

## MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS: COMPARATIVO ENTRE SOLUÇÃO EXATA E SOLUÇÕES APROXIMADAS PELO MÉTODO DE GALERKIN EM ESTRUTURAS UNIDIMENSIONAIS

Raylson dos Santos Carneiro

Universidade Federal do Tocantins - UFT

[raylson@uft.edu.br](mailto:raylson@uft.edu.br)

Rogério dos Santos Carneiro

Universidade Federal do Tocantins - UFT

[rogerioscarneiro@gmail.com](mailto:rogerioscarneiro@gmail.com)

Kattia Ferreira da Silva

Universidade de Gurupi - UNIRG

[kattia-silva@hotmail.com](mailto:kattia-silva@hotmail.com)

### Resumo

O método dos elementos finitos tem como princípio básico a discretização do domínio da estrutura, efetuando procedimentos matemáticos para se ter uma aproximação mais exata da realidade da estrutura a ser analisada, pois existem alguns fatores que não podem ser considerados na utilização de métodos analíticos. Assim, por meio de uma pesquisa bibliográfica, este artigo teve como objetivo realizar um comparativo entre métodos analíticos e de elementos finitos em estruturas unidimensionais pelo método de Galerkin. Ao final desta pesquisa verifica-se que, ao elevar o número de elementos na malha que representa o objeto de estudo, tem-se uma melhor aproximação da solução exata. No entanto, o número de operações matemáticas a serem utilizadas pela análise por elementos finitos aumenta substancialmente.

**Palavras-chave:** Análise de Estruturas; Método dos Elementos Finitos; Método de Galerkin.

### Abstract

The finite element method has as its basic principle the discretization of the structure domain, performing mathematical procedures to have a more accurate approximation of the reality of the structure to be analyzed, as there are some factors that cannot be considered when using analytical methods. Thus, by means of a bibliographic research this article aimed to make a comparison between analytical and finite element methods in one-dimensional structures by the Galerkin method. At the end of this research it is verified that, by increasing the number of elements in the mesh that represents

the object of study, one has a better approximation of the exact solution. However, the number of mathematical operations to be used by finite element analysis increases substantially.

**Keywords:** Structural Analysis; Finite Element Method; Galerkin Method.

## 1 Introdução

O método dos elementos finitos (MEF), às vezes chamado de análise de elementos finitos (AEF), é um método numérico geral para a aproximação de soluções de equações diferenciais ordinárias e parciais, amplamente utilizado para obter soluções aproximadas de vários problemas de engenharia [6].

A sua popularidade é devida em parte ao método resultar em programas computacionais versáteis por natureza que podem resolver muitos problemas práticos com pouco treinamento. Ressaltamos que há riscos em utilizar programas computacionais sem o conhecimento adequado da teoria que lhes serve de base, esse é um dos bons motivos para ter um profundo conhecimento da teoria na qual se fundamenta o método dos elementos finitos.

A resolução de problemas de engenharia, de uma forma generalizada pode ser realizada de acordo com três abordagens: métodos analíticos, métodos experimentais e métodos numéricos. Os métodos analíticos representam soluções baseadas em fórmulas matemáticas, desenvolvidas geralmente de forma manual. Os métodos experimentais dependem de protótipos físicos do equipamento ou produto, construídos em escala real ou reduzida. Por fim, na solução por meio de métodos numéricos é desenvolvido um protótipo virtual do produto de interesse, representado por um sistema de equações fundamentadas em uma teoria matemática [9].

Entre os métodos numéricos podemos citar a análise por elementos finitos, que tem sido aplicada nas diversas áreas da engenharia. Neste contexto, indagamos: como o MEF podem contribuir para resolver situações-problema na análise de estruturas? Para responder a essa questão, este trabalho objetiva realizar um comparativo entre métodos analíticos e de elementos finitos, pelo método de Galerkin, com a discretização do domínio em um, dois e quatro elementos, por meio de um exemplo que representa uma estrutura unidimensional [8].

Para a elaboração deste artigo foi utilizada a estratégia metodológica de pesquisa bibliográfica. Utilizando a revisão narrativa, que é um dos tipos de revisão de literatura, pela possibilidade de acesso a experiências já realizadas por autores sobre o assunto. A revisão narrativa não é imparcial, pois permite o relato de trabalhos, a partir da compreensão do pesquisador [5].

## 2 Fundamentos do Método dos Elementos Finitos

A discretização é a ideia principal do método dos elementos finitos, ou seja, consiste em dividir o domínio (meio contínuo) do problema em sub-regiões de geometria simples. Essa ideia é bastante utilizada na engenharia, onde usualmente tenta-se resolver um problema complexo, subdividindo-o em uma série de problemas mais simples. Por exemplo pode-se ter um domínio, ilustrado por uma geometria bidimensional, na qual inclui alguns subdomínios de tamanho finito da área de interesse, como é mostrado na Figura 1. Os vértices dos polígonos formados no domínio são indicados por pontos, e são denominados nós do elemento finito.

