REVISEM

Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática

https://doi.org/10.34179/revisem.v5i1.12043

APREENSÕES FIGURAIS MOBILIZADAS AO ESTUDAR ÁREA DE FIGURAS EM UM AMBIENTE DE GEOMETRIA DINÂMICA

FIGURAL APPREHENSIONS MOBILIZED WHILE STUDYING THE AREA OF FIGURES IN A DYNAMIC GEOMETRY ENVIRONMENT

Juliana Gabriele Kiefer
Universidade Federal de Santa Maria – UFSM
juliana_kiefer@hotmail.com

Inês Farias Ferreira
Universidade Federal de Santa Maria – UFSM
inesfferreira10@gmail.com

Rita de Cássia Pistóia Mariani
Universidade Federal de Santa Maria – UFSM
rcpmariani@yahoo.com.br

Resumo

O objetivo deste artigo é apresentar e analisar uma sequência didática envolvendo o estudo de área de figuras em um ambiente de geometria dinâmica com o apoio do software GeoGebra. A partir da abordagem qualitativa e de princípios da análise de conteúdo são considerados, como fonte de produção de dados, protocolos de licenciandos do curso de Matemática da Universidade Federal de Santa Maria. Em conformidade com os registros de representação semiótica e a perspectiva dos ambientes de geometria dinâmica os resultados estão sistematizados em duas categorias. Na primeira, denominada mobilização de registros, identifica-se o emprego de registros simbólicos, algébricos, numéricos, figurais e de língua natural; tratamentos dinâmicos ao mover e reconfigurar as figuras; conversões que priorizaram registros figurais e em língua natural. Na segunda, intitulada apreensões mobilizadas, observa-se que as apreensões perceptiva, discursiva e operatória foram as mais mobilizadas; foram identificados vários modos de ver as figuras e de interpretá-las; argumentos em diferentes níveis de complexidade; mobilização da apreensão operatória mereológica, sendo na maioria delas, a mereológica homogênea e a posicional através de rotação e translação.

Palavras-chave: Geometria; apreensões figurais; área; GeoGebra

Abstract

The aim of this paper is to present and analyze a didactic sequence involving the study of the area of figures in a dynamic geometry environment with the support of GeoGebra software. From the qualitative approach and the principles of content analysis, it is considered, as source of data production, protocols of undergraduate students of the Mathematics graduation from Universidade

Federal de Santa Maria. They were appreciated from the registers of semiotic representation and the perspective of dynamic geometry environments. The results were systematized into two categories. In the first, entitled register mobilization, it is identified the use of symbolic, algebraic, numeric, figural and natural language registers; dynamic processings by moving and reconfiguring the figures; conversions that prioritized figural and natural language registers. In the second, entitled mobilized apprehensions, it is observed that the perceptive, discursive and operative apprehensions were the most mobilized; various ways of seeing and interpreting the figures have been identified; arguments at different levels of complexity; mobilization of the mereologic operative apprehension, being, in most of them, the homogeneous and positional mereologic through rotation and translation.
Keywords: Geometry; figural apprehensions; area; GeoGebra

INTRODUÇÃO

A utilização das tecnologias digitais está cada vez mais presente nas diversas áreas da sociedade e da atividade humana, inclusive na área educacional. Portanto o domínio da utilização de tecnologias digitais, para além do desenvolvimento da competência leitora e escritora de futuros professores, deve oferecer condições para experimentação, análise e apropriação dessas tecnologias em larga escala (SBEM, 2003).

Entre os papéis a serem desempenhados por esses professores está "[...] estimular seus alunos para o uso, natural e rotineiro, da tecnologia nos processos de ensinar, aprender e fazer matemática." (SBEM, 2003, p. 4). Desse modo, tais discussões precisam fazer parte de disciplinas específicas, relacionadas aos distintos campos da Matemática, principalmente aquelas que enfatizam conceitos/conteúdos de Geometria.

Ademais, é preciso reconhecer a importância de disciplinas que enfatizem a integração de recursos computacionais com a sala de aula da Educação Básica. Uma vez que possam contemplar avaliações críticas de um recurso específico para um determinado conceito/conteúdo, assim como potencialidades e limitações de inseri-los no planejamento e desenvolvimento de atividades didáticas (SBM, 2015). Tais discussões e construções podem ser exploradas em disciplinas específicas ou em outros momentos sob a perspectiva da prática como componente curricular "[...] sempre seguindo a filosofia de que uma análise e o desenvolvimento de materiais didáticos podem culminar em propostas didáticas que fazem uso da tecnologia." (SBM, 2015, p.20).

As orientações curriculares para a Educação Básica, desde 1998 corroboram com esse entendimento, pois destacam que a utilização de tecnologias pode promover significativas contribuições para se repensar processos de ensino e aprendizagem, principalmente no que tange às representações, ao evidenciar a importância da linguagem gráfica e figural, permitindo novas estratégias de abordagem (BRASIL, 1998).

Este mesmo documento salienta que, uma de suas finalidades nas aulas de Matemática é “[...] desenvolver autonomia pelo uso de *softwares* que possibilitem pensar, refletir e criar soluções.” (BRASIL, 1998, p. 44). A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) confirma essa ideia e indica que os *softwares* de geometria dinâmica possuem um papel fundamental para a compreensão e utilização das noções matemáticas. No entanto, destaca que é necessária a integração desses materiais a situações que levem à reflexão e à sistematização, para que se inicie um processo de formalização.

Considerando a importância da utilização de *softwares* Soares, Ferner e Mariani (2018) analisaram se e como são utilizados *softwares* no ensino e aprendizagem de Geometria em periódicos da área de Educação Matemática disponíveis no portal da SBEM, cujo recorte temporal abrangeu o período de 2000-2017. Do total de 2336 artigos identificados apenas 138 produções continham a palavra “Geometria” ao menos três vezes em seu texto e tratavam de conceitos/conteúdos de Geometria Plana e/ou Espacial.

As autoras concluíram que 39 apresentavam/mencionavam o uso de *softwares* relacionando-o a processos de ensino e/ou aprendizagem, o que representa apenas 1,67% do total de artigos mapeados inicialmente, o que pode ser considerado um percentual baixo. Ao investigar quais *softwares* são considerados nestas produções, verificou-se que o GeoGebra foi o mais utilizado, em 18 trabalhos entre os anos 2012 e 2017, abrangendo os níveis de ensino: Educação Básica (9 artigos), Ensino Superior (3 artigos) e Formação Continuada (6 artigos). Além disso, a maioria dessas pesquisas exploravam conceitos/conteúdos relacionados com a Geometria Plana.

