

CICLOIDE E PARÁBOLA SEMICÚBICA: CURVAS EVOLUTAS COMO SOLUÇÕES DE PROBLEMAS DE DINÂMICA

Dulce Mary de Almeida

Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Matemática

dulce.almeida@ufu.br

Matheus Gonçalves Silva de Castro

Universidade Federal de Uberlândia, Instituto de Física

matheusg.s.castro@ufu.br

Resumo

O presente artigo procura estabelecer um elo entre algumas curvas diferenciáveis e alguns problemas físicos de dinâmica, isto é, questões sobre o movimento de partículas e de corpos sujeitos a forças com causas conhecidas. No processo, foram estudados: algumas propriedades da cicloide cuja evoluta é a cicloide original transladada, bem como a sua utilização na construção do denominado pêndulo de Huygens; uma característica geométrica da parábola semicúbica, a qual é evoluta da parábola, e uma propriedade dinâmica atrelada a essa mesma curva. Para tanto, empregou-se recursos próprios da geometria diferencial de curvas e, em acréscimo, apresentou-se interpretações físicas e/ou intuitivas acerca de alguns dos conceitos geométricos explorados no texto.

Abstract

The present paper seeks to establish a link between some differentiable curves and some physical problems of dynamics, that is, questions about the motion of particles and bodies subjected to forces with known causes. In the process, we studied: some properties of the cycloid whose evolute is the original cycloid translated, as well as its use in the construction of the so-called Huygens pendulum; a geometric characteristic of the semi-cubic parabola, which is parabola's evolute, and a dynamic property linked to that same curve. For this purpose, it was used its own resources of the differential geometry of curves and, in addition, physical and/or intuitive interpretations about some of the geometric concepts explored in the text were presented.

1 Introdução

A cicloide é uma curva rica em propriedades geométricas e físicas, as quais, historicamente, foram vastamente exploradas por inúmeros matemáticos. A pesquisa inicial

das propriedades dessa curva contribuíram, inclusive, com o desenvolvimento, ainda embrionário na época, de ferramentas do cálculo diferencial. Cabe enfatizar que, ao longo do tempo, questões ligadas a cicloide foram propostas, sob a configuração de problemas-desafios, por diferentes matemáticos. Por essas e por outras razões, a curva recebeu designações tais como “a Helena da Geometria”, “o pomo da discórdia”.

O matemático Johann Bernoulli (1667-1748) foi um dos responsáveis por explorar propriedades físicas atreladas à cicloide. Seu principal resultado a esse respeito foi a solução do problema da braquistócrona, o qual consistiu em dar resposta à seguinte pergunta: se dois pontos de um plano vertical estão situados a diferentes alturas e um não se encontra imediatamente abaixo do outro, qual trajetória ligando esses pontos satisfaz a condição de que uma partícula, ao descrevê-la sob influência de gravidade constante (sendo essa a única força tangente à trajetória em qualquer um de seus pontos), é percorrida no menor tempo possível?

Bernoulli demonstrou que tal trajetória deve ser um arco de cicloide adequadamente selecionado. Os métodos necessários a essa prova estão distantes da aplicação dos conceitos de geometria diferencial aqui estabelecidos. Por essa razão, não será apresentado o procedimento para a constatação da cicloide como solução do problema da braquistócrona. Contudo, uma outra característica da curva - sua isocronicidade -, a qual foi descoberta anteriormente à obtenção da braquistócrona, será verificada.

No intuito de investigar essa curva, inicialmente, definiu-se a cicloide e demonstrou-se a sua propriedade de isocronismo. Basicamente, isócrono, tal como aponta o dicionário Aurélio, significa “de duração igual: as pequenas oscilações de um pêndulo são isócronas”. Em suma, o princípio de isocronicidade da cicloide consiste no seguinte fato: uma partícula que descreve uma cicloide, em um campo gravitacional constante, atinge o ponto de menor potencial (menor altura) dessa curva, pela primeira vez, em um tempo que independe da posição em que é liberada com velocidade nula, desde que o princípio de conservação da energia mecânica seja verificado. Isso foi comprovado por meio do uso de equações próprias da dinâmica. Além disso, foi apresentada uma relação teórica entre o movimento cicloidal e o princípio atrelado ao funcionamento de um relógio de pêndulo.

Mais especificamente, uma vez verificada a isocronicidade da cicloide, foi demonstrado na sequência que a evoluta de uma cicloide é uma cicloide congruente à original e difere dessa apenas por um movimento de translação, e depois foi apresentada uma aplicação, teorizada por Huygens, dessas duas propriedades. O cientista Christiaan Huygens (1629-1695) foi o responsável pela invenção do relógio de pêndulo, o qual, como se pode deduzir da definição de isocrônico apresentada anteriormente, revela-se preciso para pequenas oscilações do seu pêndulo. Huygens propôs um mecanismo capaz de, em teoria e ao garantir-se que o pêndulo de um relógio execute suas oscilações sobre

uma cicloide, gerar oscilações isocrônicas. Esse mecanismo está ilustrado na Figura 5.

Quanto à parábola semicúbica, um interessante acontecimento foi a retificação (ou determinação do comprimento de arco) da parábola semicúbica; isso, originalmente, foi realizado por meios euclidianos, isto é, por meio de relações da geometria euclidiana plana. Heinrich van Heuraet, matemático holandês contemporâneo de Huygens, realizou esse feito em 1658, mas não antes do inglês William Neil (1637-1670) e nem depois do matemático amador Fermat. Contudo, os três obtiveram, independentemente e em um curto intervalo de tempo, esse mesmo resultado.

As publicações das técnicas de retificação propostas pelos três pensadores subjogaram um dogma cartesiano-peripatético (ou seja, uma crença devida ao movimento filosófico iniciado por Descartes e, também, à escola peripatética, um círculo filosófico da Grécia Antiga) da não-retificabilidade de curvas algébricas. Outra curiosidade é que esse trabalho foi o único, em matemática, a ser publicado por Fermat.

Também abundante em propriedades, a parábola semicúbica foi aqui apresentada como a evoluta da parábola, sendo que, como a cicloide, essa primeira curva exprime uma propriedade física, se também forem atendidas as condições de conservação da energia mecânica. Essencialmente, uma partícula que se move em um campo gravitacional uniforme sobre o traço de uma parábola semicúbica, ao partir do ponto de não-regularidade dessa curva com velocidade específica e determinável (dependente da aceleração gravitacional e da geometria do problema), desenvolve seu movimento com velocidade vertical constante - de maneira a realizar deslocamentos verticais de mesmo comprimento em períodos de tempo equivalentes.

Durante a leitura do texto, esses relatos históricos serão melhor esclarecidos. Ainda é preciso salientar que o descobrimento dessas curvas e de suas propriedades se inseriu em importantes momentos que, conjuntamente, integraram significativa parcela das histórias da física e da matemática. É por esse motivo que uma particular atenção foi atribuída à história da investigação de algumas das características dessas curvas por parte de destacados cientistas.

2 Preliminares

A seguir, são enunciados alguns resultados da teoria local de curvas planas diferenciáveis, baseados nas referências [4, 6], a fim de introduzir fundamentos teóricos que permitirão o estudo das curvas cicloide e parábola semicúbica, assim como a compreensão de suas propriedades físicas. Alguns importantes conceitos físicos, presentes em [1, 5], também serão explorados nesta seção.

