Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática

https://doi.org/10.34179/revisem.v5i1.12029

CONSTRUÇÃO DO TRIÂNGULO HIPERBÓLICO NO *SOFTWARE* GEOGEBRA: ANÁLISE DE UMA EXPERIÊNCIA COM ALUNOS DA EDUCAÇÃO BÁSICA

CONSTRUCTION OF HYPERBOLIC TRIANGLE IN SOFTWARE GEOGEBRA: ANALYSIS OF AN EXPERIENCE WITH STUDENTS OF BASIC EDUCATION

Guilherme Fernando Ribeiro
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Campus de Ponta Grossa
guilherme.ribeiro91@hotmail.com

Mariana Moran
Universidade Estadual de Maringá – UEM
mmbarroso@uem.br

Karla Aparecida Lovis
Instituto Federal Paranaense – Campus Capanema
karla.lovis@ifc.edu.br

Resumo

O objetivo deste trabalho é descrever uma experiência desenvolvida com alunos do 3º ano do Ensino Médio de um Colégio Estadual localizado em uma cidade no Norte do estado do Paraná. Sua finalidade foi investigar as contribuições do software GeoGebra no estudo de conceitos da geometria hiperbólica, precisamente a construção do triângulo hiperbólico, de modo a explorar o resultado sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo nesta geometria. Para tanto, foi oferecido uma oficina que teve duração de 12 (doze) horas, e neste texto serão apresentadas algumas análises da realização das atividades intituladas “Comprovação do Axioma Hiperbólico” e “Construindo o Triângulo Hiperbólico”. Dentre os resultados obtidos, destaca-se a compreensão dos alunos quanto ao fato de que as geometrias não euclidianas não obedecem, necessariamente, todos os padrões da geometria euclidiana. Os alunos também perceberam a diferença entre a representação de uma reta euclidiana e de uma reta hiperbólica. Nesse sentido, acredita-se que suas concepções a respeito de retas mudaram no momento em que se depararam com retas em forma de curvas e, consequentemente, reconheceram a existência de um triângulo diferente do triângulo euclidiano, cuja soma dos ângulos internos é menor que 180º.
Palavras-chave: geometria hiperbólica, software GeoGebra, Educação Básica.

Abstract

This workaims at describing an experience developed with students from the 3rd year of a high school State College located in a city in northern Paraná. Its purpose was to investigate the contributions of GeoGebra software for studying concepts of hyperbolic geometry, specifically the construction of the hyperbolic triangle, in order to explore the result of the sum of the interior angles of a triangle in this geometry. The short course lasted twelve (12) hours, and in this text we present some analysis of the resolution of activities entitled as "Verification of the Hyperbolic Axiom" and "Building the Hyperbolic Triangle". Among the results, we highlight that the students

understand that non-Euclidean geometries do not necessarily obey all the patterns of Euclidean geometry. With the developed activities, students realized the difference between the representation of a Euclidean straight line and a hyperbolic straight line. In this sense, we believe that they have changed their views about straight lines when they were faced with straight lines in the shape of curves and consequently recognized the existence of a triangle different from the Euclidean triangle, whose internal angles sum is less than 180º.
Keywords: hyperbolic geometry, GeoGebra software, Basic Education.

INTRODUÇÃO

Esse trabalho, advindo de uma pesquisa realizada num contexto de Iniciação Científica, tem como objetivo não somente expor resultados obtidos durante uma oficina oferecida, mas também socializar atividades que podem ser aplicadas com alunos da Educação Básica. Tais atividades podem auxiliar no desenvolvimento de conceitos que permeiam o trabalho com as geometrias não euclidianas, mais especificamente, a Geometria Hiperbólica.

O interesse em trabalhar com a Geometria Hiperbólica surgiu após a inclusão do tópico "noções de geometrias não-euclidianas[1]" no currículo da Educação Básica do Estado do Paraná por meio das Diretrizes Curriculares de Matemática (DCE). As Diretrizes têm como característica principal fundamentar o trabalho pedagógico do professor e contribuir de maneira decisiva para o fortalecimento da educação pública. Entre os anos de 2003 e 2008, as DCE passaram por reformulações as quais, segundo Paraná (2008), foram realizadas em um processo de discussão coletiva que envolveu professores da rede estadual de ensino deste Estado.