Deste modo, considerando a importância das tecnologias estarem inseridas na sala de aula e da relevância de se realizar uma discussão sobre suas possibilidades com futuros professores que ensinam Matemática, este artigo apresenta e analisa uma sequência didática envolvendo o conceito/conteúdo de área de figuras planas por meio de um ambiente de geometria dinâmica gerado com o apoio do *software* GeoGebra.

REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS E GEOMETRIA DINÂMICA

Distintos estudos evidenciam a pertinência dos pressupostos dos registros de representação semiótica ao se investigar processos de ensino e aprendizagem de

Matemática, em especial sobre conceitos/conteúdos de Geometria como Duval (2003, 2011, 2012, 2013), Gravina (2015), Basso e Notare (2015), Salazar e Almouloud (2015).

Nessa perspectiva teórica ao mobilizar os registros de representação é possível realizar dois tipos de transformações: os tratamentos e as conversões. Os tratamentos são transformações de representações dentro de um mesmo tipo de registro. Já, as conversões consistem em mudar de registro conservando os mesmos objetos.

Em termos de tratamento no registro figural, Duval (2012) destaca que tal transformação efetua-se na figura quando ocorrem reconfigurações na mesma, ou seja, por exemplo, mudar de posição conservando a mesma configuração e/ou decompô-la em suas unidades figurais, combinando-as para formar uma outra figura ou ainda, dividi-la em outras subfiguras que podem ou não ser reagrupadas para formar novas. Uma figura é constituída por variações dimensionais e qualitativas.

Ainda, de acordo com Duval (2012, p.118), as apreensões dos conteúdos geométricos ocorrem de forma diferenciada dos outros conteúdos matemáticos, pois segundo ele, "[...] ver uma figura em geometria é uma atividade cognitiva mais complexa do que o simples reconhecimento daquilo que uma imagem mostra". As apreensões tratam das interpretações que o sujeito em interação pode ter em relação as diversas formas as quais as figuras podem ser representadas, pois em geometria considera-se as figuras que possuem propriedades a serem exploradas. Dessa forma, identifica-se quatro tipos de apreensões em geometria: sequencial, perceptiva, discursiva e operatória.

A **apreensão sequencial** é solicitada em problemas onde se requer construção ou uma descrição, cujo objetivo é a reprodução de uma figura dada. Por exemplo, a construção de um quadrado utilizando régua e compasso.

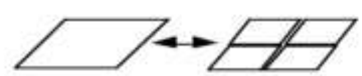
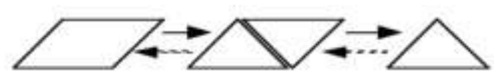
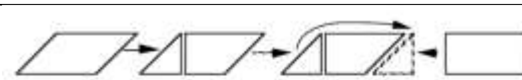
A **apreensão perceptiva** está relacionada com a maneira de ver as figuras. Ela se caracteriza por apresentar diferentes organizações perceptivas para uma mesma figura, está relacionada com a interpretação de uma figura geométrica, permitindo identificar ou reconhecer de forma direta o objeto.

A **apreensão discursiva,** segundo Salazar (2009, p.84), "[...] corresponde à explicitação de outras propriedades matemáticas da figura, além das que são assinaladas por uma legenda ou pelas hipóteses". Nesse sentido, Almouloud (2003) corrobora destacando que a apreensão discursiva consiste na interpretação dos elementos da figura, enfatizando a articulação dos enunciados, considerando a rede semântica de propriedades do objeto. Além disso, a apreensão discursiva também está relacionada com as demonstrações matemáticas. Moran (2015, p.37) reforça essa ideia ao destacar que “[...] em atividades de demonstração, a apreensão discursiva de uma figura deve privilegiar a articulação dos enunciados, construindo uma rede semântica de propriedades e objetos que auxiliem na interpretação das unidades figurais”.

A **apreensão operatória,** segundo Duval (2012, p.125), está “[...]centrada nas modificações possíveis de uma figura inicial e nas reorganizações possíveis destas modificações”, ou seja, está relacionada com as modificações que essa figura pode sofrer. Esse autor as classifica em mereológica, ótica e posicional. A seguir descreve-se sucintamente cada uma delas.

-Modificação mereológica: a figura inicial é dividida em unidades figurais de mesma dimensão, e “[...] as partes elementares obtidas por fracionamento podem ser reagrupadas em várias subfiguras, todas pertencentes à figura inicial. ” (DUVAL, 2012, p.128). Cabe ressaltar ainda, que esta modificação é classificada em três tipos descritos no Quadro 1.

Quadro 1 – Classificação da modificação mereológica

Modificação mereológica	Descrição das partes obtidas após o fracionamento	Exemplo
Estritamente homogênea	Mesma forma que o todo.	
Homogênea	Iguais entre si, mas possuem forma diferente da figura de partida.	
Heterogênea	São diferentes entre si.	

Fonte: Autoras, adaptado de Duval (2012).

- Modificação ótica: a figura inicial mantém a sua forma e orientação inicial, o que modifica é o tamanho, ou seja, a figura inicial é ampliada ou reduzida.

- Modificação posicional: são preservados o tamanho e a forma da figura inicial, o que varia é a orientação, por exemplo, deslocamento (translação), rotação e reflexão da figura.

Duval (2011) ainda destaca um poder cognitivo particular conferido às figuras, e menciona três características inerentes a elas: o valor intuitivo, onde é possível interpretações através de um simples olhar, sem a necessidade de uma explicação complementar; a possibilidade de reconhecimento de objetos e, por fim, a possibilidade de serem construídas instrumentalmente, seja com régua, compasso ou por meio de um *software*.

Em relação aos *softwares*, Duval (2011) afirma que estes constituem-se um modo fenomenológico de produção radicalmente novo, fundamentado na aceleração de tratamentos, ou seja, obtemos, imediatamente, muito mais que tudo o que poderíamos obter a mão livre. Além disso, as representações semióticas não discursivas tornam-se manipuláveis como objetos reais em um ambiente de geometria dinâmica, pois, podemos deslocar, rotacionar, ou deformar a partir de um ponto, entre outros.

Os *softwares* apresentam em sua concepção um caráter que permite gerar um ambiente de geometria dinâmica, além de possibilitarem uma função heurística, que concede também uma abordagem "experimental" de relações e de propriedades geométricas. Com seu uso, por exemplo, é possível não só construir figuras, mas também explorar suas transformações por simples deslocamento de um "objeto", quer seja um ponto, segmento, reta, entre outros. (DUVAL, 2013).