Definição 2.1. Uma curva plana, diferenciável e regular é uma aplicação diferenciável

$\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida no intervalo aberto I e é tal que $\alpha'(t) \neq \vec{0}$ para todo $t \in I$. Também, designa-se t por parâmetro da curva e define-se o traço de α como o conjunto imagem da aplicação α , isto é, o traço de $\alpha = \{\alpha(t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in I\}$. Algumas vezes, por conveniência e quando não houver perigo de confusão, não será feita distinção entre a curva e o seu traço.

Ao longo do texto, em certas situações, será preciso reparametrizar algumas curvas com o intuito de facilitar os cálculos, processo definido e detalhado a seguir.

Definição 2.2. Dadas $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva plana, diferenciável e regular e $F: J \subset \mathbb{R} \rightarrow I \subset \mathbb{R}$, em que I e J são intervalos abertos de \mathbb{R} , uma função diferenciável com derivada não nula em seu domínio J e tal que $F(J) = I$, a composição $\beta = \alpha \circ F: J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva diferenciável e regular, com o mesmo traço de α , denominada uma reparametrização de α por F . A função F , por sua vez, é a mudança de parâmetro.

A partir de agora, salvo se houver afirmação em contrário, todos os subconjuntos reais considerados são intervalos abertos.

Definição 2.3. Se $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva plana, diferenciável e regular, a função $s: I \subset \mathbb{R} \rightarrow J \subset \mathbb{R}$ dada por

$$s_{t_0}(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(t)\| dt, \quad (2.1)$$

com $t \in I$, é dita função comprimento de arco de α a partir de t_0 .

A curvatura, o raio e o centro de curvatura de uma curva diferenciável são conceitos úteis também em mecânica, porém, neste artigo, irão, sobretudo, embasar investigações de natureza geométrica de algumas curvas estudadas.

Definição 2.4 ([6]). Seja $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva plana, diferenciável e regular. Assim, para $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, com $t \in I$, define-se: a curvatura $k(t)$, o raio de curvatura $R(t)$ e o centro de curvatura $C(t)$, de α em t , por:

$$k(t) = \frac{\langle \alpha''(t), (-y'(t), x'(t)) \rangle}{\|\alpha'(t)\|^3},$$

$$R(t) = \frac{1}{|k(t)|} \quad (k(t) \neq 0),$$

e

$$C(t) = \alpha(t) + \frac{\|\alpha'(t)\|^2}{\langle \alpha''(t), (-y'(t), x'(t)) \rangle} (-y'(t), x'(t)) \quad (k(t) \neq 0),$$

respectivamente.

Note-se, ainda, que

$$\frac{\|\alpha'(t)\|^2}{\langle \alpha''(t), (-y'(t), x'(t)) \rangle} (-y'(t), x'(t)) = \frac{1}{k(t)} n(t) \quad (k(t) \neq 0), \quad (2.2)$$

em que $k(t)$ é a curvatura e $n(t)$, vetor ortogonal à α em t , é tal que $\alpha'(t)/\|\alpha'(t)\|$ e $n(t)$, nessa ordem, formam base ortonormal positiva de \mathbb{R}^2 .

Uma curva regular $\alpha(t)$ com $k(t) \neq 0$, para todo t , possui uma curva associada - a curva dos centros de curvatura de α - definida como segue.

Definição 2.5. A evoluta de uma curva plana, diferenciável e regular $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, com $k(t) \neq 0$ para todo $t \in I$, é a curva percorrida pelo centro de curvatura dessa curva, definida por

$$\gamma(t) = \alpha(t) + \frac{1}{k(t)} n(t), \forall t \in I, \quad (2.3)$$

sendo $n(t)$ definida em (2.2).

Definição 2.6 ([6]). Seja $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva plana, diferenciável e regular. Uma involuta $\bar{\alpha}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ de α é uma curva que intercepta a reta tangente a α , em t , ortogonalmente, para todo $t \in I$.

Teorema 2.7 ([4]). *Seja $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva plana, diferenciável e regular. A curva $\bar{\alpha}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma involuta de α se, e somente se,*

$$\bar{\alpha}(t) = \alpha(t) + [s_\alpha(c) - s_\alpha(t)] \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}, \quad (2.4)$$

para alguma constante c , onde $t \mapsto s_\alpha(t)$ denota a função comprimento de arco de α a partir de um ponto $t_0 \in [a, b]$ arbitrário.

Observe-se que o Teorema 2.7 descreve uma família infinita de involutas de α a qual possui a seguinte interpretação geométrica para $s_\alpha(c)$ maior ou igual ao comprimento λ da curva e $t_0 = a$: considere-se um fio inextensível de comprimento C inicialmente sobreposto à curva α de maneira que a porção do fio que ultrapassa o comprimento da curva seja mantido retilíneo, na direção e no sentido do vetor tangente à curva em sua extremidade; se esse fio for desenrolado de tal modo que a parte desenrolada seja

mantida sempre esticada em direção tangente à curva e a outra permaneça sobre a curva, então, nesse movimento, a trajetória da extremidade livre do fio descreve uma involuta da curva. Diferentes involutas são obtidas variando o comprimento do fio ou escolhendo outro ponto $\alpha(t_0)$, com $t_0 \in (a, b)$, para fixação do fio.

Em um instante ulterior, será obtida uma involuta de um arco de cicloide, bem como será demonstrado que a parábola semicúbica é a evoluta da parábola. Para isso, primeiro, é necessário explicitar a relação existente entre uma curva e suas involutas: a evoluta de todas as involutas de uma curva diferenciável é a curva original.

Proposição 2.8 ([6]). *Se $\bar{\alpha}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma involuta de $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, então, α é uma evoluta de $\bar{\alpha}$.*

As definições, as proposições e os teoremas até aqui apresentados podem ser encontrados (com suas respectivas demonstrações e/ou justificativas) em [4, 6].

Definição 2.9 ([5]). Se $\alpha(t)$ é uma curva plana, diferenciável e regular, cujo parâmetro t é o tempo e se o traço dessa curva representa a trajetória descrita por uma partícula em \mathbb{R}^2 , a sua velocidade e a sua aceleração vetoriais e escalares são definidas como seguem:

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\alpha(t + \Delta t) - \alpha(t)}{\Delta t} = \frac{d\alpha}{dt}(t), \\ v(t) &= \left\| \vec{v}(t) \right\|, \\ \vec{a}(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}(t) = \frac{d^2\alpha}{dt^2}(t), \\ a(t) &= \left\| \vec{a}(t) \right\|.\end{aligned}$$

Dadas as definições de velocidade e aceleração, é possível enunciar e demonstrar um teorema de grande relevância no estudo de dinâmicas físicas conservativas em campos gravitacionais constantes ao longo de um plano. Genericamente, esse resultado abrange os casos de campos vetoriais constantes planares, ou ainda, se ajustado for o enunciado do teorema (sem que isso implique em modificação da prova realizada), os casos de campos vetoriais conservativos do espaço, isto é, campos vetoriais de \mathbb{R}^3 que podem ser expressos como gradiente de função real.

Teorema 2.10 (Teorema de Conservação da Energia Mecânica). *Sejam $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva plana, diferenciável e regular; \vec{a} vetor aceleração definido, pertencendo a \mathbb{R}^2 , sobre o traço de $\alpha(t) = (x(t), y(t))$; \vec{v} um campo diferenciável qualquer definido sobre um aberto de \mathbb{R}^2 que contenha $\alpha(t)$ satisfazendo a Definição 2.9 sobre o traço de $\alpha(t)$;*

$\nabla\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o campo vetorial constante definido por $\nabla\Phi: (x, y) \rightarrow (0, -mg)$ (em que g é o valor da aceleração gravitacional e m é a massa da partícula) e satisfazendo $\nabla\Phi(x(t), y(t)) + m\vec{a}_n(t) = m\vec{a}(t)$, onde $\vec{a}_n(t)$ é normal a $\alpha(t)$ para todo $t \in I$. Nesse caso, se a energia mecânica de um dado sistema é

$$E_M(t) = \frac{mv^2(t)}{2} - \Phi(x(t), y(t)),$$

então, a variação, entre $\alpha(t_0)$ e $\alpha(t)$, da energia mecânica associada a uma partícula cuja trajetória é o traço de $\alpha(t)$ será

$$\Delta E_M(t) = \frac{m(v^2(t) - v^2(t_0))}{2} - [\Phi(x(t), y(t)) - \Phi(x(t_0), y(t_0))] = 0,$$

$\forall t, t_0 \in I$.

