REVISEM

Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática

https://doi.org/10.34179/revisem.v5i1.12978

SOBRE UMA IDENTIDADE ENVOLVENDO FUNÇÕES SIMÉTRICAS E PARTIÇÕES DE INTEIROS

Mateus Alegri
DMAI/Universidade Federal de Sergipe
allegri.mateus@gmail.com
Wagner Ferreira Santos
DMAI/Universidade Federal de Sergipe
wagnermaths@gmail.com
Samuel Brito Silva
DMAI/Universidade Federal de Sergipe
s.complexo@hotmail.com

Resumo

Neste trabalho demonstramos uma identidade do tipo "soma = produto" de séries hipergeométricas relacionada à partições de inteiros e as funções simétricas homogêneas completas, h_n. Para a prova do resultado, faremos uso de um ferramental gráfico chamado de Diagrama de Ferrers. A partir disto, com uma simples mudança de variáveis, obtemos o resultado principal que está ligado à uma famosa identidade de MacMahon demonstrada em [10].

Abstract

In this work, we demonstrate a 'sum = product' type identity of hypergeometric series related to the integer partitions and complete homogeneous symmetric functions, h_n. For the proof of the result, we use the graphical tool called Ferrers Diagram. From this, with a simple change of variables, the main result is obtained, which is linked to a famous MacMahon identity demonstrated in [10].

Palavras-chaves: Funções Simétricas; Partições de Inteiros; Funções Geradoras; Diagrama de Ferrers; Séries Hipergeométricas.

1 Introdução

Nosso objetivo é demonstrar, utilizando argumentos analíticos e combinatórios, a seguinte dupla identidade.

Teorema 1.1. *Para $q \in \mathbb{C}$, $|q| < 1$, e $q' = (1, q, q^2, \ldots)$, tem-se*

$$h_n(q') = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-q^k} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{q^{kj}}{j}\right)^l}{l!}.$$

A primeira identidade do Teorema (1.1) é obtida a partir da função simétrica homogênea e uso do diagrama de Ferrers. Observe que o produtório envolvido nesta identidade é a função geradora para o número de partições em que a maior parte não excede n. Estas equações estão relacionadas com a seguinte, devida à MacMahon [10], onde aparece o mesmo produtório.

Para $q \in \mathbb{C}$, e $|q| < 1$, tem-se

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-q^k} = \sum_{\lambda \vdash n} \frac{1}{N(\lambda) m_1! m_2! \ldots (1-q)^{m_1}(1-q^2)^{m_2} \ldots},$$

onde $\lambda = \langle 1^{m_1} 2^{m_2} 3^{m_3} \ldots \rangle$, $\lambda \vdash n$ significa que λ é uma partição de n e $N(\lambda)$ é igual ao produto das partes de λ.

Costuma-se denotar uma partição λ por $\langle 1^{m_1} 2^{m_2} 3^{m_3} \ldots \rangle$, onde um termo i^{m_i} significa que a parte i aparece m_i vezes na partição. Se uma parte i não aparece na partição λ, então $m_i = 0$ e esta é omitida na notação. Por exemplo, $\lambda = 5+4+4+3+1+1+1 = \langle 1^3 3^1 4^2 5^1 \rangle$. A função norma de uma partição $\lambda = \langle 1^{m_1} 2^{m_2} 3^{m_3} \ldots \rangle$, denotada por $N(\lambda)$ é dada por $N(\lambda) = 1^{m_1}.2^{m_2}.3^{m_3} \ldots$. Para a partição do exemplo anterior, tem-se $N(\lambda) = 5.4^2.3.1^3 = 240$. O uso da função norma de uma partição foi contemporaneamente explorada no artigo de Schneider e Sills [15], bem como em Alegri[1].

Os argumentos analíticos empregados aqui envolvem séries de Laurent de funções compostas com as funções exponencial e logarítimica na base e. Neste ínterim utilizaremos o conceito de funções simétricas, mais precisamente as funções simétricas homogêneas completas, $h_n(x)$. Aqui utilizaremos uma variável específica no lugar do $x = (x_1, x_2, \ldots)$, no caso $q' = (1, q, q^2, \ldots)$. Afirmamos que esta mudança será um fator que facilitará a obtenção do resultado principal, fazendo nossa demonstração breve e direta. A identidade a que nos propomos a demonstrar é uma identidade do tipo "soma=produto", como dita anteriormente, é uma equação que de um lado é um produtório infinito e outro lado uma série, sendo esta uma identidade do tipo das dezenas encontradas em Slater [13].