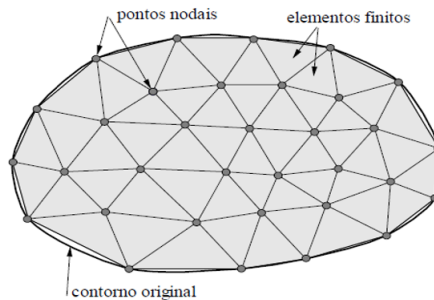


Figura 1: Malha de elementos finitos (para problema plano) [10].

Um item importante na análise por elementos finitos é a determinação do número de nós a serem utilizados, devido aos graus de liberdade de cada um deles, conforme Figura 2. “Num ponto do espaço pertencente a um corpo sujeito a deslocamentos e deformações podem ser considerados seis graus de liberdade, três de deslocamento e três de rotação” [2].

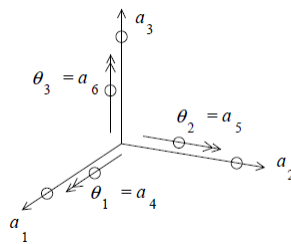


Figura 2: Deslocamentos generalizados [2].

No entanto, como os graus de liberdade são deslocamentos horizontais e verticais,

em uma análise com estado pleno de tensões, então na análise por elementos finitos, para cada nó são considerados dois graus de liberdade, conforme exemplo na Figura 3.

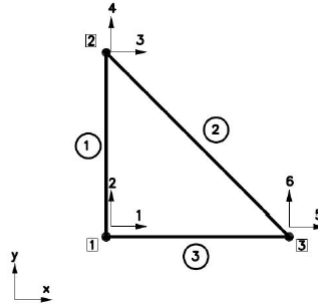


Figura 3: Estrutura de treliça [1].

Cada elemento tem um formato simples como uma linha, um triângulo ou um retângulo, e está conectado a outros elementos compartilhando os nós, onde as incógnitas para cada elemento são os deslocamentos dos nós, as quais são denominados graus de liberdade. As condições de deslocamento no contorno e as cargas aplicadas são especificadas. As equações matriciais no nível do elemento são combinadas a fim de formar as equações no nível global, e assim posteriormente, são resolvidas encontrando os deslocamentos desconhecidos, dadas as forças e as condições de contorno. Por meio dos deslocamentos dos nós, são calculadas as deformações e as tensões em cada elemento [4].

Existem três métodos que podem ser utilizados para a obtenção das equações dos elementos finitos de um problema: método direto, método variacional e o método dos resíduos ponderados. É importante ressaltar que o método direto fornece uma noção física clara do método dos elementos finitos, mas ele tem aplicação limitada já que só pode resolver problemas unidimensionais. Já o método variacional, utiliza-se dos fundamentos do princípio variacional, que consiste em determinar uma função que dependa de um ou mais parâmetros do problema, ou seja, ele exige a existência de uma função variacional para o problema, cuja minimização resulta na solução das equações diferenciais. Nesta pesquisa utilizamos o método de resíduos ponderados, pois detém o método de Galerkin, que é popular para a obtenção das equações dos elementos finitos para muitos problemas de engenharia.

### 3 Método de Resíduos Ponderados

O método de resíduos ponderados pode ser aplicado em formulações de elementos que são analisadas de forma multidimensional. Em que, a escolha das funções de aproximação leva a diferentes métodos de resíduos ponderados, como o método dos mínimos quadrados, método da colocação, método de Petrov-Galerkin e método de Galerkin.

Por esta razão o método dos resíduos ponderados, no contexto da mecânica dos sólidos, busca determinar a solução aproximada  $\bar{u}(x) \approx u(x)$ , escolhendo  $\bar{u}(x)$  de tal forma que satisfaça as condições de contorno essenciais do problema (deslocamentos), mas não necessariamente as condições de contorno naturais (força ou tensão). Como  $\bar{u}(x)$  é uma solução aproximada da solução exata  $u(x)$ , vai existir um resíduo  $R(x)$  da função resultante. O objetivo é fazer com que o erro ou o resíduo se torne o menor possível, em vez de tentar fazer com que  $R(x)$  se anule para todos os valores de  $x$ . Busca-se, que o valor médio de  $R(x)$  seja igual a zero.

$$\int_{x_a}^{x_b} R(x)W(x)dx = 0, \quad x_a \leq x \leq x_b. \quad (3.1)$$

sendo  $W(x)$  denominada função de ponderação. A equação (3.1) exige que a integral do resíduo ponderado seja igual a zero.

A solução aproximada  $\bar{u}(x)$  é expressa como uma soma de várias funções chamadas funções de aproximação,

$$\bar{u}(x) = \sum_{i=1}^n c_i \phi(x). \quad (3.2)$$

onde  $n$  é o número de termos usados,  $\phi(x)$  são as funções de aproximação conhecidas, e  $c_i$  são os coeficientes a serem determinados usando o método dos resíduos ponderados.

#### 3.1 Uma aplicação do Método de Resíduos Ponderados

Como exemplo, vamos encontrar uma solução aproximada da equação diferencial abaixo, sendo as condições de contorno  $y(1) = 0$  e  $y(2) = 0$ .