Basso e Notare (2015) corroboram nesta perspectiva quando indicam que, em ambientes de geometria dinâmica[1], a afirmação de uma propriedade dinâmica torna-se, neste campo de experimentação, a descrição de um fenômeno geométrico acessível à observação. Dessa forma, constituindo-se como um espaço em que os alunos podem tornar possíveis suas ideias informais, para dar início a um processo de coordenação com ideias mais formalizadas sobre um determinado conceito/conteúdo matemático.

Um dos *softwares* que apresenta as características supracitadas é o GeoGebra[2]. Ele está disponível em vários idiomas; sendo multiplataforma (Windows, Mac e Linux); uma ferramenta de criação de materiais digitais de aprendizagem interativos; código aberto; possui janelas de geometria, álgebra, bem como planilha eletrônica que estão vinculadas e são totalmente dinâmicas. Nesse sentido, Gravina (2015) salienta que a interface interativa, aberta à exploração e à sua experimentação, provoca experimentos de pensamentos, diferentes daqueles que acontecem com o suporte do lápis e papel.

Ainda, segundo Basso e Notare (2015) a ação de arrastar, que compõe a

[1] Os Ambientes de Geometria Dinâmica (AGD) são também chamados de *softwares* de Geometria Dinâmica (GD). Este trabalho não faz distinção entre a AGD e GD. Assim, daqui para frente será considerada apenas a AGD.

[2] Disponível para *download* em https://www.geogebra.org/

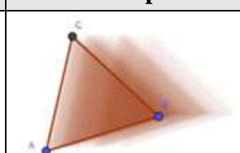
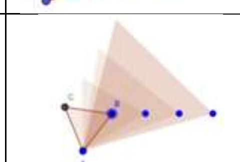
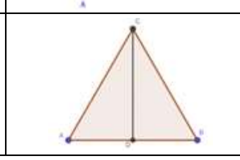
característica principal dos ambientes de geometria dinâmica, muda o aspecto figural de uma construção geométrica, mas não o aspecto conceitual. As propriedades do objeto podem ser mantidas desde que sua construção tenha sido elaborada por meio destas, resultantes do seu conceito. Sendo que esta dualidade figural/conceitual não é possível em um ambiente estático de lápis e papel, uma vez que os aspectos figurais são tratados em um registro visual e, um conceito, em um registro discursivo.

Salazar e Almouloud (2015) ampliaram os estudos relacionados com os Registros de Representação Semiótica e os *softwares*. Estes autores analisaram as três atividades cognitivas essenciais (formação, tratamento e conversão) na constituição do registro figural em um AGD. Inicialmente, para a primeira atividade cognitiva afirmam que:

> A formação de uma representação semiótica em AGD, que chamamos formação dinâmica, se dá quando o sujeito, para representar um objeto geométrico, escolhe uma ferramenta (da barra de ferramentas) que lhe permita criar a figura desejada. Nessa ação, o sujeito deve mobilizar conhecimentos de geometria (SALAZAR e ALMOULOUD, 2015, p.928).

Os tratamentos no AGD, denominados de tratamentos dinâmicos, são classificados em três tipos: mudar a posição da figura, mudar o comprimento dos lados da figura e reconfigurar a figura. No Quadro 2 é exposta uma pequena descrição de cada um, bem como, apresentado um exemplo relacionado.

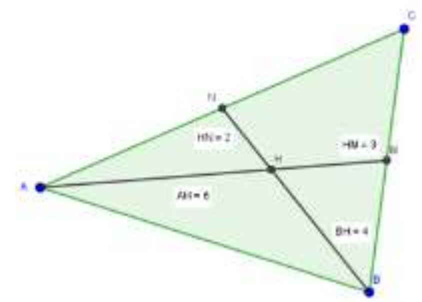
Quadro 2 – Tipos de tratamentos dinâmicos

Tratamento	Descrição	Exemplo
Mudar a posição da figura	Modificar de maneira instantânea a posição da figura representada na área de trabalho, conservando sua forma.	
Mudar o comprimento dos lados da figura	Utilizar a função de arrastamento e a ferramenta de homotetia.	
Reconfigurar a figura	Utilizar a função de arrastamento e outras ferramentas específicas que dependem da figura construída.	

Fonte: Adaptado de Salazar e Almouloud (2015).

Em relação à conversão, Salazar e Almouloud (2015) destacam a conversão entre o registro figural e o registro em língua natural, afirmando que, neste tipo de conversão, existem dois casos distintos: a ilustração e a descrição. A primeira refere-se à conversão de uma representação em língua natural para uma representação figural, já a segunda seria a conversão inversa. Além disso, a ilustração não é uma conversão que permite solucionar uma tarefa complexa, ela apoia o sujeito no processo de resolução de um problema, entretanto a descrição permite que o sujeito realize conjecturas sobre a figura representada (Quadro 3).

Quadro 3 – Exemplo de conversão dinâmica

Registro Língua Natural	Registro Figural
No triângulo ABC, os segmentos $\overline{AM}$ e $\overline{BN}$ são suas duas medianas, que se cortam no ponto H. Com base nessa afirmação, encontre a razão de proporcionalidade entre os segmentos que determinam o ponto nas medianas $\overline{AM}$ e $\overline{BN}$ iniciais.	

Fonte: Adaptado de Salazar e Almouloud (2015).

Em particular, para solucionar o exemplo apresentado no quadro 2, inicialmente realizou-se uma conversão dinâmica do registro em língua natural (enunciado) para o registro figural, ou seja, uma ilustração. Utilizando as ferramentas do AGD, construiu-se o que está descrito no enunciado: com a ferramenta "polígono", definimos o triângulo ABC; encontramos os pontos médios com a ferramenta "ponto médio" e traçamos as medianas solicitadas com a ferramenta "segmento". Para conjecturar a respeito da razão de proporcionalidade, usou-se a ferramenta "medida". A função de arrastamento pode ser empregada para validar as conjecturas (SALAZAR E ALMOULOUD, 2015).

No momento em que são feitas conjecturas sobre a figura construída, estamos realizando a conversão do registro figural para o registro em língua natural. Além disso, ao utilizar as ferramentas do GeoGebra, a saber: polígono, ponto médio, segmento e medida, ou ainda a função de arrastamento, estamos realizando tratamentos dinâmicos.