Demonstração: Pela Definição 2.9,

$$\frac{d\alpha}{dt}(t) = \vec{v}(t)$$

e

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}(t),$$

de modo que:

$$\left\langle \vec{a}(t), \frac{d\alpha}{dt}(t) \right\rangle = \left\langle \frac{d\vec{v}}{dt}(t), \vec{v}(t) \right\rangle.$$

Logo,

$$\int_{t_0}^t \left\langle \vec{a}(t), \frac{d\alpha}{dt}(t) \right\rangle dt = \int_{t_0}^t \left\langle \frac{d\vec{v}}{dt}(t), \vec{v}(t) \right\rangle dt. \quad (2.5)$$

Por um lado,

$$\int_{t_0}^t \left\langle \vec{a}(t), \frac{d\alpha}{dt}(t) \right\rangle dt = \int_{t_0}^t \left\langle \frac{\nabla\Phi(x(t), y(t))}{m} + \vec{a}_n(t), \frac{d\alpha}{dt}(t) \right\rangle dt,$$

de maneira que

$$\int_{t_0}^t \left\langle \vec{a}(t), \frac{d\alpha}{dt}(t) \right\rangle dt = \int_{t_0}^t \left\langle \frac{\nabla\Phi(x(t), y(t))}{m}, \frac{d\alpha}{dt}(t) \right\rangle dt. \quad (2.6)$$

Por outro lado,

$$\frac{d}{dt} \langle \vec{v}(t), \vec{v}(t) \rangle = 2 \left\langle \frac{d\vec{v}}{dt}(t), \vec{v}(t) \right\rangle,$$

e, assim,

$$\left\langle \frac{d\vec{v}}{dt}(t), \vec{v}(t) \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt}(t). \quad (2.7)$$

Substituindo (2.6) e (2.7) em (2.5), resulta:

$$\int_{t_0}^t \left\langle \frac{\nabla \Phi(x(t), y(t))}{m}, \frac{d\alpha}{dt}(t) \right\rangle dt = \int_{t_0}^t \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt}(t) dt.$$

Mas, como

$$\int_{t_0}^t \left\langle \frac{\nabla \Phi(x(t), y(t))}{m}, \frac{d\alpha}{dt}(t) \right\rangle dt = \frac{\Phi(x(t), y(t)) - \Phi(x(t_0), y(t_0))}{m}$$

e

$$\int_{t_0}^t \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt}(t) dt = \frac{v^2(t) - v^2(t_0)}{2},$$

decorre que

$$\frac{\Phi(x(t), y(t)) - \Phi(x(t_0), y(t_0))}{m} = \frac{v^2(t) - v^2(t_0)}{2}.$$

Finalmente,

$$\frac{m(v^2(t) - v^2(t_0))}{2} - [\Phi(x(t), y(t)) - \Phi(x(t_0), y(t_0))] = 0$$

e, por conseguinte:

$$\Delta E_M(t) = \frac{m(v^2(t) - v^2(t_0))}{2} - [\Phi(x(t), y(t)) - \Phi(x(t_0), y(t_0))] = 0.$$

■

O corolário exibido e provado na sequência fornece um resultado a ser empregado no texto subsequente.

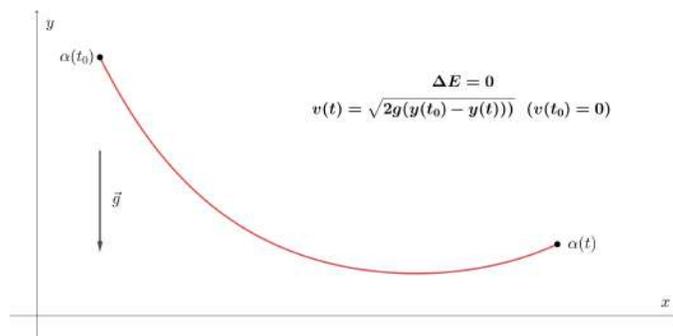


Figura 1: Representação Diagramática da Conservação da Energia Mecânica.

Corolário 2.11. *A velocidade de uma partícula que se move sobre o traço de uma curva plana, diferenciável e regular $\alpha(t) = (x(t), y(t)), t \in I$ após ser solta, em condição de repouso, sobre $\alpha(t_0)$ e no interior do campo gravitacional uniforme $\nabla\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definido por $\nabla\Phi(x, y) = (0, -mg)$, se a gravidade é a única força a realizar trabalho, é:*

$$v(t) = \sqrt{2g(y(t_0) - y(t))}. \quad (2.8)$$

Demonstração: Pelo Teorema 2.10, $\Delta E_M \equiv 0$, ou seja:

$$\Phi(x(t), y(t)) - \Phi(x(t_0), y(t_0)) = \frac{m(v^2(t) - v^2(t_0))}{2}, \forall t \in I.$$

Mas $v^2(t) - v^2(t_0) = v^2(t)$ para uma partícula solta em repouso sobre $\alpha(t_0)$ e $\Phi(x(t), y(t)) = -mgy(t) + C$, para C constante real. Assim,

$$v(t) = \sqrt{2g(y(t_0) - y(t))}. \quad \blacksquare$$

3 A Cicloide

Nesta seção, será demonstrado que a curva cicloide é isocrônica, conceito a ser precisado posteriormente. Antes, contudo, será obtida uma parametrização da cicloide a partir de sua definição em termos geométricos.

Definição 3.1. A curva cicloide corresponde à trajetória descrita por um ponto P de uma circunferência quando essa rola, sem deslizar, sobre uma reta.

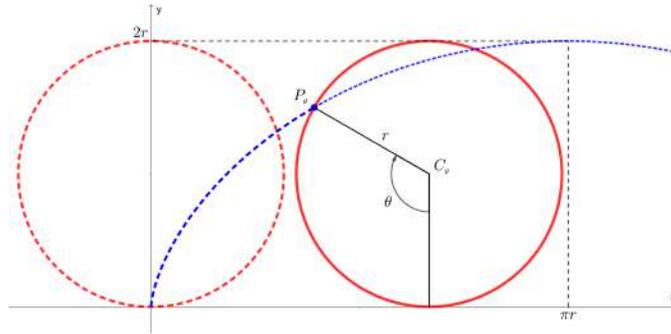


Figura 2: Arco de cicloide gerado pela trajetória de um ponto da circunferência de raio r quando essa rola, sem deslizar, sobre o eixo das abscissas a partir da origem.

A fim de representar a cicloide por meio de equações paramétricas, suponha que a circunferência rolante possui raio r e, sem perda de generalidade, fixe um sistema de coordenadas cartesiano para \mathbb{R}^2 , de modo que a circunferência role sobre o eixo das abscissas, no sentido positivo, iniciando o movimento com centro no ponto $C_0 = (0, r)$ e com P em posição inicial coincidente com a origem do sistema de coordenadas. Sob essas condições, serão determinadas as coordenadas da posição, denotada por P_θ , do ponto P em função do parâmetro θ , sendo θ a medida, em radianos, do ângulo rotacionado pela circunferência durante o movimento de rolamento.