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{dy}{dx} + 4x.$$

Esta equação diferencial descreve os deslocamentos em uma barra uniaxial sujeita à força distribuída ao longo do seu eixo. A solução  $\bar{u}(x)$  da equação, satisfaz a equação de equilíbrio em qualquer ponto do domínio.

Inicialmente, vamos expor a solução exata para a equação diferencial utilizando os conceitos do cálculo diferencial e integral. Utilizando a regra do produto para a derivada de uma função, a equação torna-se

$$\frac{d}{dx} \left( x \frac{dy}{dx} \right) = 4x.$$

Aplicando o processo de antiderivação, por duas vezes, em ambos os lados da equação, obtemos

$$y(x) = \frac{2x^2}{2} + C_1 \ln |x| + C_2.$$

Pelas condições de contorno  $y(1) = y(2) = 0$ ,  $C_2 = -1$  e  $C_1 = -\frac{3}{\ln 2}$ . Portanto, a solução exata para a equação diferencial é dada por

$$y(x) = x^2 - \frac{3 \ln |x|}{\ln 2} - 1.$$

Por outro lado, para a resolução da equação pelo método de resíduos ponderados sem a discretização do domínio, em primeiro lugar deve-se encontrar um erro residual igual a zero,

$$R(x) = x \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 4x = 0$$

Para esta equação diferencial, vamos adotar como função de aproximação, uma função polinomial de grau 2 do tipo  $\phi(x) = (x - x_a)(x - x_b)$ . Pelo intervalo  $x_a \leq x \leq x_b$  fornecidos pela equação diferencial, vamos adotar um único elemento,

$$\phi(x) = (x - 1)(x - 2)$$

Como está sendo analisado todo o domínio da função, então pela equação (3.2) a solução aproximada  $\bar{u}(x)$  é determinada pela função,  $\bar{u}(x) = c_1 x^2 - 3c_1 x + 2c_1$ . Determinando a primeira e segunda derivada da função que gera a solução aproximada,

$$\frac{d\bar{u}}{dx} = 2c_1 x - 3c_1 \quad \text{e} \quad \frac{d^2\bar{u}}{dx^2} = 2c_1$$

logo, pode-se determinar o erro residual,  $R(x) = 4c_1 x - 3c_1 - 4x$ , realizando a substituição na equação (3.2) tem-se,

$$\int_1^2 (4c_1 x - 4x - 3c_1)(x^2 - 3x + 2) dx = 0$$

e resolvendo a integral definida tem-se que  $c_1 = \frac{2}{5}$ . Portanto, a solução aproximada  $\bar{u}(x)$  com um único elemento é dada pela função  $\bar{u}(x) = \frac{2x^2}{5} - \frac{6x}{5} + \frac{4}{5}$ .

## 4 Método de Galerkin

O método de Galerkin é um método de integração aproximada de Equações Diferenciais Parciais, no qual se tornou uma ferramenta poderosa para a abordagem científica de diversos problemas, em que a maioria destes consistem na resolução de equações diferenciais não lineares.

Boris Grigorievitch Galerkin, nasceu em 20 de Fevereiro de 1871 em Polotsk, atualmente localizada na Bielo-Rússia, descendente de uma família pobre, passou por muitas dificuldades durante seus anos de estudos. Estudou matemática e engenharia no Instituto Tecnológico de Saint Petersburg, e em 1915 publicou um trabalho sobre um método de integração aproximada de Equações Diferenciais Parciais, no qual ficou mundialmente conhecido como “Método de Galerkin”, e até hoje ele e suas generalizações são usados tanto na teoria de Equações Diferenciais, como em Análise, Mecânica, Termodinâmica, Hidrodinâmica, e também no desenvolvimento de métodos numéricos, tais como o Método de Elementos Finitos [7].

A descrição das principais etapas referente ao método de Galerkin abordados a seguir é baseado em um conjunto de ideias expostas nas obras de Nam-Hom Kim e Bhavani V. Sankar [4], Marcelo M. Cavalcanti e Valéria D. Cavalcanti [3].

Como a solução aproximada, equação (3.2), é uma combinação linear das funções de aproximação, a precisão da a aproximação depende delas. O método de Galerkin difere dos outros métodos de resíduos ponderados pelo fato de que as  $n$  funções peso,  $\phi_i(x)$ , são as mesmas que as  $n$  funções de aproximações.

Para o método residual ponderado de Galerkin, as funções de aproximação são escolhidas de modo que elas sejam idênticas às funções teste, ou seja,

$$W(x) = \phi(x). \quad (4.1)$$

Em casos práticos de problemas bidimensionais e tridimensionais modelados por equações diferenciais parciais, a “descoberta” de funções teste apropriadas não é uma tarefa fácil. Assim, para minimizar o erro residual é necessário realizar uma discretização do domínio e utilizar elementos finitos no domínio, conforme a Figura 4.