METODOLOGIA

Esta pesquisa caracteriza-se como qualitativa, pois, de acordo com Lüdke e André (1986), busca-se focar a realidade de forma complexa e contextualizada, possuindo um plano aberto e flexível, bem como uma riqueza em dados descritivos, preocupando-se em retratar a perspectiva dos participantes, ou seja, de nove acadêmicos do Curso de Matemática Licenciatura da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM) matriculados na disciplina Recursos Tecnológicos no Ensino de Matemática II.

Os dados foram produzidos durante o desenvolvimento de uma sequência didática dinamizada no horário e local regular das aulas do referido componente. Por meio dos princípios da análise de conteúdo, foram identificados estruturas e elementos de conteúdo para assim explicar diferentes características e significados. Para tanto, foram considerados os três polos cronológicos propostos por Bardin (2016): pré-análise, exploração do material, tratamento dos resultados e interpretações.

Na *pré-análise* foi realizada a seleção, reestruturação, elaboração e apreciações preliminares das três atividades, constituídas por 25 itens e cinco arquivos no *software* GeoGebra, conforme indicado no Quadro 4. Cabe ressaltar que as três atividades elaboradas foram reestruturadas e adaptadas a partir de questões da primeira fase, nível dois da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), nas edições dos anos: 2016 (questão 1) e 2017 (questões 2 e 3).

Quadro 4 – Composição da sequência didática

Atividade	Denominação	Itens	Arquivos do GeoGebra
I	Explorando triângulos	1a e 1b	ARQUIVO 1: https://www.geogebra.org/o/YVcRGtAR
		2a, 2b, 3a, 4a, 4b 5a e 6ª	ARQUIVO 2: https://www.geogebra.org/classic/v8QSpVJ5
II	Explorando quadriláteros	7a, 7b, 8, 9, 10, 11a, 11b e 11c	ARQUIVO 7: https://www.geogebra.org/classic/DE57gBkK
III	Explorando hexágonos	12	ARQUIVO 12: https://www.geogebra.org/o/YP678Ua2
		13a, 13b,14, 14a, 15, 15a e 15b	ARQUIVO 13: https://www.geogebra.org/o/aCGYCHXM

Fonte: Autoras.

Por meio da *exploração do material*, na segunda fase da análise de conteúdo, foram constituídas as seguintes categorias: mobilização de registros; mobilização das apreensões sequencial, perceptiva, discursiva e operatória. E, no *tratamento dos resultados e interpretações* foram realizados aprimoramentos e sistematização dos resultados a fim de torná-los válidos e significativos.

A fim de apontar indícios que revelam a produção e análise de dados desta pesquisa, ou seja, a implementação das fases supracitadas expomos, na próxima seção, aspectos relacionados à *pré-análise*, e, a seguir, as outras fases da análise de conteúdo.

PRODUÇÃO E ANÁLISE DE DADOS

A **primeira atividade da sequência didática** é constituída por nove itens distribuídos em dois arquivos do *software* GeoGebra (Figura 1).

ATIVIDADE I - EXPLORANDO TRIÂNGULOS (Adaptado de Obmep, 2016, Q10, N2, F1)

1) Abra e analise o ARQUIVO 1.

1a) Com essa malha isométrica é possível formar quadrados nos quais os lados coincidam com as linhas da malha? Justifique sua resposta.

1b) Quais quadriláteros convexos podem ser construídos a partir das linhas que compõem essa malha? Esboce-os, justificando cada uma de suas construções.

2) Abra e analise o ARQUIVO 2. Selecione as caixas existentes seguindo a ordem numérica e responda aos questionamentos:

Selecione a caixa IMAGEM 2.

2a) Observe a figura e descreva pelo menos três características.

2b) Com base nas unidades de medida disponibilizadas indique o valor da área do triângulo ABC.

3) Selecione a caixa IMAGEM 3 e responda:

3a) Dos quatro triângulos quais são equiláteros? Identifique-os pela cor. Explique como você estabeleceu essa conclusão.

4) Selecione a caixa IMAGEM 4 e responda:

4a) Qual é a área do triângulo verde? Justifique.

4b) Há alguma relação entre a área do triângulo verde e o triângulo azul? Por quê?

5) Selecione a IMAGEM 5 e responda:

5a) Qual é a área do triângulo vermelho?

6) Selecione a IMAGEM 6 e responda:

6a) Quantas unidades de área possui o triângulo amarelo?

Figura 1 – Descrição da Atividade I
Fonte: Autoras.

Nos dois primeiros questionamentos (itens 1a) e 1b)) foram exploradas condições necessárias e suficientes para a construção de quadriláteros convexos a partir de uma malha isométrica. No recurso disponibilizado (arquivo 1) o aluno tem disponível apenas algumas ferramentas de construção, tais como: polígonos, polígonos regulares, circunferências (diferentes possibilidades de construção), compasso, ângulos e ferramenta de medida de comprimentos. A ferramenta de arraste tem um papel importante neste processo de exploração, pois a partir da construção inicial, fixando o número de lados do polígono, o aluno poderá obter diferentes polígonos que atenderão, ou não, as condições indicadas. Dessa forma, permitindo-lhe elaborar e validar suas conjecturas.

Em termos de registros de representação semiótica é possível observar a necessidade da mobilização de registros em língua natural e figural. A apreensão sequencial é requerida na construção das figuras no GeoGebra e a perceptiva também pode ser mobilizada pois os alunos precisam verificar características da malha isométrica que permitem a construção do quadrado ou de outros quadriláteros convexos.

Para os demais itens desta atividade é utilizado um outro recurso (arquivo 2) que tem a sua interface exibida na Figura 2. Sendo que, em alguns itens este permite explorara conversão do registro figural para o registro em língua natural (descrição), pois é solicitada a indicação de características da figura a partir de sua visualização, por exemplo, nos itens 2a) e 2b). O recurso fornece além da malha isométrica em que a figura é exibida, representações de unidades de medida de comprimento e de área onde, caso desejado, é possível sobrepor estas unidades na figura por meio de translação e rotação, isso é possibilitado pela ferramenta de arraste.