Observe-se que as coordenadas do centro da circunferência após uma translação de $r\theta$ (simultânea a uma rotação de θ radianos) são $C_\theta = (r\theta, r)$, visto que a sua posição vertical é invariante e que o rolamento ocorre no sentido de crescimento das abscissas. Além disso, como P_θ é um ponto da circunferência de centro C_θ e raio r ,

$$P_\theta = C_\theta + (r \cos(t), r \sin(t)) = (r(\theta + \cos(t)), r(1 + \sin(t))), \quad (3.1)$$

sendo t a medida, em radianos, do ângulo, no sentido anti-horário, que o vetor com origem no ponto C_θ e extremidade em P_θ faz com a semirreta com origem em C_θ , direção e sentido determinados pelo vetor $(1, 0)$. A fim de escrever t em função de θ (ver Figura 3), note-se que

$$t + \theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,$$

na qual, $k \in \mathbb{N}^*$ é o número de rotações completadas pela circunferência rolante.

Desse modo,

$$\cos(t) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi - \theta\right) = -\sin(\theta) \quad (3.2)$$

$$\sin(t) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi - \theta\right) = -\cos(\theta). \quad (3.3)$$

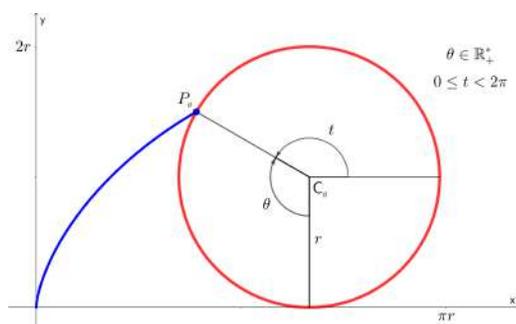


Figura 3: Representação gráfica do parâmetro θ e do ângulo t .

Portanto, de (3.1), de (3.2) e de (3.3), resulta a seguinte parametrização para a cicloide:

$$P_\theta = (r(\theta - \text{sen}(\theta)), r(1 - \text{cos}(\theta))), \quad (3.4)$$

na qual, por conta do procedimento adotado para o equacionamento de P_θ , $\theta \geq 0$. Todavia, utilizando o fato de que a cicloide apresenta periodicidade e adotando o eixo y como eixo de simetria da curva cicloide tal como definida anteriormente, a parametrização (3.4) se estende para todo $\theta \in \mathbb{R}$.

3.1 Isocronicidade

A fim de abordar o problema do isocronismo da cicloide, é preciso considerar um arco de cicloide invertido α , de modo que seu ponto de máximo em $[0, \pi]$ torne-se ponto de mínimo potencial (local de menor altura, se a altura é adotada como crescente no sentido de crescimento das ordenadas). Isso pode ser obtido utilizando-se a equação (3.4), fixando-se a função $x(\theta)$ e modificando-se a função $y(\theta)$ por meio de uma reflexão sobre o eixo x seguida de uma translação dada pelo acréscimo de $2r$ unidades à ordenada;

$$\alpha(\theta) = (x(\theta), 2r - y(\theta)) = (r(\theta - \text{sen}(\theta)), r(1 + \text{cos}(\theta))),$$

a qual tem seu traço representado na Figura 4.

Dada a definição dicionarizada de isócrono e obtida a cicloide invertida α , pode-se enunciar e demonstrar um teorema a respeito da isocronicidade da curva cicloide.

Teorema 3.2 (Isocronicidade da Cicloide). *Se uma partícula é solta sobre o arco da cicloide invertida*

$$\alpha(\theta) = (r(\theta - \text{sen}(\theta)), r(1 + \text{cos}(\theta))), \quad \theta \in [0, \pi], \quad (3.5)$$

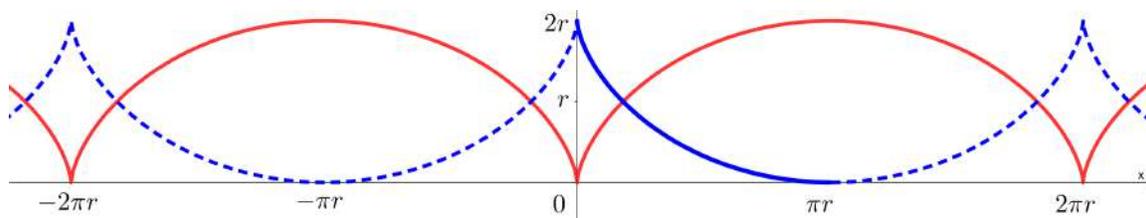


Figura 4: A curva P_θ encontra-se em linha contínua e vermelha, a curva $\alpha(\theta)$ aparece tracejada e, em linha contínua e azul, está representada a restrição de α ao intervalo $[0, \pi]$.

em um ponto qualquer $\alpha(\theta_0)$; a única aceleração com componente tangente a $\alpha(\theta) = (x(\theta), y(\theta))$ não nula for $\vec{a}(\theta) = (0, -g)$, sendo g a aceleração gravitacional constante; a partícula partir do repouso, isto é, $\vec{v}(\theta_0) = \vec{0}$. Então, o intervalo de tempo $T(\pi) - T(\theta_0)$ que transcorrerá entre a soltura da partícula e o instante em que essa atinge $\alpha(\pi)$ será de

$$\pi \sqrt{\frac{r}{g}}$$

para todo $\theta_0 \in [0, \pi)$.

Portanto, o valor de $T(\pi) - T(\theta_0)$ independe do ponto de soltura $\alpha(\theta_0)$, é função de r e envolve o parâmetro g , isto é, depende apenas da geometria do problema - configuração da cicloide - e da aceleração gravitacional.

Demonstração: Na determinação do período de tempo $T(\pi) - T(\theta_0)$, necessário para que a partícula solta em $\alpha(\theta_0)$ (com $0 \leq \theta_0 < \pi$), a partir do repouso ($\vec{v}(t_0) = \vec{0}$), atinja $\alpha(\pi)$, procede-se da maneira abaixo.

1. Encontra-se a expressão que permite o cálculo do período de tempo transcorrido no deslocamento da partícula, a qual pode ser obtida por meio da Definição 2.9:

$$\vec{v}(t) = \frac{d(\alpha \circ h)}{dt}(t),$$

na qual, a mudança de parâmetro de θ para t , dada por $h(t) = \theta$, é tal que $h(0) = \theta_0$ e tal que t é o tempo. Assim,

$$v(t) = \|(\alpha \circ h)'(t)\|, \quad (3.6)$$

Solucionando, então, a equação diferencial ordinária (3.6), obtém-se o seguinte resultado (oriundo da cinemática escalar):

$$t - t_0 = \int_{t_0}^t \frac{\|(\alpha \circ h)'(t)\|}{v(t)} dt,$$

a qual pode ser reescrita, pela regra da cadeia, da seguinte maneira:

$$t - t_0 = \int_{t_0}^t \frac{\|\alpha'(h(t))\| h'(t)}{v(t)} dt, \quad (3.7)$$

uma vez que $h(t) = \theta$ é sempre crescente.