Depois de ser dividido em um conjunto de elementos com formato simples, a solução dentro de cada elemento é aproximada na forma de polinômios simples. E a solução admissível é construída no elemento usando os valores de solução nesses nós. Por exemplo, o  $i$ -ésimo elemento conecta dois nós em  $x = x_i$  e  $x = x_{i+1}$ . Para interpolar a solução usando dois valores nodais, o polinômio linear é a escolha apropriada, pois são fornecidos os dados de dois pontos. Assim, a solução é aproximada por,

$$\bar{u}(x) = a_0 + a_1x, \quad x_i \leq x \leq x_{i+1}. \quad (4.2)$$

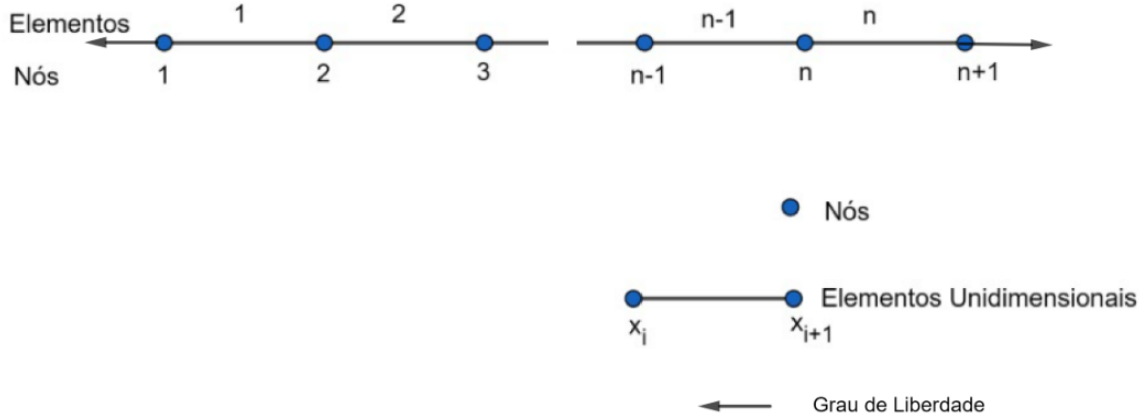


Figura 4: Discretização do domínio de um problema unidimensional.

A solução admissível na equação (4.2) é definida apenas no  $i$ -ésimo elemento. Embora possamos determinar dois coeficientes  $a_0$  e  $a_1$ , eles não possuem significado físico. Na realidade esses coeficientes podem ser representados pela solução nodal  $\bar{u}(x_i)$  e  $\bar{u}(x_{i+1})$ ,

$$\begin{cases} \bar{u}(x_i) = u_i = a_0 + a_1 x_i, \\ \bar{u}(x_{i+1}) = u_{i+1} = a_0 + a_1 x_{i+1}, \end{cases} \quad (4.3)$$

onde  $u_i$  e  $u_{i+1}$  são os valores da solução nos dois nós da extremidade. Então, resolvendo o sistema de equações (4.3),

$$a_0 = \frac{u_i x_{i+1} - u_{i+1} x_i}{x_{i+1} - x_i} \quad e \quad a_1 = \frac{u_{i+1} - u_i}{x_{i+1} - x_i}, \quad (4.4)$$

pode-se efetuar a substituição dos coeficientes  $a_0$  e  $a_1$  na equação (4.2). A solução aproximada ficará expressa em termos da solução nodal  $u_i$  e  $u_{i+1}$ ,

$$\bar{u}(x) = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} u_i + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} u_{i+1}, \quad (4.5)$$

onde  $x_{i+1} - x_i$  é o comprimento do elemento unidimensional definido na discretização do domínio.

$$\bar{u}(x) = N_1(x)u_i + N_2(x)u_{i+1}, \quad x_i \leq x \leq x_{i+1}, \quad (4.6)$$

sendo as funções  $N_1(x)$  e  $N_2(x)$ , as funções de interpolação. Essas funções também são chamadas de funções forma, um termo usado na mecânica dos sólidos, já que as funções descrevem a configuração deformada de um sólido ou uma estrutura.



A solução aproximada da equação (4.6) é similar à que foi determinada pelo método dos resíduos ponderados na equação (3.2). Neste caso, a função de interpolação corresponde à função de aproximação. A diferença é que a aproximação na equação (3.2) está escrita em termos dos valores da solução nos nós, ao passo que os coeficientes  $c_i$  não possuem significado físico algum.

Para explicar a precisão da aproximação da solução exata em relação à solução interpolada e seus gradientes para dois elementos contínuos, neste caso unidimensional, observe a Figura 5 que representa a solução sendo uma função linear por partes, e a Figura 6 que representa o seu gradiente,  $\frac{du}{dx}$ , que é constante ao longo do elemento.

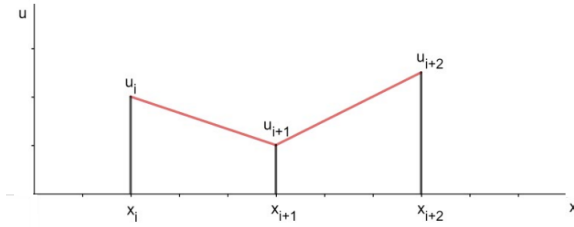


Figura 5: Solução interpolada [4].