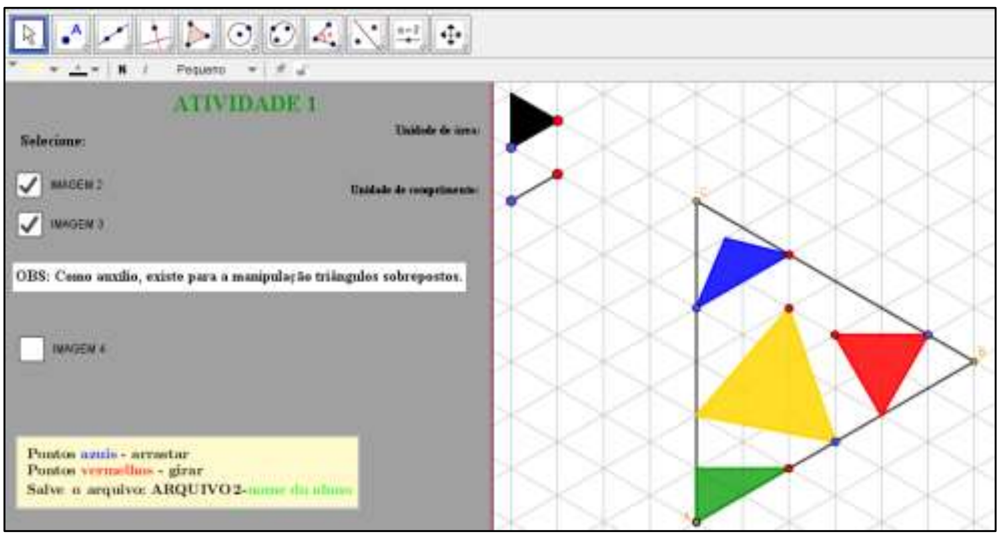


Figura 2 – Interface geral da Atividade I
Fonte: Autoras.

No item 3a) são disponibilizadas figuras extras que podem ser arrastadas proporcionando-lhes ações de translação e rotação a fim de auxiliar na análise por meio da comparação com a malha isométrica, ou também pode ser usada a unidade de medida de comprimento disponibilizada. Caso a identificação e justificativa da existência de triângulos equiláteros seja feita a partir da malha isométrica estas serão baseadas na observação visual. Dessa forma, mobilizando a apreensão perceptiva de que os lados destes triângulos seriam diagonais de paralelogramos congruentes.

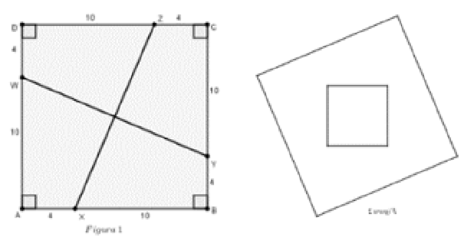
Nos itens 4a), 4b), 5a) e 6a) após a seleção de caixas indicativas surgem figuras de triângulos onde busca-se explorar a apreensão operatória, perceptiva e a discursiva, ou seja, para a resolução é necessário fazer uso da visualização e de modificações nas figuras exibidas, estabelecendo-se relações entre as representações figurais e a língua natural, sem exclusivamente recorrer à utilização dos modelos algébricos usuais que determinam o valor da área de triângulos.

Isso pode ser feito por meio de figuras sobrepostas que estão disponíveis e, novamente, por meio da ferramenta de arraste é possível realizar comparações a fim de resolver o que se pede. No entanto, há a necessidade de ocorrer apreensões operatórias, perceptivas a partir do "movimento" das figuras sobre a malha isométrica. De acordo com Brasil (2018) a geometria, no estudo de áreas, não pode ficar reduzida, a partir de figuras apresentadas, a aplicação de fórmulas para o seu cálculo. Assim, entende-se necessário considerar o papel heurístico das experimentações na aprendizagem Matemática.

A **segunda atividade da sequência didática** (Figura 3) é constituída por nove itens explorados a partir de um recurso digital elaborado no *software* GeoGebra.

ATIVIDADE II - EXPLORANDO QUADRILÁTEROS (Adaptado de Obmep, 2017, Q14, N2, F1)

7) Abra e analise o ARQUIVO 7. Selecione a caixa IMAGEM 7 e responda:
7a) Descreva o que você observa na Figura 1.
7b) Qual é a área dessa figura? Descreva, com detalhes, como você a obteve.
8) O que você pode afirmar sobre cada quadrilátero que compõem a Figura 1?
Clique duas vezes no botão REINICIAR para voltar a configuração inicial.
9) O que você pode afirmar sobre a figura geométrica formada pelos pontos XYZW? Argumente matematicamente.
10) Qual é a posição relativa aos segmentos XZ e YW? Justifique matematicamente.
11) Clique na IMAGEM 11. Rearranje os quatro quadriláteros da Figura 1 na Figura 2, conforme as instruções:
- Devem ser utilizadas todas as peças;
- Não pode ter sobreposição;
- O quadrado interno da Figura 2 não pode ser preenchido.
Responda:
11a) Represente na figura abaixo todos os movimentos que você realizou para rearranjar os quatro quadriláteros da Figura 1 na Figura 2.



11b) Qual é a área do quadrado ABCD da Figura 2? Justifique sua resposta apontando argumentos.
11c) Qual é a área total da Figura 2?

Figura 3 – Descrição da Atividade II
Fonte: Autoras.

Na Figura 4 é exibida a interface do recurso (arquivo 7), com uma das caixas selecionadas.

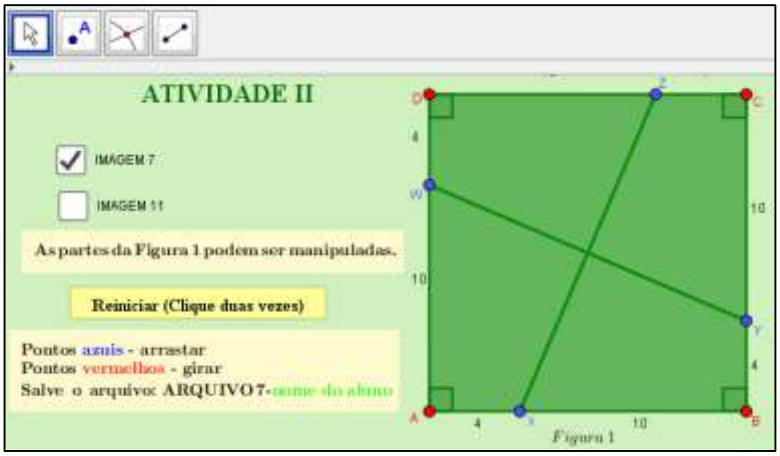


Figura 4 – Interface geral da Atividade II
Fonte: Autoras.