Realizando, agora, a mudança de variáveis $h(t) = \theta$ resulta

$$h^{-1}(\theta) - h^{-1}(\theta_0) = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\|\alpha'(\theta)\|}{v(h^{-1}(\theta))} d\theta.$$

Então, adotando $h^{-1}(\theta) = T(\theta)$ e $v(h^{-1}(\theta)) = V(\theta)$, a equação anterior fica

$$T(\theta) - T(\theta_0) = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\|\alpha'(\theta)\|}{V(\theta)} d\theta.$$

Uma vez que

$$\alpha'(\theta) = (r(1 - \cos(\theta)), -r\text{sen}(\theta)),$$

obtém-se

$$T(\theta) - T(\theta_0) = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\sqrt{[r(1 - \cos(\theta))]^2 + [-r\text{sen}(\theta)]^2}}{V(\theta)} d\theta$$

e, desse modo,

$$T(\theta) - T(\theta_0) = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{2r\text{sen}(\theta/2)}{V(\theta)} d\theta,$$

para $\theta_0 \in [0, \pi)$ fixo.

2. Nas condições estabelecidas, tal como expresso pelo Corolário 2.11, é vero, ainda, que a velocidade $V(\theta)$ da partícula a qual se move sobre o traço de α , ao estar na posição $\alpha(\theta) = (x(\theta), y(\theta))$, pode ser descrita como:

$$V(\theta) = \sqrt{2g(y(\theta_0) - y(\theta))}.$$

Para $\theta_0 \in [0, \pi)$ arbitrário e θ fixado assim como exige o enunciado do Teorema de Isocronicidade da Cicloide ($\theta = \pi$), de (i) e (ii) decorre que:

$$T(\pi) - T(\theta_0) = r\sqrt{\frac{2}{g}} \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{\text{sen}(\theta/2)}{\sqrt{y(\theta_0) - y(\theta)}} d\theta.$$

Como $y(\theta) = r(1 + \cos(\theta))$, obtém-se, então,

$$T(\pi) - T(\theta_0) = \frac{1}{\cos(\theta_0/2)} \sqrt{\frac{r}{g}} \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{\text{sen}(\theta/2)}{\sqrt{1 - \frac{(\cos(\theta/2))^2}{(\cos(\theta_0/2))^2}}} d\theta. \quad (3.8)$$

Fazendo a substituição trigonométrica

$$\cos(\varphi) = \frac{\cos(\theta/2)}{\cos(\theta_0/2)}$$

em (3.8), obtém-se:

$$T(\pi) - T(\theta_0) = 2\sqrt{\frac{r}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = 2\sqrt{\frac{r}{g}} \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

■

Mostramos que o tempo despendido por uma partícula solta em repouso sobre a cicloide, desde que em um ponto de não equilíbrio e em campo gravitacional constante, para atingir, pela primeira vez, o ponto de mínimo de $y(\theta)$ é constante e igual a

$$\pi\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

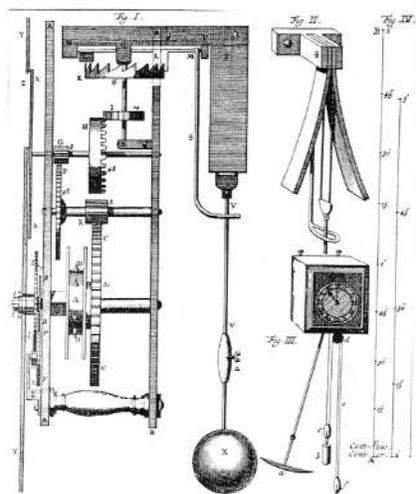


Figura 5: Relógio de Pêndulo de Huygens. Imagem extraída de [2].

3.2 O Relógio de Pêndulo de Huygens

Dentre a vasta contribuição de Huygens para a matemática, destaca-se o trabalho do autor sobre evolutas e evolventes. Esta última consistiu na designação atribuída por Huygens às curvas atualmente conhecidas como involutas. Em seu trabalho, Huygens encontrou evolutas da parábola e da cicloide. Mais adiante, será visto como os conceitos até agora apresentados se inter-relacionam. Essencialmente, Huygens aplicou sua teoria de evolutas e evolventes ao problema de medição do tempo.

Em suma, Huygens determinou uma condição que, ao ser satisfeita, implicaria oscilações de mesmo período de tempo para qualquer amplitude de movimento de um pêndulo. Contraponha-se essa descrição às pequenas oscilações que precisam ser impostas a pêndulos convencionais, no intuito de garantir, ao relógio de pêndulo em questão, isocronicidade - princípio indispensável a um dispositivo de medição de tempo -, e ficará evidente o significado da proposta de Huygens.

Nesse sentido, faz-se necessário apresentar algumas outras propriedades de curvas diferenciáveis e, em particular, uma da cicloide, o que se fará na sequência. Além disso, para um maior detalhamento dos fatos históricos ligados ao estudo da cicloide, recomenda-se uma consulta às referências [2, 3].

Primeiramente, na intenção de entender a relação entre o isocronismo da cicloide e relógios de pêndulo, é necessário descrever, simplificada, o funcionamento do aparato proposto por Huygens. Basicamente, um relógio de pêndulo possui seu funcionamento atrelado às oscilações executadas por uma massa presa à extremidade inferior

de um fio inextensível suspenso.

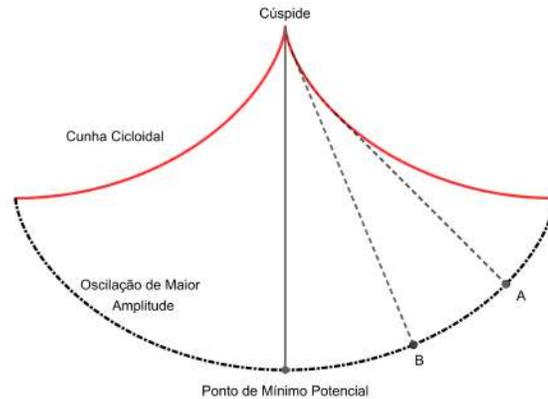


Figura 6: Esboço do pêndulo cicloidal de Huygens.

Se o fio de um pêndulo for afixado sobre uma cúspide (ponto não-regular) de um arco da curva cicloide invertida $\alpha(\theta)$ - obtida em (3.5) e que pode ser vista na Figura 6 -, de modo tal que, ao oscilar, o fio, inicialmente, enrole-se sobre a cunha cicloidal, permanecendo sobreposto à cicloide na porção já enrolada (e, em um instante posterior, por se desenrolar) e a extensão ainda por enrolar (e, posteriormente, já desenrolada) permaneça esticada e retilínea na direção tangente à cicloide no ponto que divide as duas porções do fio: aquela em contato com a cicloide e a outra, em movimento; então, suas oscilações serão, sob condições ideais - sem atrito ou resistência do ar -, isocrônicas. Essa foi a percepção tida por Huygens e que motivou essa subsecção.

Tendo em vista a justificativa teórica desse mecanismo, agora, será equacionada a dinâmica desse sistema. Para tanto, considere-se a curva $\alpha: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, cujo traço coincidirá com uma cicloide análoga àquela que pode ser vista na Figura 6.

Para determinar a trajetória descrita por um pêndulo afixado da maneira proposta por Huygens, é preciso, primeiro, considerar o comprimento do fio que irá compor o mecanismo. A equação (2.1), quando resolvida a integral, conduz à seguinte função de comprimento da curva $\alpha(\theta)$ a partir do ponto $\theta_0 = 0$:

$$S(\theta) = s_0(\theta) = 4r \left(1 - \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \right). \quad (3.9)$$

A partir dessa equação, conclui-se que o comprimento de arco de $\alpha(\theta)$ restrita ao intervalo $L = [0, \pi]$ é $4r$, de modo que este será o comprimento do fio do pêndulo que será levada em consideração nos cálculos a seguir. É importante perceber, ainda, que α é simétrica em relação ao eixo y . Dessa maneira, ao obter o movimento do pêndulo que

ocorre para valores positivos de θ , será possível, por meio de reflexão sobre o eixo y , descrever o movimento do pêndulo por inteiro.