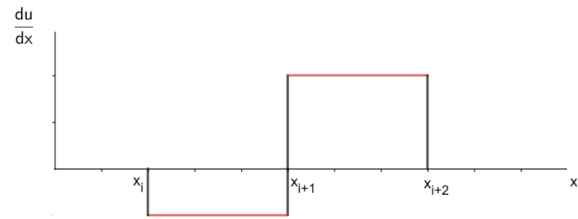


Figura 6: Gradiente [4].

Para a análise de problemas estruturais por elementos finitos, a solução  $u(x)$  representa frequentemente o deslocamento da estrutura, e seu gradiente é a tensão ou deformação. Desta forma, a aproximação leva a um deslocamento contínuo, mas as tensões e deformações descontínuas entre os elementos.

Considerando uma equação diferencial do tipo,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x) = 0, \quad x_i \leq x \leq x_{i+1}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n, \quad (4.7)$$

a solução aproximada do problema por elemento finito será de acordo com a equação (4.6), com resíduo  $R(x)$  determinado por

$$R(x) = \frac{d^2\bar{u}}{dx^2} + p(x), \quad (4.8)$$

com a discretização do domínio em  $n$  elementos. Teremos então,

$$R(x, u_i) = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{d^2}{dx^2} \{N_1(x)u_i + N_2(x)u_{i+1}\} + p(x) \right]. \quad (4.9)$$

Fazendo a substituição da equação (4.8) na equação (3.2), e aplicando o super-índice novamente para indicar que o resíduo calculado é para o elemento,

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} W_i(x) \sum_{i=1}^n \left[ \frac{d^2}{dx^2} \{N_i(x)u_i + N_{i+1}(x)u_{i+1}\} + p(x) \right] dx = 0. \quad (4.10)$$

A integração da equação (4.10) fornece  $n$  equações algébricas para os valores das  $n + 1$  soluções nodais, e essas equações podem ser escritas na forma de matrizes

$$[K]\{u\} = \{F\}, \quad (4.11)$$

onde simbolicamente  $[K]$  é a matriz de “rigidez” do sistema,  $u$  é o vetor de “deslocamentos” nos nós, e  $F$  é o vetor de “forças” nodais.

A equação (4.10) é o enunciado formal do método dos elementos finitos de Galerkin, e inclui ambos os passos da definição: a formação do elemento e sua montagem no sistema. Escrito em termos de integração no domínio completo do problema, essa formulação mostra claramente a base matemática no método dos resíduos ponderados.

Para a formulação do elemento finito, é necessário que o resíduo seja diferente de zero. Portanto, será aplicado o critério residual ponderado de Galerkin, resulta em

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} N_j(x) \left[ \frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} + p(x) \right] dx = 0, \quad j = 1, 2, \quad (4.12)$$

ou

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} N_j(x) \frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} + \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_j(x) p(x) dx = 0, \quad j = 1, 2. \quad (4.13)$$

Aplicando o procedimento de integração por partes na primeira integral definida na equação (4.13), ela ficará da seguinte forma,

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dN_j}{dx} \frac{d\bar{u}}{dx} dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_j(x) p(x) dx + N_j(x) \frac{d\bar{u}}{dx} \Big|_{x_i}^{x_{i+1}}, \quad j = 1, 2, \quad (4.14)$$

que resultará em um sistema de equações

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dN_1}{dx} \frac{d\bar{u}}{dx} dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_1(x) p(x) dx + \frac{d\bar{u}}{dx} \Big|_{x_i}, \quad (4.15)$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dN_2}{dx} \frac{d\bar{u}}{dx} dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_2(x) p(x) dx + \frac{d\bar{u}}{dx} \Big|_{x_{i+1}}. \quad (4.16)$$

A integração por partes na equação (4.14) inseriu as condições de contorno de gradiente ( $\frac{du}{dx}$ ) nos nós do elemento. Colocando  $i = 1$  para simplificar a notação e substituindo a equação (4.6) nas equações (4.15) e (4.16), tem-se os seguintes resultados,

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{dN_1}{dx} \frac{dN_1}{dx} u_1 + \frac{dN_1}{dx} \frac{dN_2}{dx} u_2 \right] dx = \int_{x_1}^{x_2} N_1(x)p(x)dx + \frac{d\bar{u}}{dx} \Big|_{x_1}, \quad (4.17)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{dN_2}{dx} \frac{dN_1}{dx} u_1 + \frac{dN_2}{dx} \frac{dN_2}{dx} u_2 \right] dx = \int_{x_1}^{x_2} N_2(x)p(x)dx + \frac{d\bar{u}}{dx} \Big|_{x_2}. \quad (4.18)$$

Como está sendo aplicado o método dos resíduos ponderados, a média ponderada de  $R(x)$  tende a ser nulo, mas não igual a zero. As equações (4.17) e (4.18) podem ser escritas na forma matricial, onde o segundo membro da equação representa as forças nodais,

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

no qual os termos da matriz rigidez estão definido por

$$k_{ij} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx}, \quad i, j = 1, 2. \quad (4.20)$$