2 Preliminares

A fim de demonstrar o resultado principal deste artigo, exporemos aqui alguns conceitos como partições de inteiros, diagrama de Ferrers de uma partição e funções simétricas.

Definição 2.1. Uma partição de um inteiro n é uma soma não ordenada de inteiros positivos que vale n. Denotaremos por $\lambda = \langle 1^{m_1} 2^{m_2} 3^{m_3} \dots k^{m_k} \rangle$, onde m_i representa o número de repetições da parte igual a i de tal modo que $m_1 + 2m_2 + 3m_3 + \cdots + km_k = n$.

Exemplo 2.2. Para $n = 7$, temos as seguintes partições: $\langle 7 \rangle$, $\langle 1, 6 \rangle$, $\langle 2, 5 \rangle$, $\langle 1^2, 5 \rangle$, $\langle 3, 4 \rangle$, $\langle 1, 2, 4 \rangle$, $\langle 1^3, 4 \rangle$, $\langle 1, 3^2 \rangle$, $\langle 2^2, 3 \rangle$ $\langle 1^2, 2, 3 \rangle$, $\langle 1^4, 3 \rangle$, $\langle 1, 2^3 \rangle$, $\langle 1^3, 2^2 \rangle$, $\langle 1^5, 2 \rangle$, $\langle 1^7 \rangle$.

Denotamos por $p(n)$ a função que determina o número de partições de um dado inteiro positivo n, e definimos $p(0) = 1$. A função geradora para a sequência $(p(n))_{n \geq 0}$, para $|q| < 1$ é dado pelo produtório a seguir.

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n) q^n = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^n} \tag{2.1}$$

Podemos demostrar este fato simplesmente observando que

$$\frac{1}{1 - q^k} = 1 + q^k + q^{2k} + q^{3k} + \dots,$$

gera partes múltiplas de k em uma partição, e considerando produtos como a seguir,

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - q^k},$$

os expoentes de q geram partições cujam partes não superam n. Deste modo, os coeficientes destes revelam o número de partições de um inteiro cuja maior parte não supera n. Tomando $n \to \infty$, provamos a equação (2.1). As seguintes identidades perfazem importantes na história do desenvolvimento da teoria de partições de inteiros.

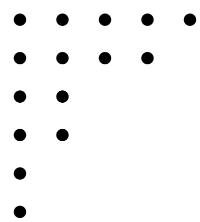
$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{(1 - q)(1 - q^2) \dots (1 - q^n)} \tag{2.2}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(1 - q)^2 (1 - q^2)^2 \dots (1 - q^n)^2}. \tag{2.3}$$

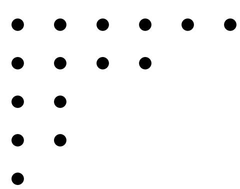
A equação (2.2) foi demonstrada pela primeira vez por Euler em [8], e pode ser generalizada via o Teorema q-Binomial encontrado em Andrews [2, 3, 5]. Enquanto que a equação (2.3) pode ser demonstrada com o uso de quadrados de Durfee, como feito em Andrews [4].

Definição 2.3. Um diagrama de Ferrers de uma partição $\lambda = \langle 1^{m_1} 2^{m_2} \ldots k^{m_k} \rangle$ de n é uma representação gráfica desta partição, onde cada parte i é representada como uma linha com i pontos.

Exemplo 2.4. A partição $\langle 1^2, 2^2, 4, 5 \rangle$ de 15 é representada, via o diagrama de Ferrers como a seguir.



Fazendo uso desta ferramenta gráfica[1] pode-se obter diversas identidades de partição, como em Pak [11] e Andrews [5, 2], bem como em Bressoud [6]. Esta ferramente será aplicada logo a seguir, mas antes é preciso definir uma operação num gráfico de Ferrers chamada de conjugação. A conjugação de um gráfico de Ferrers leva uma partição λ em λ' transformando a i-ésima linha do gráfico de Ferrers de λ da i-ésima coluna do gráfico de Ferrers do seu conjugado λ'. Por exemplo, a conjugação do gráfico de Ferrers do exemplo anterior é apresentado a seguir.