Já estipulado o comprimento do fio, resta obter a trajetória que o pêndulo executará quando solto de maneira que sua extremidade fixa esteja sobre $(0, 2r)$ e que sua extremidade livre e presa a um corpo situe-se sobre $(\pi r, 0)$. Para tanto, deve-se garantir, ainda, a coincidência do fio com o arco da curva α restrita a L , como condição inicial do movimento. Perceba-se que esse será o deslocamento de maior amplitude possível realizado pelo pêndulo e que qualquer outra trajetória descrita pela extremidade livre do pêndulo nas já expressas condições e iniciando-se em qualquer outro ponto estará contida na trajetória de maior amplitude - a qual os cálculos a seguir visam determinar.

Ao se desenrolar, a porção retilínea do fio (sempre esticado por conta da força peso agindo sobre a massa afixada) será tangente a α em θ se, e somente se, $\alpha(\theta)$ for o ponto que separa o fio enrolado sobre α daquele desenrolado, conforme argumentado anteriormente. Além disso, a porção desenrolada apresentará comprimento

$$\lambda(\theta) = 4r - S(\theta),$$

pois $4r$ é a medida de toda a extensão do fio e $S(\theta)$ é o comprimento da parte ainda situada sobre a cicloide, razão, pela qual, de (3.9) resulta o comprimento

$$\lambda(\theta) = 4r \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad (3.10)$$

necessário aos próximos equacionamentos; a direção tangente à $\alpha(\theta)$ é dada pelo versor $\tau(\theta)$ definido por

$$\tau(\theta) = \frac{\alpha'(\theta)}{\|\alpha'(\theta)\|} = \left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right), -\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right). \quad (3.11)$$

Por fim, tendo em vista das equações (3.5), (3.10) e (3.11), a trajetória descrita pela extremidade livre do pêndulo será dada pela curva $\bar{\alpha}$, equacionada do seguinte modo:

$$\bar{\alpha}(\theta) = \alpha(\theta) + \lambda(\theta)\tau(\theta). \quad (3.12)$$

Realizando as respectivas substituições, obtém-se:

$$\bar{\alpha}(\theta) = (r(\theta - \sin(\theta)), r(1 + \cos(\theta))) + 4r \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right), -\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right),$$

$$\bar{\alpha}(\theta) = (r(\theta + \sin(\theta)), -r(1 + \cos(\theta))).$$

Como dito em parágrafo anterior, por motivo de simetria de $\alpha(\theta)$ em relação ao eixo y , pode-se adotar $\bar{\alpha}(\theta)$ definida para $\theta \in [-\pi, \pi]$ (em lugar do domínio $[0, \pi]$, estipulado inicialmente), afinal, para $\bar{\alpha}(\theta) = (x(\theta), y(\theta))$,

$$x(\theta) = r(\theta + \text{sen}(\theta)) = -r((-\theta) + \text{sen}(-\theta)) = -x(-\theta)$$

e

$$y(\theta) = -r(1 + \cos(\theta)) = -r(1 + \cos(-\theta)) = y(-\theta).$$

É ainda correto dizer que, para $\theta \in [-\pi, \pi]$, $\bar{\alpha}(\theta)$ é congruente a $\alpha(\theta + \pi)$, pois, se $\tilde{\gamma}$ for a translação de $\bar{\alpha}$ pelo vetor $(\pi r, 2r)$, o traço de $\tilde{\gamma}$ coincidirá com o de $\alpha(\theta + \pi)$:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}(\theta) + (\pi r, 2r) &= (r((\theta + \pi) + \text{sen}(\theta)), r(1 - \cos(\theta))) \\ &= (r((\theta + \pi) - \text{sen}(\theta + \pi)), r(1 - \cos(\theta + \pi))), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\bar{\alpha}(\theta) + (\pi r, 2r) = \alpha(\theta + \pi), \quad -\pi \leq \theta \leq \pi. \quad (3.13)$$

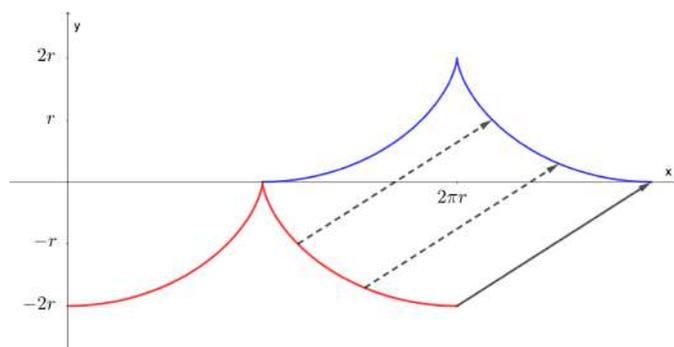


Figura 7: Representação das curvas $\bar{\alpha}(\theta)$ em linha vermelha e $\alpha(\theta + \pi)$ em linha azul, juntamente com alguns representantes do vetor $(\pi r, 2r)$.

Note-se que $\bar{\alpha}(\theta)$, pelo Teorema 2.7, é uma involuta da cicloide invertida $\alpha(\theta)$, ou seja, que $\langle \alpha'(\theta), \bar{\alpha}'(\theta) \rangle = 0$, para todo $\theta \in [-\pi, \pi]$, uma vez que a equação (3.12) é, precisamente, a equação (2.4). Tal constatação é importante pela seguinte razão: as forças atuantes sobre a massa presa na extremidade livre do pêndulo são duas (gravidade constante e tração exercida pela corda afixada), de maneira que, para validar as hipóteses assumidas na demonstração do Teorema 3.2 (o qual estabelece condições que garantem a isocronicidade de um movimento realizado sobre um arco cicloidal), é preciso garantir que a tração exercida pelo fio em $\bar{\alpha}$ - devida ao tencionamento da corda

e cuja direção coincide com $\alpha'(\theta)$ - é perpendicular à trajetória $\bar{\alpha}'(\theta)$, o que, de fato, ocorre.

Desse modo, a extremidade livre do pêndulo de Huygens move-se sobre $\bar{\alpha}(\theta)$ e, sob gravidade constante, esse movimento é isocrônico, por conta da equação (3.13) (a qual garante ser $\bar{\alpha}$ uma translação da cicloide invertida α) juntamente com o Teorema 3.2. Portanto, o pêndulo teorizado por Huygens é isocrônico.

Observe-se, ainda, que, na apresentação do mecanismo de funcionamento do pêndulo de Huygens, a extremidade livre do pêndulo movia-se de modo a satisfazer a equação (2.4), para $s_\alpha(c)$ (expressando o comprimento do fio do pêndulo) igual ao comprimento λ da curva α restrita a $[0, \pi]$ e $\theta_0 = 0$.

Finalmente, após ser visto que a trajetória da extremidade do pêndulo consiste numa involuta da cicloide α e ser considerada a Proposição 2.8, convém destacar que foi demonstrado acima o seguinte resultado.

Proposição 3.3. *A evoluta da cicloide é uma cicloide que lhe é congruente e que difere dessa apenas por uma translação.*

4 A Parábola Semicúbica

A parábola semicúbica, à semelhança da cicloide, apresenta duas propriedades a serem apresentadas - uma física e outra geométrica. De um lado, o problema físico diz respeito ao movimento bidimensional de um corpo o qual, sob a aceleração gravitacional constante e sob todas as demais acelerações perpendiculares ao seu movimento, preserva sua velocidade vertical. Por outro lado, em vez de definir a parábola semicúbica como feito para a cicloide, isto é, a partir de uma propriedade, define-se, nessa investigação, a parábola semicúbica a partir do vínculo geométrico que possui com a parábola, as quais podem ser vistas na Figura 8.