No que se refere aos conteúdos matemáticos, nas DCE, eles foram divididos em Conteúdos Estruturantes, a saber: Números e Álgebra; Grandezas e Medidas; Geometrias; Funções e Tratamento da Informação. Para o Ensino Fundamental e Médio, o conteúdo estruturante Geometrias se desdobra em 4 conteúdos específicos, entre eles, "noções básicas de geometrias não-euclidianas". Quanto a este conteúdo, as DCE recomendam o estudo de noções de geometria fractal, projetiva, hiperbólica, elíptica[2] e topologia.

[1] Nas DCE a palavra não-euclidianas é escrita com hífen. Neste trabalho será usado sem o hífen, pois acredita-se que o não-euclidiana se refere às que negam o quinto postulado. Deste modo, o não euclidianas se referem às que não somente negam, mas também abandonam os postulados.

[2] Nas DCE a Geometria da Superfície da Esfera é chamada de Geometria Elíptica. Porém, ao descrever essa Geometria, percebe-se que as diretrizes se referem, na verdade, à Geometria da Superfície da Esfera, construída por Riemann. A Geometria Elíptica foi desenvolvida por Félix Klein, sendo que um de seus modelos é obtido por meio da identificação dos pontos antípodas da Superfície da Esfera, gerando o que se denomina de Plano Projetivo. Nesta Geometria, o primeiro postulado de Euclides é verificado, e como foi visto, isso não ocorre na Geometria da Superfície da Esfera.

No entanto, a inclusão destes tópicos suscita algumas questões, principalmente ao considerar as reais condições para o desenvolvimento desse conteúdo em sala de aula. Primeiramente, conforme apontam Lovis (2009) e Santos (2009), parte significativa dos professores de Matemática, que atuam na rede pública de ensino do Paraná, desconhecem as geometrias não euclidianas e não se encontram em condições de abordá-las em sala de aula. Estas pesquisas relatam que as dificuldades de alguns professores em ensinar as Geometrias não euclidianas devem-se à falta de conhecimento do assunto e de formação necessária.

Diante deste contexto, surgiu a ideia de trabalhar alguns conceitos de geometria hiperbólica com alunos da Educação Básica, pois mesmo que o currículo de seu estado não contemple tal assunto, entende-se que as geometrias não euclidianas auxiliam na apreensão de conceitos euclidianos, também, além de desenvolver aspectos relacionados à visualização geométrica e o uso das tecnologias.

Este relato é parte de uma pesquisa que teve como principal objetivo, investigar quais as contribuições do *software* GeoGebra para a construção de alguns conceitos da geometria hiperbólica. No decorrer do texto serão apresentadas as análises de duas atividades realizadas com os alunos participantes da oficina. Será apresentada também a análise de uma das questões aplicadas no questionário final.

CAMINHOS PERCORRIDOS

A realização das atividades ocorreu no Laboratório de Informática de uma Universidade estadual localizada em uma cidade ao norte do Paraná. Participaram da pesquisa 11 alunos do 3º ano do Ensino Médio de um Colégio Estadual. Os alunos foram convidados a participar da oficina intitulado “Geometria hiperbólica: a construção do h_triângulo por meio do *software* GeoGebra com alunos da Educação Básica”. As atividades foram realizadas em 3 encontros de 4 horas cada, perfazendo uma carga horária de 12 horas.

No primeiro encontro, discutiu-se os objetivos da oficina e aplicou-se um questionário com o intuito de levantar informações sobre seus conhecimentos acerca das geometrias não euclidianas - em particular da geometria hiperbólica. Em seguida, foram apresentados vídeos sobre alguns aspectos da história da matemática e da geometria e por fim, discutiu-se a contribuição de Euclides para a matemática e a geometria. Também, neste mesmo encontro, foram desenvolvidas atividades sobre noções de alguns conceitos matemáticos tais como: reta, segmento de reta, ponto, vértices, ângulos, ou seja, alguns conceitos que seriam utilizados no decorrer das atividades e da oficina. Ao final do primeiro encontro, como forma de familiarização dos alunos com o *software* GeoGebra, foram realizadas 5 atividades iniciais (essas atividades se basearam nos cinco postulados de Euclides).