Nessa atividade busca-se explorar as apreensões perceptiva, discursiva e operatória, bem como a mobilização simultânea dos registros figural e em língua natural. As maneiras de ver uma figura foram exploradas, a partir de imagens do mesmo objeto matemático, no caso um quadrado, dispostas de forma diferente. Sendo que, uma delas será decomposta e, por meio da reconfiguração, deverá ser reconstruída.

Com maior detalhe, no item 7a) buscamos explorar as maneiras de ver uma figura (apreensão perceptiva). Por exemplo, na Figura 1 poderíamos ver um quadrado e dois segmentos perpendiculares em seu interior, ou quatro quadriláteros sobrepostos a um quadrado, ou ainda, uma figura formada pela justaposição de quatro quadriláteros. A partir dos dados fornecidos é possível obter o valor da área do quadrado em questão.

No item 8 é explorada a congruência de figuras. Para tanto, é possível movimentar os quadriláteros que formam a Figura 1 e reorganizá-los, seja por sobreposição ou por comparação de suas medidas e ângulos, um a um. Em particular, no recurso desenvolvido é possível voltar a posição original das figuras a partir de um botão de reiniciar, não necessitando fechar e abrir novamente o mesmo.

Os itens 9 e 10 discutem aspectos posicionais dos segmentos definidos na região limitada do quadrado. No item 9 deseja-se que os alunos possam concluir que a figura geométrica formada pelos pontos X, Y, Z e W corresponda a um quadrado. Isso pode ser explorado a partir das ferramentas disponibilizadas na parte superior do recurso, no caso, ponto, segmento e intersecção entre dois objetos, que permitem a construção de um quadrilátero que poderá servir para conjecturar a respeito de congruência, paralelismo e perpendicularidade. Dessa forma, se chegar à conclusão que os segmentos $\overline{XZ}$ e $\overline{YW}$ são perpendiculares, pois correspondem as diagonais do quadrado $XYZW$.

Para os três últimos itens atividade II é necessário selecionar uma caixa, para ser exibida uma outra imagem, denominada Figura 2. Cabe salientar que, na questão original da OBMEP, os quadriláteros já se encontravam rearranjados, no entanto, optamos por deixar apenas o contorno e solicitar que fossem realizados movimentos de translação e rotação nos quadriláteros, oportunizados pela ferramenta de arraste (Figura 5).

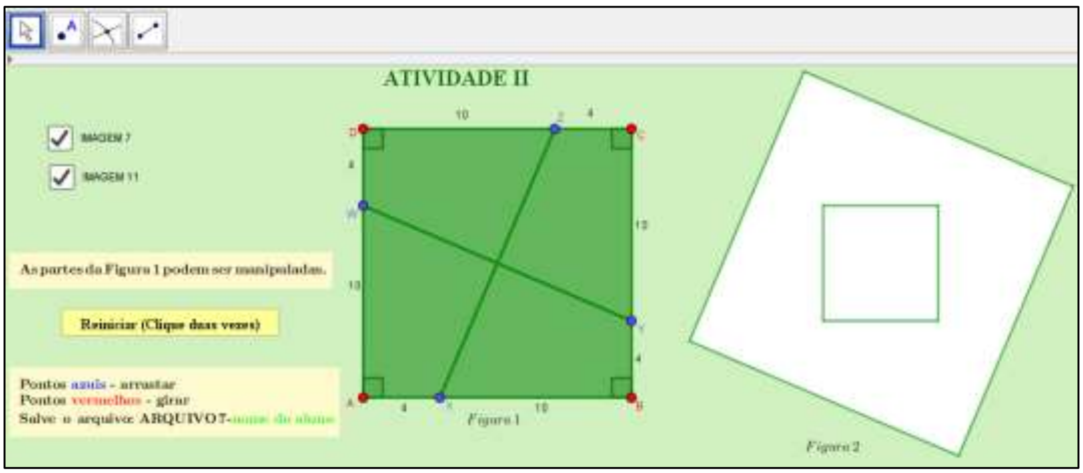


Figura 5 – Interface do recurso que corresponde ao item 11
Fonte: Autoras.

Além disso, neste item é necessário mobilizar a apreensão perceptiva, identificando a medida do lado do quadrado $ABCD$, dada pela subtração das medidas conhecidas, ou seja, dez e quatro unidades de comprimento. Esta apreensão é necessária para se chegar ao valor da área total da figura que corresponderá a composição de áreas, do quadrado $ABCD$ e de outros quatro quadriláteros.

A **terceira atividade da sequência didática** é composta por um roteiro com oito itens (Figura 6), distribuídos em dois recursos elaborados no *software* GeoGebra.

ATIVIDADE III - EXPLORANDO HEXÁGONOS (Adaptado de Obmep, 2017, Q12, N2, F1)

12) Abra o ARQUIVO 12. Selecione a caixa IMAGEM 12.

Manipule o hexágono regular azul de modo que:

- Forme uma única figura na qual dois vértices consecutivos do hexágono azul coincidam com dois vértices do hexágono vermelho;

- Tenha apenas um vértice do hexágono vermelho no interior do hexágono azul.

Abra o ARQUIVO 13 e clique no botão REINICIAR.

13) Considere que o hexágono vermelho tem área igual a 10 cm²:

13a) Utilizando as ferramentas disponíveis, decomponha o hexágono vermelho em seis figuras com mesma área. Justifique sua estratégia.

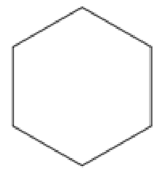
13b) Considerando a intersecção do hexágono vermelho com o hexágono azul, subdivida o hexágono vermelho em 12 triângulos. Explique como realizou tal procedimento.

14) Selecione a caixa IMAGEM 14. Os ΔDEK e ΔFEK são congruentes? Por quê? Justifique matematicamente sua resposta.

14a) Qual é o valor da área do $\Delta\ DEF$? Exponha seus argumentos.

15) É possível utilizar a mesma estratégia empregada no item 13.b) para dividir o hexágono azul em 18 triângulos congruentes? Justifique.

15a) Represente na figura ao lado os 18 triângulos que você traçou no hexágono azul disponível no GeoGebra.



15b) Agora, determine o valor o da área do hexágono azul. Exponha sua solução com detalhes.

Figura 6 – Descrição da Atividade III
Fonte: Autoras.

No recurso elaborado para o desenvolvimento do item 12 tornam-se visíveis dois hexágonos, um vermelho (menor) e o outro azul (maior), conforme ilustra a Figura 7.

