C = \bigcup_{i=1}^{+\infty} V_{3i+2}$. Note que A , B e C são dois a dois disjuntos (uma vez

que os próprios V_i 's o são) e também $A = V_3 \cup V_6 \cup V_9 \cup \dots$, $B = V_4 \cup V_7 \cup V_{10} \cup \dots$ e $C = V_5 \cup V_8 \cup V_{11} \cup \dots$. Agora, procedemos da mesma forma que anteriormente, rotacionando cada V_{3i} em A , cada V_{3i+1} em B e cada V_{3i+2} em C para obtermos três novas circunferências. O caso de quatro novas circunferências é análogo, bastando

considerar os conjuntos $A = \bigcup_{i=1}^{+\infty} V_{4i}$, $B = \bigcup_{i=1}^{+\infty} V_{4i+1}$, $C = \bigcup_{i=1}^{+\infty} V_{4i+2}$ e $D = \bigcup_{i=1}^{+\infty} V_{4i+3}$.

Para se obter infinitas novas circunferências, seja $\{p_1, p_2, p_3, \dots\}$ uma enumeração dos números primos positivos. Considere, para cada $i \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, o conjunto

$$X_i = \{p_i^k; k \in \mathbb{N}\},$$

isto é, o conjunto X_i é formado por todas as potências do número p_i . Seja X_0 o conjunto dos números naturais que não são potências de nenhum primo. Dessas considerações, temos que $\mathbb{N} = X_0 \cup X_1 \cup X_2 \cup \dots$, em que a união é formada por conjuntos dois a dois disjuntos, e cada X_i possui infinitos elementos. Agora, vamos construir os pedaços da circunferência que servirão para gerar outras circunferências. Seja, para cada $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, o conjunto

$$A_i = \bigcup_{j \in X_i} V_j.$$

Por exemplo, considerando $p_1 = 2$ e $p_2 = 3$, temos que $A_1 = V_2 \cup V_4 \cup V_8 \cup V_{16} \cup \dots$ e $A_2 = V_3 \cup V_9 \cup V_{27} \cup V_{81} \cup \dots$. Ora, procedendo, então, como antes, é possível tornar cada pedaço A_i de S^1 em uma nova circunferência S^1 .

Por fim, apresentamos a Figura 1, que é uma representação ilustrativa do Teorema de Banach-Tarski.

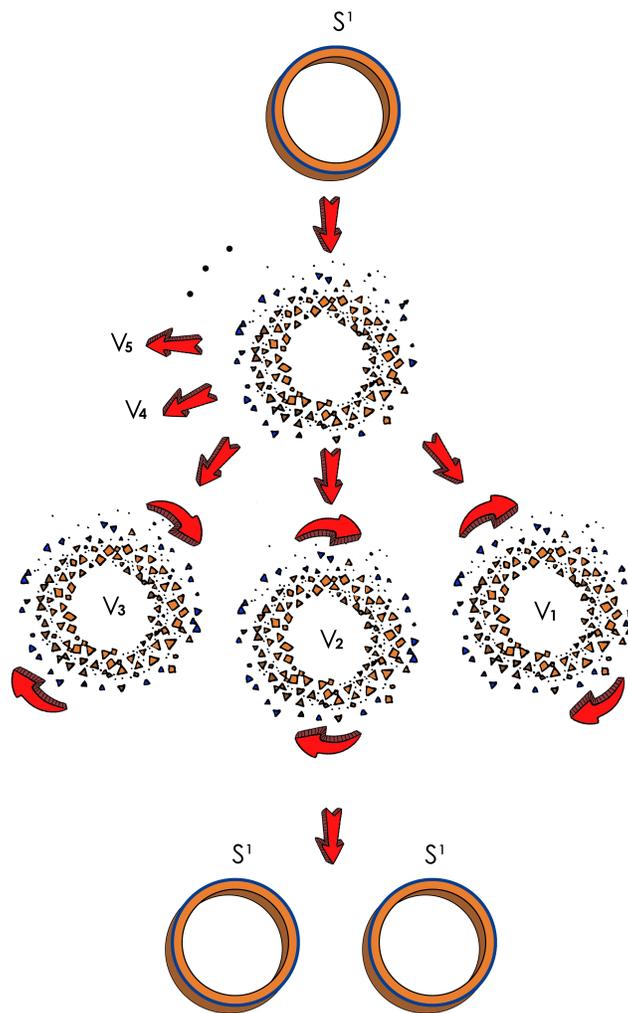


Figura 1: Ilustração do Teorema de Banach-Tarski.

Considerações Finais

O Paradoxo de Banach-Tarski é intrigante em sua essência. Demonstramos o teorema na circunferência S^1 utilizando relações, classes de equivalência, rotações, axioma da escolha, enumeração e a bijeção entre os números pares e ímpares e o conjunto dos Naturais. Além de duplicar a circunferência, mostramos que é possível triplicar, quadruplicar e, até mesmo, dividi-la em k novas circunferências seja qual for o número natural k . Ademais, provamos ainda que é possível dividir a circunferência em infinitas outras circunferências. A validade deste teorema reside em diversas partes, valendo a pena destacar o axioma da escolha, as bijeções utilizadas e partições a partir de classes de equivalência. Esses itens foram fundamentais para a demonstração apresentada.

Como sugestão para futuros trabalhos, destacamos a duplicação da esfera S^2 bem como o estudo da unicidade da medida de Lebesgue nos conjuntos envolvidos em Paradoxos de Banach-Tarski [1].

Agradecimentos

Agradecemos à Universidade Federal do Tocantins por oferecer a infraestrutura necessária para a realização deste trabalho.

Referências

- [1] G. Tomkowicz, S. Wagon, *The Banach-Tarski Paradox*, 2nd ed., Cambridge University Press, 2016.
- [2] L.M. Wapner. *The Pea and the Sun: a mathematical paradox*, AK Peters/CRC Press, 2005.
- [3] M.S. El Naschie, Banach-Tarski theorem and Cantorian micro space-time. *Chaos, Solitons & Fractals* **5**, 1503-1508 (1995).
- [4] K. Stromberg, *The Banach-Tarski paradox*, *The American Mathematical Monthly* **86**, 151-161 (1979).
- [5] M. Laczkovich, Paradoxical decompositions: a survey of recent results, First European Congress of Mathematics, Paris, July 6-10 (1992).
- [6] H. Herrlich, *Axiom of choice*, Berlin: Springer, 2006.

Oliveira Junior, J. C.; Cordeiro Sousa, M. C.; Almeida da Silva, N.; Pereira Lobo, M.

- [7] G. Iezzi e C. Murakami, *Fundamentos de Matemática Elementar: Conjuntos e Funções*, 3 ed., Atual, 1977.
- [8] D. J. Velleman, *How To Prove It: a structured approach*, 2nd ed., Cambridge University Press, 2006.
- [9] J. Stillwell, *Roads to Infinity: the mathematics of truth and proof*, CRC Press, 2010.
- [10] S. Warner, *Set Theory for Beginners: a rigorous introduction to sets, relations, partitions, functions, induction, ordinals, cardinals, Martin's axiom and stationary sets*, Get 800, 2019.
- [11] E. L. Lima, *Curso de Análise*, Vol. 1, IMPA, 2017.

Submetido em 22 de Dezembro de 2018.

Aceito em 01 de Junho de 2019.