Durante o segundo encontro, houve uma discussão a respeito da origem das geometrias não euclidianas, partindo das diversas tentativas em demonstrar o 5º postulado de Euclides - o famoso postulado das paralelas. Neste momento, com o auxílio de um tutorial elaborado pelos proponentes da oficina, autores deste trabalho, os alunos construíram, individualmente, macro ferramentas no *software* GeoGebra, necessárias para trabalhar em um contexto da geometria hiperbólica, e em seguida realizaram o teste de funcionamento de cada uma delas.

As construções de macro ferramentas e seus respectivos testes de funcionamento foram necessários para a construção do modelo do disco de Poincaré. As macro ferramentas elaboradas foram: reta hiperbólica, segmento hiperbólico e distância hiperbólica. O matemático Henry Poincaré (1854-1912) apresentou dois modelos para a geometria hiperbólica. Um dos modelos é conhecido como modelo do disco de Poincaré. Neste modelo os pontos são pontos no sentido habitual, que estão em um plano cuja definição é o interior de um círculo euclidiano. A circunferência (que não faz parte do plano) é chamada de horizonte. Os pontos que estão no horizonte são chamados pontos ideais. As retas são cordas abertas que passam pelo centro O (ou seja, os diâmetros abertos), e arcos de circunferências abertos ortogonais ao horizonte. Na figura 1 é possível observar a construção do plano hiperbólico, de uma reta hiperbólica e de um segmento hiperbólico.

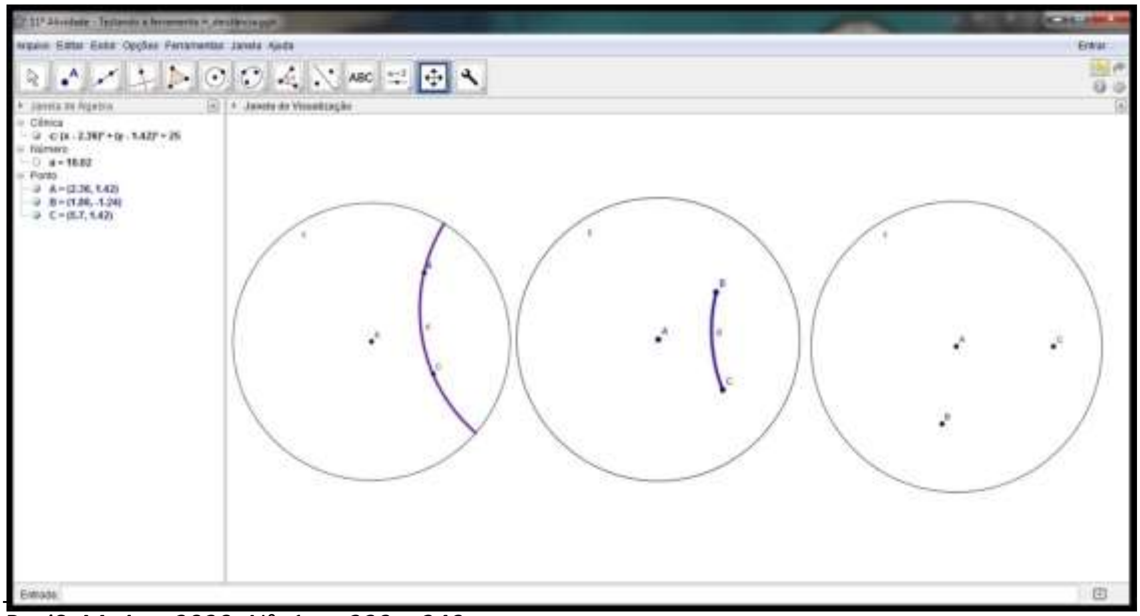

Figura 1 – Representação da reta, segmento e distância hiperbólica, respectivamente

Então, esse momento foi importante para que os alunos compreendessem os conceitos da geometria hiperbólica e se desvencilhassem das ideias da geometria euclidiana que ainda poderiam perdurar durante as atividades no disco de Poincaré.