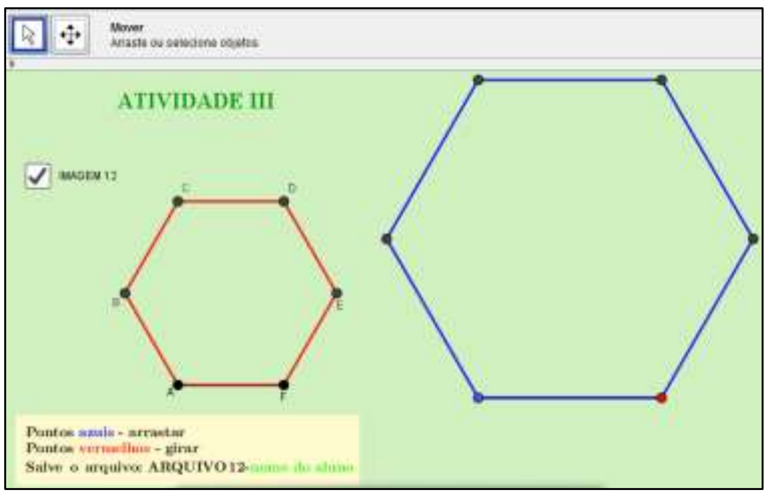


Figura 7 – Interface do recurso que corresponde ao item 12
Fonte: Autoras.

A partir da manipulação permitida pela ferramenta de arraste, por meio da translação e rotação de figuras é possível realizar a sobreposição destas figuras em diferentes disposições que irão atender ao que fora solicitado no enunciado. Desse modo, no decorrer da atividade, é possível mobilizar registros em língua natural e figural, pois exigirá a manipulação do hexágono regular azul de modo a satisfazer as condições descritas no enunciado. Esse tratamento figural é otimizado pelos recursos disponíveis no recurso, sendo trabalhoso sua realização apenas com lápis e papel. Observou-se que na questão original da prova da OBMEP essa composição figural é dada em seu enunciado.

No seguinte recurso desta atividade (arquivo 13) são apresentadas novamente as imagens dos dois hexágonos que servirão de recurso para a exploração de apreensões operatórias. Em particular, nos itens 13a) e 13b) solicita-se que sejam realizadas divisões no hexágono vermelho, sob determinadas condições fornecidas a partir do enunciado. No recurso é disponibilizado no menu superior, ferramentas de construção de segmentos que deverão ser usadas para definir as divisões.

No item 14 (Figura 8) busca-se explorar a representação figural do hexágono vermelho (menor) através de relações existentes entre as partes obtidas após a divisão deste hexágono, que fora examinada ao ser resolvido o item anterior. Isso é feito evidenciando-se características dos triângulos definidos e que possibilitam a determinação do valor de área de um outro triângulo, sem a aplicação de fórmulas. Desde que seja observado a existência de congruência entre figuras formadas no item anterior.

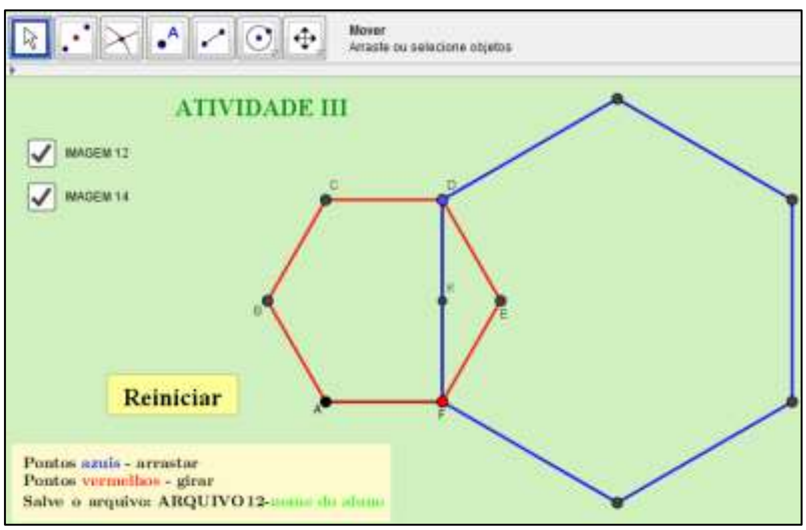


Figura 8 – Interface do recurso que corresponde ao item 14
Fonte: Autoras.

No item 15a) é possível explorar a apreensão perceptiva e operatória para realizar a divisão do hexágono azul em 18 triângulos, fazendo-se conjeturas e validando-as, ou não, por meio da construção de segmentos no recurso que possibilitem definir o quantitativo de triângulos indicados. Para, após o aluno realizar a reprodução com lápis em papel em um modelo impresso. Ao elaborar este item pensamos que os alunos já teriam, compreendido implicitamente que os 18 triângulos seriam congruentes, entretanto, ao não explicitar diretamente, usando a palavra "congruente" no enunciado permite-se que o hexágono regular possa ser dividido em 18 triângulos quaisquer.

No item 15b) indagamos sobre o valor da área do hexágono azul, assim como constava na questão original. Nosso objetivo é possibilitar que o aluno possa resgatar construções realizadas em questões anteriores que possam subsidiar a resolução do item.

Por meio da análise dos protocolos foram sistematizadas duas categorias: *mobilização de registros* e *mobilização das apreensões*.

Em relação à *mobilização de registros*, identificamos tratamentos e conversões, bem como a simultaneidade dos registros figurais e em língua natural. Em termos de transformações, verificamos que foram explorados os tratamentos no AGD ao mover e reconfigurar as figuras das atividades da sequência didática. Já as conversões priorizaram registros figurais e em língua natural, item 7a), por exemplo, bem como conversões no sentido contrário, as quais podem ser observadas no item 12. Além disso, registros simbólicos numéricos e algébricos também foram mobilizados. Cabe ressaltar que alguns participantes constituíram soluções envolvendo vários registros, como, por exemplo, ao resolverem o item 4a), mobilizando registros em língua natural, figural e simbólico.

Já em relação à segunda categoria, *mobilização de registros* pudemos constatar que as apreensões perceptiva, discursiva e operatória foram as mais mobilizadas pelos alunos. Sendo que a apreensão sequencial foi identificada por alguns alunos quando estes realizaram a descrição dos passos de uma construção, evidenciado, por exemplo, na análise do item 13a). Além disso, observamos indícios desta apreensão no item 15a) ao realizarem a divisão do hexágono azul em 18 triângulos através de ferramentas de construção.