Neste caso, $\lambda' = \langle 1, 2^2, 4, 6 \rangle$.

Proposição 2.5. *O número de partições de n com no máximo k partes é igual ao número de partições de n cuja maior parte não supera k.*

Demonstração. Partindo de uma partição λ de n cujas partes são repetidas até k vezes, fazendo a conjugação no gráfico de Ferrers de λ levando em λ', é tal que o gráfico de λ' possui a primeira linha com no máximo k pontos. Como a operação de conjugação é inversível (bijetiva), segue o resultado. $\square$

[1] Mais resultados sobre o digrama de Ferrers podem ser encontrados em Comtet [7] e Propp [12].

Exemplo 2.6. Considere o caso $n = 10$ e $k = 2$, isto é, todas as partições de 10 com no máximo 2 partes: $A = \{\langle 10\rangle, \langle 1,9\rangle, \langle 2,8\rangle, \langle 3,7\rangle, \langle 4,6\rangle, \langle 5^2\rangle\}$. Se tomarmos, por exemplo, $\langle 4,6\rangle$, seu gráfico de Ferrers é:

$$\begin{array}{cccccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & \end{array}$$

Considerando a conjugação deste gráfico obtemos o seguinte gráfico de Ferrers que representa a partição $\langle 1^2, 2^4\rangle$.

$$\begin{array}{cc} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \\ \bullet & \\ \bullet & \end{array}$$

De modo que, cada partição $\lambda \in A$ está associada, via conjunção, a uma partição do conjunto $B = \{\langle 1^{10}\rangle, \langle 1^8, 2\rangle, \langle 1^6, 2^2\rangle, \langle 1^4, 2^3\rangle, \langle 1^2, 2^4\rangle, \langle 2^5\rangle\}$, das partições de 10 cuja maior parte não supera 2.

Vamos agora iniciar considerações acerca de funções simétricas. Primeiramente, funções simétricas não são funções em geral: são séries de potências em infinitas variáveis.

Definição 2.7. Uma função simétrica $f(x)$ é uma série de potências formais na variável $x = (x_1, x_2, \ldots)$ que é invariante via permutação nos seus subíndices de $x_1, x_2, \ldots$.

Por exemplo, $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots$ é uma função simétrica bem como

$$g(x) = \sum_{i \leq j} x_i x_j = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + x_1x_3 + \ldots,$$

enquanto a série de potências

$$l(x) = \sum_{i \leq j} x_i x_j^2,$$

não é uma função simétrica.

Uma das três classes de funções simétricas mais importantes é a das funções homogêneas completas, que são constituídas pela soma de todos os monômios distintos de grau n, dadas por:

$$h_n(x) = \sum_{i_1 \leq \cdots \leq i_n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n}.$$

Denote por Λ o anel das funções simétricas, e por Λ^n o espaço vetorial das funções simétricas homogêneas de grau n. É fato que o conjunto $\beta = \{h_\lambda | \lambda \vdash n\}$ é uma base para Λ^n, e deste modo, a dimensão deste espaço[2] é $p(n)$.

3 Demonstração do resultado principal

Para nossos propósitos, considere a variável $q' = (q_1, q_2, \ldots)$, onde $q_i = q^{i-1}$, para $q \in \mathbb{C}$ e $|q| < 1$. Assim, $h_n(q') = h_n(1, q, q^2, \ldots)$, de maneira que

$$h_n(q') = \sum_{i_1 \leq \cdots \leq i_n} q_{i_1} q_{i_2} \cdots q_{i_n} = 1 + q^1 + 2q^2 + 3q^3 + 5q^4 + \ldots$$

Lembrando que $q_{i_j} = q^{i_j - 1}$, em cada produto de termos iguais $(q_{i_j})^k = q^{k(i_j-1)}$, o expoente deste deve ser interpretado como a soma de k termos idênticos $(i_j - 1) + (i_j - 1) + \ldots + (i_j - 1)$, a fim de interpretar combinatorialmente a função $h_n(q')$. Como o produto do termo geral $q_{i_1} q_{i_2} \cdots q_{i_n}$ possui até n termos distintos, temos que:

$$h_n(q') = \sum_{i_1 \leq \cdots \leq i_n} q_{i_1} q_{i_2} \cdots q_{i_n} = 1 + q^1 + q^2 + q^{1+1} + q^3 + q^{2+1} + q^{1+1+1} + \ldots,$$

é a função geradora para partições de inteiros em até n partes.