No terceiro encontro, os alunos realizaram uma atividade que tratou da verificação do seguinte axioma hiperbólico "na geometria hiperbólica existe uma reta l e um ponto P, não pertencente a l, tal que existe pelo menos duas retas que passam por P e são paralelas a reta l" (GREENBERG, 1980, p. 148). Com essa atividade, os alunos verificaram o axioma utilizando as ferramentas que tinham construído anteriormente. Desse modo, esse momento foi fundamental para que os participantes tivessem conhecimento do axioma hiperbólico e compreendessem como este aplicava-se no *software* GeoGebra.

Por fim, no último encontro, os estudantes efetuaram a atividade "Construindo o Triângulo Hiperbólico". Nesta atividade foi discutido o resultado quanto à soma dos ângulos internos de um triângulo na geometria hiperbólica e na geometria euclidiana. Os estudantes participantes culminaram para a conclusão de que na geometria euclidiana a soma dos ângulos internos de um triângulo ABC é igual a 180º, enquanto que na Geometria Hiperbólica este resultado não é válido, uma vez que a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor do que 180º.

Ao término do encontro foi distribuído aos participantes um questionário com objetivo de levantar informações sobre os conhecimentos construídos acerca das geometrias não euclidianas, em particular da geometria hiperbólica.

Deste modo, para a análise dos dados coletados, codificou-se os participantes da pesquisa com a letra A e um número. Essa codificação foi realizada de maneira aleatória e foi mantido até o final das análises. Ao meditar sobre as respostas dos alunos, estas foram classificadas em unidades de análise. Conforme explica Alves-Mazzotti e Gewandsznajder (2004) esta expressão se refere à forma pela qual organizam-se os dados para efeito de análise incluindo-se ou não outras unidades quando necessário.

DISCUSSÕES REALIZADAS

As aplicações das atividades foram realizadas e permeadas por discussões constantes, direcionadas por questionamentos que orientavam os alunos a refletir sobre as semelhanças e as diferenças entre as propriedades e os conceitos da geometria euclidiana e das não euclidianas.

Uma das discussões realizada com os alunos, esteve relacionada às retas paralelas na Geometria Hiperbólica. Quando questionados sobre quando as retas DE e BC, da figura 2 a seguir, seriam paralelas, obteve-se duas unidades: 4 alunos descreveram que isso só aconteceria em apenas uma posição do plano e 7 alunos declararam que existem infinitas possibilidades para que as duas retas fossem paralelas. Na figura 2, destacam-se três delas.