Dentre as três apreensões mais mobilizadas, a apreensão perceptiva teve maior evidência. Ao analisar os protocolos dos participantes, percebemos que foram explorados vários modos de ver as figuras e de interpretá-las. Além disso, ao comparar as resoluções dos participantes, identificamos diferentes estratégias em vários itens: 4a), 5a), 6a), 7a) e 15a).

Em relação à apreensão discursiva, verificamos que alguns alunos apresentaram argumentos um pouco mais complexos em relação aos demais. Isso foi evidenciado, por exemplo, no item 13b), onde utilizaram a congruência de triângulos na justificativa ao contrário dos demais. Por outro lado, constatamos que, em alguns itens que requeriam demonstrações matemáticas, ou os alunos não apresentaram informações necessárias ou, então, deixaram de prová-las. Isso ocorreu no caso de provar que o quadrilátero $XYZW$ corresponderia a um quadrado na Atividade II, item 9.

Quanto à apreensão operatória, verificamos a mobilização pelos participantes da apreensão mereológica, sendo na maioria delas, a mereológica homogênea e a posicional através de rotação e translação. Como mencionado anteriormente, identificamos nos protocolos várias formas de visualizar as figuras, o que também ocorreu para dividir as figuras. Isso pode ser evidenciado no item 15a) onde foram identificados quatro modos diferentes de dividir o hexágono azul em 18 triângulos.

Cabe destacar ainda que houve alunos que mobilizaram ao mesmo tempo a apreensão operatória mereológica e a posicional. Nesse sentido, ainda evidenciamos que, na maioria dos itens onde foi mobilizada a apreensão perceptiva, também foi mobilizada a apreensão discursiva.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na análise dos dados, observamos que ao resolverem as atividades propostas os acadêmicos mobilizaram registros de caráter semiótico. Tal fato corrobora com a ideia de que os objetos matemáticos são acessíveis por meio das representações semióticas.

Em relação à categoria mobilização de registros, foram evidenciados principalmente registros figurais e em língua natural, tratamentos, tratamentos dinâmicos e conversões. O que converge com as ideias expostas nos referenciais teóricos ao resolver atividades que envolvem conceitos/conteúdos geométricos. Além disso, também foram empregados registros simbólicos, algébricos e numéricos.

No que tange à categoria apreensões mobilizadas, identificamos indícios de todas as apreensões, entretanto, a perceptiva, a discursiva e a operatória foram as mais enfatizadas. Nos protocolos identificamos diversos modos de ver as figuras e de interpretá-las, surgindo argumentos em diferentes níveis de complexidade. Além disso, emergiram mobilizações de apreensão operatória mereológica, do tipo homogênea e a posicional através de rotação e translação.

Cabe ressaltar ainda que mesmo sem explicitar claramente a nomenclatura utilizada na teoria dos registros de representação semiótica os acadêmicos demonstraram reconhecer a importância de tais apreensões. Este fato reforça a pertinência entre o referencial teórico e metodológico adotado neste estudo.

Para finalizar, cabe ressaltar que além deste trabalho o EMgep (Educação Matemática: grupos de estudos e pesquisas) vem desenvolvendo outros estudos. Em particular, uma dessas pesquisas está sendo desenvolvida pela primeira autora deste artigo ao realizar uma metanálise de pesquisas *stricto sensu* brasileiras que possuem no seu título o objeto matemático "área".

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A. Registros de representação semiótica e compreensão de conceitos geométricos. **Aprendizagem em Matemática**: Registros de representação semiótica. Campinas: Papirus. 2003. 125-148.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. São Paulo: Edições 70, 2016.

BASSO, M. V. A.; NOTARE, M. R. (2015). Pensar-com Tecnologias Digitais de Matemática Dinâmica. **Revista Novas Tecnologias na Educação**, v. 13, n. 2, p. 1-10.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática** - 3º e 4º ciclos. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular** – BNCC, 2018.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S.D.A. (Org) **Aprendizagem em matemática**: Registros de representação semiótica. Campinas, São Paulo: Papirus, 2003.

DUVAL, R. **Ver e ensinar a matemática de outra forma:** entrar no modo matemático de pensar: os registros de representação semióticas. Org.: Tânia M. M. Campos. Tradução: Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011.

DUVAL, R. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Tradução: Méricles Thadeu Moretti. **Revista Eletrônica de Educação Matemática – Revemat**: Florianópolis, v.07, n.1, p.118-138, 2012.

DUVAL, R. Entrevista: Raymond Duval e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. [Entrevista disponibilizada em jul-dez. 2013, a **Revista Paranaense de**

Educação Matemática, v.2, n.3]. 2013. Disponível em: <http://www.fecilcam.br/revista/index.php/rpem/article/viewFile/963/pdf_122 >. Acesso em: 15 jun. 2017.

GRAVINA, M. A. **O potencial semiótico do Geogebra na aprendizagem da Geometria**: Uma Experiência Ilustrativa. VIDYA, v. 35, n. 2, p. 237-253, jul./dez., 2015 - Santa Maria, 2015. ISSN 2176-4603

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em Educação***:* abordagens qualitativas, São Paulo: EPU, 1986.

MORAN, M. **As apreensões em Geometria***:* um estudo com professores da Educação Básica acerca de registros figurais. 2015. 249 f. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência e a Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2015.

SALAZAR, J. V. F. **Gênese Instrumental na interação com Cabri 3D:** um estudo de Transformações Geométricas no Espaço. 2009. 316 f. Tese (Doutorado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo: SP, 2009.

SALAZAR, J. V. F.; ALMOULOUD, S. A. **Registro Figural no ambiente de Geometria dinâmica.** Educação Matemática Pesquisa (Online), v. 17, p. 919-941, 2015.

SBEM. **Documento Base da Sociedade Brasileira de Educação Matemática**: Subsídios para a Discussão de Propostas para os Cursos de Licenciatura em Matemática. Seminário Nacional de Licenciaturas em Matemática. Salvador, 2003.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA - SBM. Diretrizes Curriculares para o Ensino de Matemática. São Paulo, 2015.

SOARES, M. A. S. FERNER, D. L. MARIANI, R. C. P. Visualização em produções que exploraram *software*: uma metanálise no campo da geometria. In: Nilce Fátima Scheffer; Eliziane Comachio; Danuza Cenci. (Orgs.). **Tecnologias da informação e comunicação na Educação Matemática***:* articulação entre pesquisas, objetos de aprendizagem e representações. Curitiba: CRV, 2018, v. 1, p. 117-137.

Submetido em 15 de setembro de 2019.
Aprovado em 02 de janeiro de 2020.