É importante notar que, durante o processo de montagem, quando dois elementos são unidos em um nó comum como na Figura 4, por exemplo, a equação montada no sistema para o nó contém um termo com sinal positivo e outro negativo,

$$- \frac{d\bar{u}^{(1)}}{dx} \Big|_{x_1} + \frac{d\bar{u}^{(2)}}{dx} \Big|_{x_2}. \quad (4.21)$$

Se a solução do elemento finito fosse a solução exata, as primeiras derivadas de cada elemento indicado na equação (4.22) deveriam ser iguais, e assim o valor da expressão deve ser nula. No procedimento de montagem, assume-se que em todos os nós interiores da malha, as condições gradientes da variável envolvida aparecem como iguais e opostas nos elementos adjacentes e assim o cancelamento é efetuado a menos que uma influência externa atue sobre o nó. Por outro lado, em nós de borda de limite (contorno), os termos de gradiente podem especificar condições de contorno ou representam “reações” obtidas através da fase de solução.

## 4.1 Aplicação do Método de Galerkin

Retornando ao exemplo exposto na seção 3.1, resolveremos agora a equação diferencial proposta como uma aplicação do método de resíduos ponderados, utilizando o método de Galerkin. Em seguida, faremos um comparativo gráfico entre a solução exata, a solução aproximada obtida pelo método de resíduos ponderados com um único elemento e a solução obtida pelo método de Galerkin com discretização do domínio, com dois e quatro elementos.

Para facilitar o processo de resolução por dois elementos, os nós serão igualmente espaçados conforme a Figura 7.

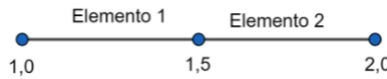


Figura 7: Discretização do domínio em dois elementos unidimensionais.

Fonte: Elaborado pelos autores.

Para a solução de cada elemento, a aproximação mais simples é adotar um elemento com dois nós extremos, para o qual tem-se a equação (4.6) igual a

$$\bar{u}(x) = N_1 u_1 + N_2 u_2.$$

Derivando a solução aproximada tem-se que,

$$\frac{d\bar{u}}{dx} = \frac{dN_1}{dx} u_1 + \frac{dN_2}{dx} u_2,$$

onde,

$$N_1(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \Rightarrow \frac{dN_1}{dx} = \frac{-1}{x_2 - x_1}$$

e

$$N_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow \frac{dN_2}{dx} = \frac{1}{x_2 - x_1}.$$

Inicialmente, deve-se encontrar um erro residual. Para isto, relembramos a equação diferencial do problema:

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 4x.$$

Utilizando a regra do produto para a derivadas, a equação torna-se

$$\frac{d}{dx} \left( x \frac{dy}{dx} \right) = 4x.$$

Assim,

$$R(x) = \frac{d}{dx} \left( x \frac{d\bar{u}}{dx} \right) - 4x.$$

Tomando como base a equação (4.13),

$$\int_{x_1}^{x_2} N_j \frac{d}{dx} \left( x \frac{d\bar{u}}{dx} \right) dx - \int_{x_1}^{x_2} N_j 4x dx = 0, \quad j = 1, 2.$$

Utilizando o processo de integração por partes na primeira integral,

$$\int_{x_1}^{x_2} x \frac{dN_j}{dx} \frac{d\bar{u}}{dx} dx = N_j x \frac{d\bar{u}}{dx} \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} 4x N_j dx = 0, \quad j = 1, 2.$$

Realizando a substituição de  $\frac{d\bar{u}}{dx}$  na primeira integral,

$$\int_{x_1}^{x_2} x \frac{dN_j}{dx} \left( \frac{dN_1}{dx} u_1 + \frac{dN_2}{dx} u_2 \right) dx = N_j x \frac{d\bar{u}}{dx} \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} 4x N_j dx = 0, \quad j = 1, 2.$$

Adotando  $j = 1$ ,

$$\int_{x_1}^{x_2} x \frac{dN_1}{dx} \left( \frac{dN_1}{dx} u_1 + \frac{dN_2}{dx} u_2 \right) dx = N_1 x \frac{d\bar{u}}{dx} \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} 4x N_1 dx = 0.$$

Realizando a substituição de  $N_1$ ,  $\frac{dN_1}{dx}$  e  $\frac{dN_2}{dx}$ ,

$$\int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{x}{x_2 - x_1} \right) \left( \frac{u_1}{x_2 - x_1} - \frac{u_2}{x_2 - x_1} \right) dx = \left( \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \right) x \frac{d\bar{u}}{dx} \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} 4x \left( \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \right) dx$$

nos dá

$$\frac{x_2^2 - x_1^2}{2(x_2 - x_1)^2} (u_1 - u_2) = -x_1 \frac{d\bar{u}}{dx} \Big|_{x_1} - 4 \int_{x_1}^{x_2} x \left( \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \right) dx. \quad (4.22)$$

Efetando o procedimento similar para a substituição  $j = 2$  com os valores de  $N_2$ ,  $\frac{dN_1}{dx}$  e  $\frac{dN_2}{dx}$  tem-se a equação,

$$\frac{x_2^2 - x_1^2}{2(x_2 - x_1)^2} (u_2 - u_1) = x_2 \frac{d\bar{u}}{dx} \Big|_{x_2} - 4 \int_{x_1}^{x_2} x \left( \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right) dx. \quad (4.23)$$

Comparando os resultados encontrados nas equações (4.22) e (4.23) com a equação matricial (4.20), tem-se que a matriz rigidez ( $k_{ij}$ ) para cada elemento ( $k^{(e)}$ ), é o resultado encontrado no primeiro membro da equação representada por

$$k^{(e)} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{2(x_2 - x_1)^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

onde o superíndice ( $e$ ), refere-se ao elemento que está sendo analisado.