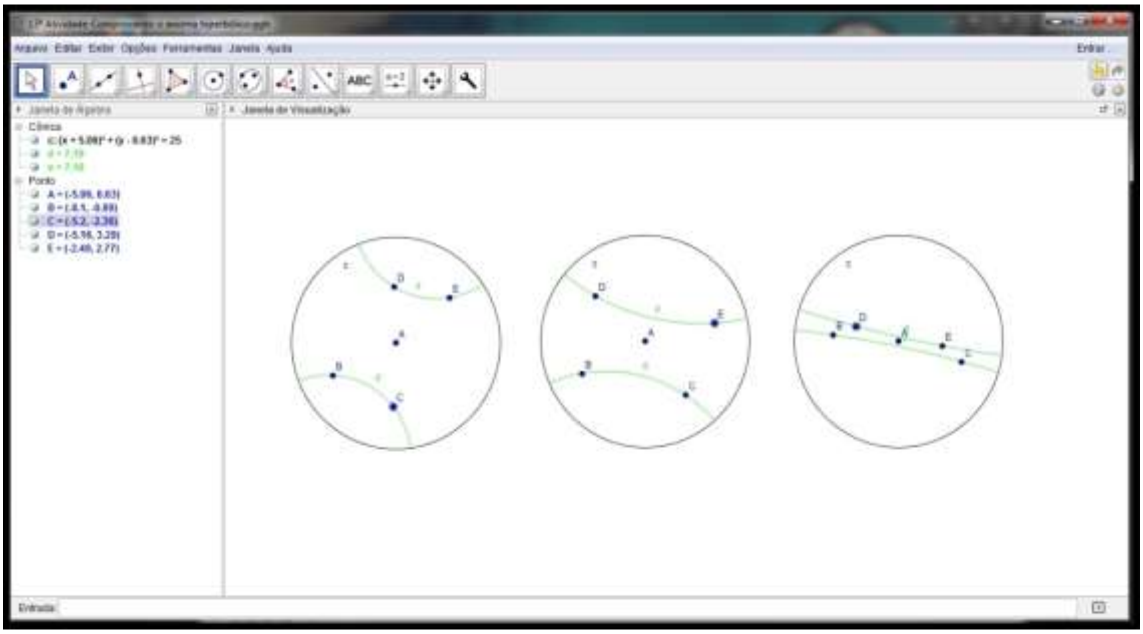

Figura 2 – Representação do axioma hiperbólico.

Possivelmente os alunos da primeira unidade não compreenderam a questão ou o assunto, pois suas respostas se basearam em conceitos da geometria euclidiana. Os demais alunos (7) responderam corretamente. Deste modo, quando os alunos se atentaram à construção das h_retas, identificaram suas várias posições e afirmaram que estas são infinitas. Como o uso do *software* de geometria, os alunos tinham a possibilidade de movimentar as duas retas e visualizar o paralelismo entre elas.

A Figura 3 mostra que dada uma reta e ponto E não pertencente a reta, é possível obter infinitas retas paralelas que passam por E.

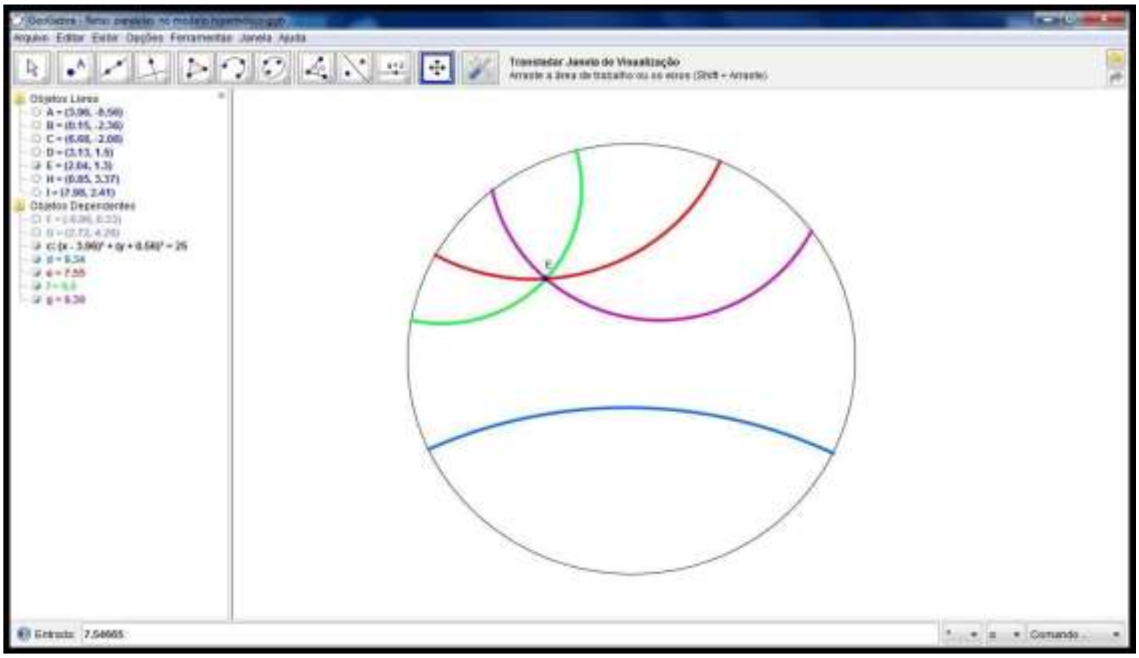

Figura 3 – Representação de retas paralelas no modelo hiperbólico.