Definição 4.1. A parábola semicúbica é a evoluta da parábola, ou seja, a curva cujos pontos são centros de curvatura da parábola em pontos que lhes sejam correspondentes.

A relação entre a parábola semicúbica e a parábola foi percebida, como mencionado em um momento anterior, por Huygens, quando, ao aplicar a sua teoria de evolutas, o cientista determinou a evoluta da parábola

4.1 Determinando Sua Equação Paramétrica

Seja a parábola genérica

$$\alpha(p) = (p, -ap^2), p \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}_+^*. \quad (4.1)$$

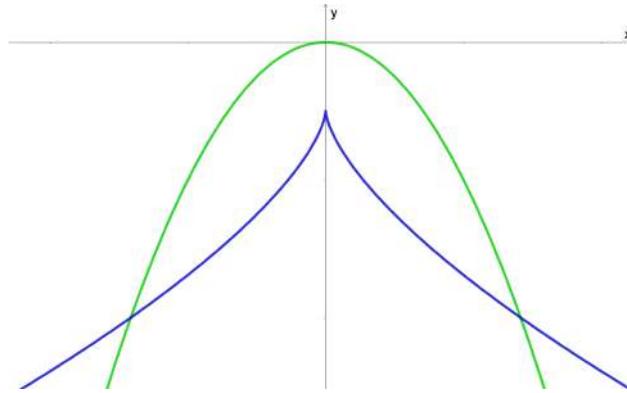


Figura 8: *Parábola (em verde) e sua respectiva evoluta: a parábola semicúbica (em azul).*

Determina-se o seu centro de curvatura $\overline{C}(p)$ da seguinte maneira:

1. obtém-se o versor do vetor tangente a α em p ,

$$\frac{\alpha'(p)}{\|\alpha'(p)\|} = \frac{(1, -2ap)}{\sqrt{1 + 4a^2p^2}}$$

e, então, o versor do vetor que lhe é normal e que seja direcionado ao centro de curvatura da curva α em p , $N(p)$,

$$N(p) = \frac{(-2ap, -1)}{\sqrt{1 + 4a^2p^2}}. \quad (4.2)$$

Em seguida, calcula-se o raio de curvatura de α em p , $R(p)$, definido por

$$R(p) = \frac{\|\alpha'(p)\|^2}{\langle \alpha''(p), N(p) \rangle},$$

em que $\alpha'(p) = (1, -2ap)$:

$$R(p) = \frac{(1 + 4a^2p^2)^{\frac{3}{2}}}{2a}; \quad (4.3)$$

2. por intermédio de (4.1), de (4.2) e de (4.3), determina-se $\overline{C}(p)$, a qual pode ser

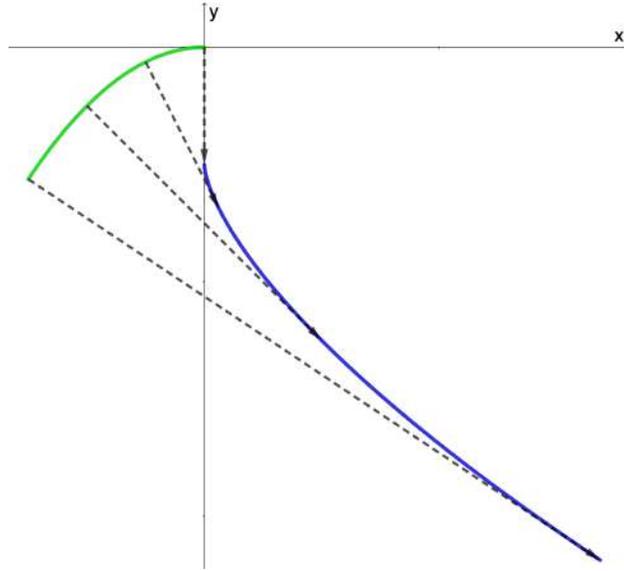


Figura 9: Um arco de parábola, sua evoluta e alguns vetores com origem na parábola representantes do seu centro de curvatura.

vista, ilustrativamente, na Figura 9:

$$\begin{aligned}\bar{C}(p) &= \alpha(p) + R(p)N(p) \\ &= (p, -ap^2) + \frac{(1 + 4a^2p^2)^{3/2}}{2a} \frac{(-2ap, -1)}{\sqrt{1 + 4a^2p^2}} \\ &= \left(-4a^2p^3, -3ap^2 - \frac{1}{2a} \right); \end{aligned}$$

3. agora, seja $C(p)$ a seguinte translação de $\bar{C}(p)$ (parábola semicúbica):

$$C(p) = (-4a^2p^3, -3ap^2),$$

a qual, convenientemente para os próximos cálculos, é tal que $C(0)$ coincide com a origem do plano xy .

4.2 Particularidade Mecânica

Agora, após a obtenção do equacionamento da parábola semicúbica, será delineada a propriedade mecânica dessa curva.

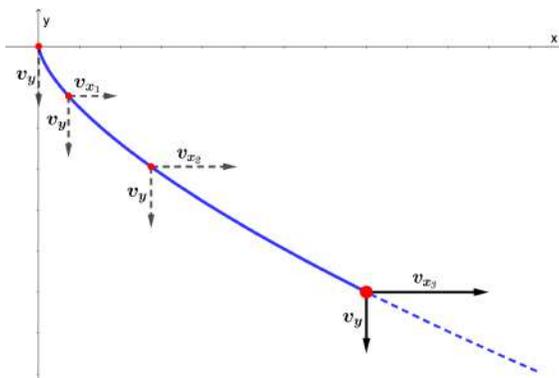


Figura 10: Ilustração do movimento de uma partícula sobre o traço da parábola semicúbica em campo gravitacional uniforme e com conservação da energia mecânica.

Proposição 4.2. *Existe velocidade (a qual é única) de soltura de uma partícula sobre o ponto não-regular do traço da parábola semicúbica $C(p) = (-4a^2p^3, -3ap^2)$, em campo gravitacional uniforme, de maneira que sua velocidade vertical mantenha-se constante ao longo do movimento que será descrito sobre o traço de $C(p)$.*

Demonstração: Considere a mudança de parâmetro de p para o tempo t , definida por $k(t) = p$ e tal que $k(t_0) = p_0$. Então, segundo a Definição 2.9, as velocidades vetorial e escalar da partícula são, respectivamente, $\vec{v}(t) = \frac{d(C \circ k)}{dt}(t)$ e $v(t) = \|(C \circ k)'(t)\|$. Denote $\vec{v}(k^{-1}(p)) = \vec{V}(p)$, $v(k^{-1}(p)) = V(p)$ e $(C \circ k)(t) = (X(k(t)), Y(k(t))) = (x(t), y(t))$. Assim sendo, obtém-se a velocidade da partícula, em função de sua posição vertical, por meio do Teorema de Conservação da Energia Mecânica (Teorema 2.10, o qual precisa ser satisfeito nas condições impostas):

$$\frac{m(V^2(p) - V_0^2)}{2} = mg(Y(p_0) - Y(p))$$

(com $V_0 = V(p_0)$), a partir do qual,

$$V^2(p) = 6ga(p^2 - p_0^2) + V_0^2, \quad (4.4)$$

onde se utiliza que $Y(p) = -3ap^2$.