Por outro lado, as condições de contorno, o gradiente e as forças nodais estão expostas pelo segundo membro das equações (4.22) e (4.23). Portanto, agora pode-se efetuar a substituição das variáveis  $x_1$  e  $x_2$ , que representam os nós de cada elemento.

Para o “Elemento 1” temos que  $x_1 = 1$  e  $x_2 = 1,5$ , assim

$$k^{(1)} = \frac{1,5^2 - 1^2}{2(1,5 - 1)^2} = 2,5,$$

$$F_1^{(1)} = -4 \int_1^{1,5} x \left( \frac{1,5 - x}{1,5 - 1} \right) dx \Rightarrow F_1^{(1)} = -1,16667$$

e

$$F_2^{(1)} = -4 \int_1^{1,5} x \left( \frac{x - 1}{1,5 - 1} \right) dx \Rightarrow F_2^{(1)} = -1,3333.$$

Com esses valores, pode-se escrever a equação em forma de matrizes do “Elemento 1”:

$$\begin{bmatrix} 2,5 & -2,5 \\ -2,5 & 2,5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,16667 + \left. \frac{d\bar{u}}{dx} \right|_{x_1} \\ -1,33333 + 1,5 \left. \frac{d\bar{u}}{dx} \right|_{x_2} \end{pmatrix}.$$

Para o “Elemento 2”, por estar trabalhando com o segundo e o terceiro nó, adota-se os valores de  $x_2 = 1,5$  no lugar de  $x_1$ , e  $x_3 = 2$  no lugar de  $x_2$ , donde

$$k^{(2)} = \frac{2^2 - 1,5^2}{2(2 - 1,5)^2} \Rightarrow k^{(2)} = 3,5;$$

$$F_1^{(2)} = -4 \int_{1,5}^2 x \left( \frac{2 - x}{2 - 1,5} \right) dx \Rightarrow F_1^{(2)} = -1,16667;$$

$$F_2^{(2)} = -4 \int_{1,5}^2 x \left( \frac{x - 1,5}{2 - 1,5} \right) dx \Rightarrow F_2^{(2)} = -1,8333.$$

Com esses valores podemos escrever a equação em forma de matrizes do “Elemento 2”

$$\begin{bmatrix} 3,5 & -3,5 \\ -3,5 & 3,5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,16667 - 1,5 \frac{d\bar{u}}{dx} \Big|_{x_2} \\ -1,83333 + 2 \frac{d\bar{u}}{dx} \Big|_{x_3} \end{pmatrix}.$$

Escrevendo a equação matricial em forma de um único domínio, denotando os valores nodais do sistema como  $u_1, u_2, u_3$  em 1; 1,5 e 2, respectivamente. A equação matricial será:

$$\begin{bmatrix} 2,5 & -2,5 & 0 \\ -2,5 & 2,5 + 3,5 & -3,5 \\ 0 & -3,5 & 3,5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,16667 + \frac{d\bar{u}}{dx} \Big|_{x_1} \\ -1,33333 + 1,5 \frac{d\bar{u}}{dx} \Big|_{x_2} - 1,16667 - 1,5 \frac{d\bar{u}}{dx} \Big|_{x_2} \\ -1,83333 + 2 \frac{d\bar{u}}{dx} \Big|_{x_3} \end{pmatrix}.$$

Aplicando as condições de contorno  $y(1) = 0$  e  $y(2) = 0$ , logo  $u_1 = 0$  e  $u_3 = 0$ ,

$$\begin{bmatrix} 2,5 & -2,5 & 0 \\ -2,5 & 6 & -3,5 \\ 0 & -3,5 & 3,5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,16667 + \frac{d\bar{u}}{dx} \Big|_{x_1} \\ -3 \\ -1,83333 + 2 \frac{d\bar{u}}{dx} \Big|_{x_3} \end{pmatrix}.$$

Efetuando o produto das matrizes, e resolvendo o sistema de equações pode-se determinar a solução aproximada no nó 2, e os gradientes das extremidades do elemento

$$u_2 = -0,5 \quad \frac{d\bar{u}}{dx} \Big|_{x_1} = -2,4167 \quad \frac{d\bar{u}}{dx} \Big|_{x_3} = 1,7917.$$

Para determinar a solução aproximada com três, quatro ou mais elementos, deve-se seguir o mesmo padrão da solução com a discretização do domínio em dois elementos. Para facilitar o processo de resolução por quatro elementos, toma-se como base os nós igualmente espaçados, conforme a Figura 8.