Com essa questão, observou-se, como destacou Lovis (2009), as contribuições da ferramenta “arrastar”, dentre outras, para o conhecimento e a aprendizagem de conceitos geométricos. *Softwares* como o GeoGebra ajudam a enriquecer o processo de ensino e aprendizagem valorizando o conhecimento matemático e as possibilidades de interpretação, visualização, indução, abstração, generalização e demonstração como destacado por Alves e Soares (2003).

Quanto ao conceito de paralelismo, questionou-se aos estudantes o que eles observaram relacionado a geometria hiperbólica e a euclidiana. Essa questão teve o intuito de direcionar os alunos a perceber o 5º postulado da geometria hiperbólica – o mesmo enunciado por Lobachevsky –, que diz: “por um ponto fora de uma reta dada podemos traçar ao menos duas retas paralelas à reta dada”.

Então, como resposta à reflexão desse momento, encontrou-se 2 unidades. Uma primeira, em que 6 alunos comentaram que é possível traçar uma única reta na geometria euclidiana, enquanto que na geometria hiperbólica é possível traçar pelo menos 2 retas. Segue o comentário do aluno A1:

> A1: *A diferença é que na euclidiana pode ser traçada uma única linha, enquanto na Geometria Hiperbólica pode ser traçado pelo menos 2 retas.*

E outra unidade em que 5 alunos não conseguiram relacionar as retas paralelas da geometria euclidiana com hiperbólica.

A atividade “Construindo o Triângulo Hiperbólico” envolveu conceitos de vértice, perpendicular, ângulos e segmentos definidos por dois pontos. A proposta dessa atividade foi construir um triângulo hiperbólico e explorar suas principais características. Para isso, foi entregue aos participantes um tutorial e os ministrantes os auxiliaram durante a construção. Em seguida, solicitou-se aos alunos que fizessem na mesma janela da tela do *software*, ao lado da construção do triângulo hiperbólico, a representação de um triângulo euclidiano, e calculassem a soma dos ângulos internos dos 2 triângulos. Ao término da atividade os alunos foram questionados quanto a soma dos ângulos internos de um triângulo nestas Geometrias. Todos os alunos responderam e se enquadraram em uma mesma unidade. Estes utilizaram o *software*, e verificaram que no triângulo hiperbólico, a soma dos ângulos internos é menor que 180º, e no triângulo euclidiano, a soma dos ângulos internos é 180º. Houve uma exceção do aluno A4, que não respondeu a questão por não ter visto a página com as questões, deixando todas sem responder. O A2 e o A3 responderam:

> A2: *Não. Sim. Essa diferença ocorre devido a forma das retas.*
> A3: *No triângulo hiperbólico a soma dos ângulos é menor que 180º e no euclidiano é igual a 180º. Isso ocorre devido a forma das retas.*

Nessa questão, houve manifestações dos alunos referentes às concepções do universo euclidiano trabalhado nas disciplinas de Geometria e Desenho Geométrico no Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Notou-se que todos os alunos justificaram suas respostas, relatando que a soma dos ângulos internos, difere devido à forma que a reta hiperbólica possui.

Neste momento, observou-se que o GeoGebra possibilitou aos alunos a visualização e compreensão de que a soma dos ângulos internos de um triângulo hiperbólico é menor do que 180º. Na Figura 4, tem-se a representação da atividade “Construindo o Triângulo Hiperbólico” realizada por um dos alunos.

Observa-se que o aluno encontrou, para a soma dos ângulos internos do triângulo hiperbólico, o valor de 51,48º (destaque em vermelho). A soma dos ângulos internos do triângulo euclidiano, denominada de Soma 2, resultou em 180º.