Como vimos na proposição anterior, o número de partições do inteiro positivo k com no máximo n partes é igual ao número de partições de k cuja maior parte não supera n, concluímos que

$$h_n(q') = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - q^k}. \tag{3.1}$$

Lembrando que a série de Taylor de $\ln(1 - x)$ é dada por $\sum_{j=1}^{\infty} -\dfrac{x^j}{j}$. E que

$$\ln\left(\frac{1}{1 - q^k}\right) = -\ln(1 - q^k),$$

[2]Mais informações e as provas destes resultados estão disponíveis em Stanley [14] e Gessel [9].

segue que

$$\ln\left(\frac{1}{1-q^k}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{q^{kj}}{j}$$

De modo que, ao se aplicar o logaritmo na base e de ambos os lados da equação (3.1), temos:

$$ln(h_n(q')) = \sum_{k=1}^{n} ln\left(\frac{1}{1-q^k}\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{q^{kj}}{j},$$

E daí,

$$h_n(q') = exp\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{q^{kj}}{j}\right).$$

Considerando a expansão em série de Taylor da função exponencial, $exp(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^l}{l!}$, podemos escrever

$$h_n(q') = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{q^{kj}}{j}\right)^l}{l!},$$

o que demonstra o Teorema 1.1.

Referências

[1] Alegri, M. *Bijective Proofs Involving Chromatic Overpartitions*, Notes on Number Theory and Discrete Mathematics, vol 25, no1, 2019, 128-136.

[2] Andrews, G. E., *The Theory of Partitions, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications* RotaEditor, Vol. 2, G.-C., Addison-Wesley, Reading, 1976.

[3] Andrews, G. E., *Partitions identities*, Advances in Math. 9, 1972, 10–51.

[4] Andrews, G. E., *Partitions and Durfee dissection*, Amer. J. Math. 101, 1979, 735–742.

[5] Andrews, G. E., & Eriksson, K. (2004). *Integer Partitions*, Cambridge University Press.

[6] Bressoud, D. M. (1978). A new family of partition identities, *Pacific J. Math.*, 77, 71–74.

[7] Comtet, L., *Ferrers Diagrams* §2.4 in Advanced Combinatorics: The Art of Finite and Infinite Expansions, rev. enl. ed. Dordrecht, Netherlands: Reidel, pp. 98–102, 1974.

[8] Euler, L. *De partitione numerorum, Introductio in Analysin Infinitorum, Caput XVI* (1753), in: Leonardi Euleri Opera Omnia, A. Kratzer, F. Rudio (Eds.), Teubner, Leipzig, 1911.

[9] Gessel, I. M., *Enumerative Applications of Symmetric Functions*, Actes 17^e Séminare Lotharingien,5–21, 1987.

[10] MacMahon, P. A. Seventh Memoir on the Partition of Numbers: A Detailed Study of the Enumeration of the Partitions of Multipartite Numbers, *Phil. Trans. R. Soc. London* A CCXVII (1917), 81–113.

[11] Pak, I. (2006). Partition Bijections, a Survey, *Ramanujan Journal*, 12, 5–75.

[12] Propp, J., *Some Variants of Ferrers Diagrams* J. Combin. Th. A 52, 98–128, 1989.

[13] Slater, L.J., *Further Identities of the Rogers-Ramanujan Type*, Proceedings of the London Mathematical Society, 1952, 147-167.

[14] Stanley, R. P., *Enumerative Combinatorics*, vol.2, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[15] Schneider, R., Sills, A.V. (2019). *The Product of Partes or "Norm"of a Partition*, *arXiv*, 15p.

Submetido em 29 de Janeiro de 2020.
Aceito em 11 de Março de 2020.