É vero, ainda, que, se $C(p) = (X(p), Y(p)) \neq (0, 0)$ e se $\vec{V}(p) := (V_x(p), V_y(p))$,

$$\frac{V_y(p)}{V_x(p)} = \frac{\frac{dY}{dp}(p)}{\frac{dX}{dp}(p)},$$

na qual utiliza-se o fato de o vetor velocidade ser sempre tangente à curva C em pontos correspondentes - consequência da Definição 2.9. Dando continuidade ao desenvolvimento da expressão, resulta

$$\frac{V_y(p)}{V_x(p)} = \frac{-6ap}{-12a^2p^2} = \frac{1}{2ap}.$$

Mas, como

$$V_x^2(p) + V_y^2(p) = V^2(p),$$

temos que

$$\frac{|V_y(p)|}{\sqrt{V^2(p) - V_x^2(p)}} = \frac{1}{2a|p|}.$$

Porém, por (4.4):

$$\frac{|V_y(p)|}{\sqrt{6ga(p^2 - p_0^2) + V_0^2 - V_y^2(p)}} = \frac{1}{2a|p|}.$$

Observe-se, também, que $V(0) = |V_y(0)|$, pois o vetor velocidade de $C(p)$ é vertical em $p = 0$. Se considerado for que $p_0 = 0$, então $V_0 = V(0)$, resultado útil a fim de simplificar os cálculos. Logo, $|V_y(0)| = V_0$ será a velocidade de soltura da partícula sobre $C(0)$ e tomando, por hipótese, $V_y(p) \equiv V(0)$, resulta:

$$|V_y(p)| = \sqrt{\frac{3g}{2a}}.$$

Portanto, como desejava-se provar, existe $V_y(p)$ constante que satisfaz as equações de movimento de uma partícula que se move sobre $C(p)$ em um campo de força uniforme. ■

Teorema 4.3. *Um corpo que se mova, em um plano, sob influência de gravidade constante, atendendo às hipóteses do Teorema 2.10 e preservando sua velocidade vertical constante e não-nula ao longo de seu movimento, invariavelmente, descreve um arco contido no traço de uma parábola semicúbica.*

Demonstração: Fixado um sistema cartesiano de coordenadas, seja $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ a equação que descreve, nesse sistema, a posição de um corpo no tempo t a se mover conforme as condições apresentadas no Teorema 2.10. Além disso, suponha-se ser $\alpha(0) = (a, b)$ a posição inicial desse corpo e, pela Definição 2.9, ser $\alpha'(t) = \vec{v}(t) = (v_x(t), v_y(t))$ a sua

velocidade. Nesse caso, partindo-se da condição acima indicada, isto é, $v_y(t) = v_y$ constante, resulta, uma vez que a força gravitacional constante e vertical é orientada no sentido de decréscimo das ordenadas, $v_y < 0$. A verificação dessa última condição física é bastante simples e será feita a seguir. Por meio do Teorema 2.10,

$$v^2(t) - v^2(0) = 2g(y(0) - y(t)). \quad (4.5)$$

Observe-se, agora, que uma velocidade vertical positiva e constante indicaria um crescimento ilimitado de $y(t)$, pois, nesse caso, $y(t) = v_y t + k_1$, $t \in \mathbb{R}_+$, sendo v_y constante real positiva e k_1 constante real, o que conduziria, em algum momento, a um valor negativo para $v^2(t)$ conforme a equação anterior. Isso é absurdo. Por fim, como uma velocidade vertical constante e nula contraria a hipótese anteriormente assumida, essa velocidade vertical constante deverá ser negativa.

Usando-se a Definição 2.9 e a equação (4.5), encontra-se a relação

$$x'(t) = \sqrt{v^2(0) - v_y^2 + 2gy(0) - 2gy(t)} \quad (4.6)$$

ou

$$x'(t) = -\sqrt{v^2(0) - v_y^2 + 2gy(0) - 2gy(t)}. \quad (4.7)$$

Por hipótese, tome-se $v_x(t) \geq 0$, ou seja, a partir desse momento, considere $v_x(t)$ satisfazendo a equação (4.6) (o resultado segue de maneira inteiramente análoga para $v_x(t) < 0$). Então, pelo método da separação de variáveis, decorre de (4.6):

$$\int dx = \int \sqrt{v^2(0) - v_y^2 + 2gy(0) - 2gy(t)} dt,$$

cujo desenvolvimento conduz a

$$x(t) = \frac{[v^2(0) - v_y^2 + 2gy(0) - 2gy(t)]^{3/2}}{-3gv_y} + k_0, \quad (4.8)$$

com k_0 sendo a constante de integração, uma vez que $y'(t) = v_y$. Desse modo, como $y(t) = v_y t + k_1$, em que k_1 é uma constante, tem-se

$$\alpha(t) = \left(\frac{[v^2(0) - v_y^2 + 2gy(0) - 2gy(t)]^{3/2}}{-3gv_y} + k_0, v_y t + k_1 \right), \quad t \geq 0 \quad (4.9)$$

na qual, as constantes k_0 e k_1 podem ser determinadas ao se impor a condição inicial $\alpha(0) = (a, b)$.

Agora, a fim de mostrar que $\alpha(t)$ é uma parábola semicúbica a menos de translação, considere-se a seguinte reparametrização

$$t = \frac{-3a}{v_y} p^2 + \frac{v^2(0) - v_y^2 + 2g(y(0) - k_1)}{2gv_y}, \quad (4.10)$$

em que p é o novo parâmetro e a é uma constante a ser posteriormente definida de maneira útil. Sendo, agora, $\beta(p)$ a reparametrização de $\alpha(t)$ pela relação (4.10), obtém-se:

$$\beta(p) = \left(-\frac{[6agp^2]^{3/2}}{3gv_y} + k_0, -3ap^2 + \frac{v^2(0) - v_y^2 + 2g(y(0) - k_1)}{2g} + k_1 \right),$$

a qual, composta com a translação que elimina os termos independentes de $\beta(p)$, resulta na curva γ , de equação

$$\gamma(p) = \left(-\frac{[6ag]^{3/2}}{3gv_y} p^3, -3ap^2 \right), \quad (4.11)$$

com p não-negativo. Finalmente, tomando-se, por conveniência, $a = (3g)/(2v_y^2)$, isolando g e o substituindo na equação (4.11), encontra-se

$$\gamma(p) = (-4a^2 p^3, -3ap^2), \quad (4.12)$$

para p positivo. Contudo, note-se que o domínio de γ pode ser estendido aos reais, de maneira que o seu traço passará a coincidir com o traço da parábola semicúbica C , anteriormente definida, de mesma equação. Portanto, a trajetória calculada está contida no traço de C .

■

Referências

- [1] Boyce, William. E. e Di Prima, Richard C.: *Equações diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. 5ª ed. Rio de Janeiro: Editora Guanabara Koogan, 1994.
- [2] Boyer, Carl B.: *História da Matemática*. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1974.
- [3] Eves, Howard: *Introdução à História da Matemática*. Campinas: Editora da UNICAMP, 2004.

- [4] Gray, Alfred; Abbena Elsa e Slamon Simon.: *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*. 3ª ed. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2006.
- [5] Halliday, David; Resnick, Robert e Walker Jearl: *Fundamentos de Física*. 4ª ed., vol. 1. Rio de Janeiro: Editora Livros Técnicos e Científicos, 1996.
- [6] Tenenblat, Keti: *Introdução à Geometria Diferencial*, 2ª ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 2008.

Submetido em 19 de Março de 2020.

Aceito em 21 de Abril de 2020.