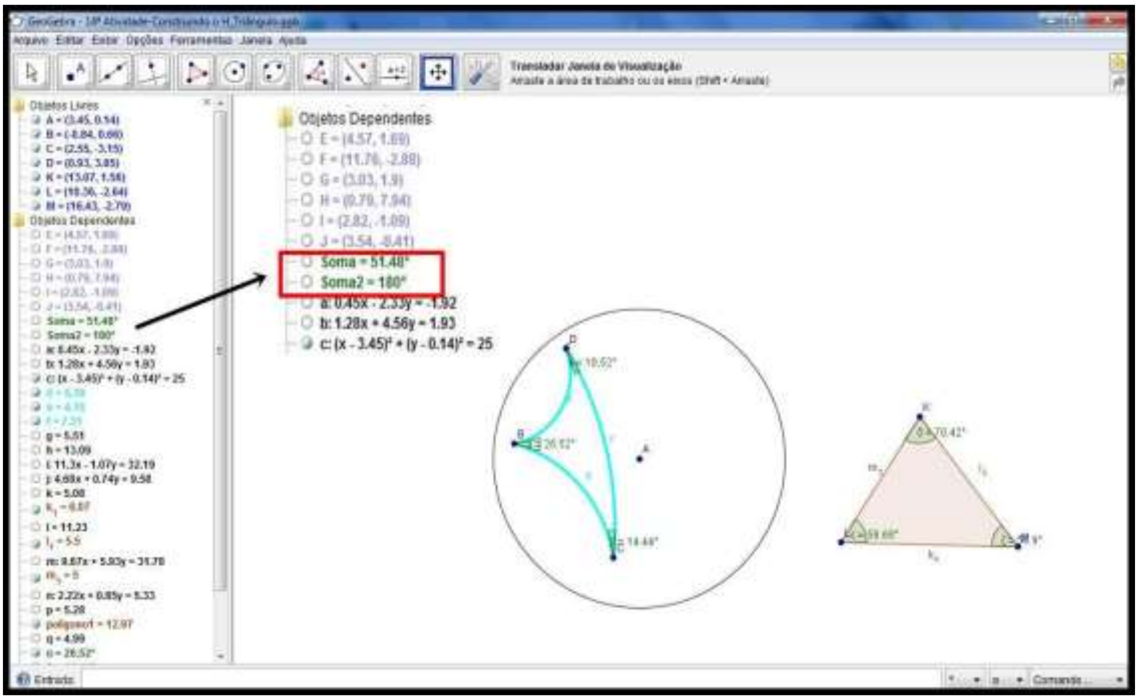

Figura 4 – Representação do triângulo hiperbólico e euclidiano.

Com base nas respostas dos alunos, notou-se que o conceito de representação de reta desses alunos mudou. Nota-se que a justificativa utilizada por eles para a diferença na soma dos ângulos internos dos triângulos está pautada na "forma das retas". Isso direciona a interpretação no sentido de que, mesmo que as retas hiperbólicas tenham aparência de curvas, os alunos as incluíram no conjunto das retas. Mais ainda, eles compreenderam que a reta euclidiana não é a única representação de reta, admitindo a existência da reta hiperbólica, que é representada por uma curva.

Um dos direcionamentos das DCE (PARANÁ, 2008) para abordar a Geometria Hiperbólica, é que ela seja compreendida por meio do triângulo hiperbólico e da soma de seus ângulos internos. Nesse sentido, elaborou-se a atividade que está sendo analisada.

Por fim, questionou-se os alunos quanto ao uso e aplicações do *software* GeoGebra. Nessa questão, identificou-se 3 unidades: 8 alunos responderam que o GeoGebra é fácil de ser utilizado; 2 responderam que algumas ferramentas são fáceis e outras não, e 1 aluno comentou que depende da atividade a ser realizada. Destaca-se o comentário do aluno A4:

> A4: *Eu gostei, até baixei ele em casa, com os passo a passo se tornou fácil.*

A maioria dos alunos achou o GeoGebra um programa fácil, dinâmico, simples e importante para a aprendizagem. Com essa questão, comprovou-se que realmente utilizar tecnologias em sala de aula possibilita ao aluno desenvolver uma autonomia permitindo experimentar uma diversidade de situações. Como apresenta Borba e Penteado (2008), o uso de mídias possibilita à experimentação matemática e potencializa o processo pedagógico contribuindo para a formação dos alunos. Neste sentido segue o comentário do aluno A5:

> A5: *Sim, pois dá um entendimento melhor, pois é mais dinâmico, e menos teórico, tornando mais fácil de ser lembrado.*

Dadas as respostas dos alunos A4 e A5, percebeu-se que, o *software* GeoGebra contribuiu para o aprendizado de conceitos geométricos, principalmente por permitir que as figuras sejam arrastadas, facilitando a compreensão do comportamento dos objetos geométricos. E, também, devido às construções dinâmicas, o *software* possibilita que os alunos realizem experimentações, tornando a construção do conhecimento mais significativa.

REFLEXÕES FINAIS

Os ambientes computacionais permitem um trabalho matemático informal e formal ao mesmo tempo, haja vista que possibilita aos seus participantes, construções geométricas que direcionam a conclusões matemáticas verídicas.

Ao final deste trabalho observou-se que o objetivo principal foi alcançado, uma vez que se conseguiu discutir conceitos da Geometria Hiperbólica por meio do s*oftware* GeoGebra e com isto trabalhar com os alunos da Educação Básica, as principais diferenças entre esta Geometria e a geometria euclidiana de forma ativa e visual. Além disso, quando conceitos das geometrias não euclidianas são, de fato, compreendidos pelos participantes, observou-se que eles auxiliam na compreensão dos objetos euclidianos e suas propriedades.

Com as atividades realizadas nesta oficina e as respostas obtidas, conclui-se que a maioria dos alunos não somente teve conhecimento de uma geometria diferente da euclidiana, como também compreendeu a diferença entre a representação de uma reta euclidiana e uma reta hiperbólica; os alunos mudaram suas concepções a respeito de retas no momento em que se depararam com retas em forma de curvas e puderam desenvolver propriedades no disco de Poincaré. Também se destaca a ideia da existência de um triângulo diferente do triângulo euclidiano, cuja soma dos ângulos internos é menor que 180º, o que não ocorre na geometria euclidiana comumente conhecida por eles.

As atividades desenvolvidas no contexto da oficina proposta, podem ser realizadas em ambientes de sala de aula por professores da Educação Básica proporcionando um trabalho diferente dos comumente realizados permitindo que os estudantes compreendam a existência de uma geometria deferente da euclidiana.

Por fim, acredita-se que o GeoGebra possibilitou aos alunos participantes da oficina, por meio de visualizações, movimentos e discussões, o conhecimento de representações de objetos geométricos diferentes dos já conhecidos por eles, e além disso, a percepção e identificação de algumas de suas propriedades.

REFERÊNCIAS

ALVES, G.; SOARES, A. B. Geometria Dinâmica: um estudo de seus recursos, potencialidades e limitações através do *software* Tabulae. In: XXIII CONGRESSO DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE COMPUTAÇÃO, 2003. Campinas. Anais... Campinas: Unicamp, 2003. p. 275–286.

ALVES-MAZZOTTI, A. J.; GEWANDSZNAJDER, F. O Método nas Ciências Naturais e Sociais: Pesquisa Quantitativa e Qualitativa. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2004.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. Informática e Educação Matemática. 3ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

GREENBERG, M. J. Euclidean and Non-Euclidean Geometries. 2ª ed. New York: W. H. Freeman and Company, 1980.

LOVIS, K. A. Geometria Euclidiana e Geometria Hiperbólica em um Ambiente de Geometria Dinâmica: o que pensam e o que sabem os professores. 2009. 148 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, Paraná, 2009.

PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação do. Diretrizes Curriculares da Educação Básica de Matemática do Estado do Paraná. Curitiba, 2008.

SANTOS, T. S. dos. A inclusão das Geometrias não-euclidianas no currículo da Educação Básica. 2009. 138 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, Paraná, 2009.

Submetido em 14 de setembro de 2019.
Aprovado em 29 de janeiro de 2020.