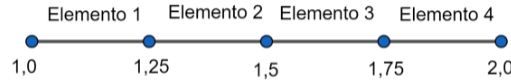


Figura 8: Discretização do domínio em quatro elementos unidimensionais.

Fonte: Elaborado pelos autores.

A solução de cada elemento, pelo método de Galerkin, utilizará a equação (4.23):

$$\frac{x_2^2 - x_1^2}{2(x_2 - x_1)^2}(u_2 - u_1) = x_2 \frac{d\bar{u}}{dx} \Big|_{x_2} - 4 \int_{x_1}^{x_2} x \left( \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right) dx,$$

sendo a matriz rigidez para cada elemento,

$$k^{(e)} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{2(x_2 - x_1)^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para o “Elemento 1”, temos que  $x_1 = 1$  e  $x_2 = 1,25$ , assim

$$k^{(1)} = \frac{1,25^2 - 1^2}{2(1,25 - 1)^2} \Rightarrow k^{(1)} = 4,5;$$

$$F_1^{(1)} = -4 \int_1^{1,25} x \left( \frac{1,25 - x}{1,25 - 1} \right) dx \Rightarrow F_1^{(1)} = -0,54167;$$

$$F_2^{(1)} = -4 \int_1^{1,25} x \left( \frac{x - 1}{1,25 - 1} \right) dx \Rightarrow F_2^{(1)} = -0,58333.$$

Com esses valores pode-se escrever a equação em forma de matrizes do “Elemento 1”,

$$\begin{pmatrix} 4,5 & -4,5 \\ -4,5 & 4,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,54167 + \frac{d\bar{u}}{dx} \Big|_{x_1} \\ -0,58333 + 1,25 \frac{d\bar{u}}{dx} \Big|_{x_2} \end{pmatrix}.$$

Para o “Elemento 2”, por estar trabalhando com o segundo e terceiro nó, adota-se os valores de  $x_2 = 1,25$  no lugar de  $x_1$ , e  $x_3 = 1,5$  no lugar de  $x_2$ :

$$k^{(2)} = \frac{1,5^2 - 1,25^2}{2(1,5 - 1,25)^2} \Rightarrow k^{(2)} = 5,5;$$



$$F_1^{(2)} = -4 \int_{1,25}^{1,5} x \left( \frac{1,5 - x}{1,5 - 1,25} \right) dx \Rightarrow F_1^{(2)} = -0,66667;$$

$$F_2^{(2)} = -4 \int_{1,25}^{1,5} x \left( \frac{x - 1,25}{1,5 - 1,25} \right) dx \Rightarrow F_2^{(2)} = -0,70833.$$

Com esses valores pode-se escrever a equação em forma de matrizes do “Elemento 2”,

$$\begin{pmatrix} 5,5 & -5,5 \\ -5,5 & 5,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,66667 - 1,25 \frac{d\bar{u}}{dx} \Big|_{x_2} \\ -0,70833 + 1,5 \frac{d\bar{u}}{dx} \Big|_{x_3} \end{pmatrix}.$$

Para o “Elemento 3”, por estar trabalhando com o terceiro e quarto nó, adota-se os valores de  $x_3 = 1,5$  no lugar de  $x_1$ , e  $x_4 = 1,75$  no lugar de  $x_2$ :

$$k^{(3)} = \frac{1,75^2 - 1,5^2}{2(1,75 - 1,5)^2} \Rightarrow k^{(3)} = 6,5;$$

$$F_1^{(3)} = -4 \int_{1,5}^{1,75} x \left( \frac{1,75 - x}{1,75 - 1,5} \right) dx \Rightarrow F_1^{(3)} = -0,79167;$$

$$F_2^{(3)} = -4 \int_{1,5}^{1,75} x \left( \frac{x - 1,5}{1,75 - 1,5} \right) dx \Rightarrow F_2^{(3)} = -0,83333.$$

Com esses valores pode-se escrever a equação em forma de matrizes do “Elemento 3”,

$$\begin{pmatrix} 6,5 & -6,5 \\ -6,5 & 6,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{(3)} \\ u_2^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,79167 - 1,5 \frac{d\bar{u}}{dx} \Big|_{x_3} \\ -0,83333 + 1,75 \frac{d\bar{u}}{dx} \Big|_{x_4} \end{pmatrix}.$$

Para o “Elemento 4”, por estar trabalhando com o quarto e quinto nó, adota-se os valores de  $x_4 = 1,75$  no lugar de  $x_1$ , e  $x_5 = 2$  no lugar de  $x_2$ :

$$k^{(4)} = \frac{2^2 - 1,75^2}{2(2 - 1,75)^2} \Rightarrow k^{(4)} = 7,5;$$

$$F_1^{(4)} = -4 \int_{1,75}^2 x \left( \frac{2 - x}{2 - 1,75} \right) dx \Rightarrow F_1^{(4)} = -0,91667;$$

$$F_2^{(4)} = -4 \int_{1,75}^2 x \left( \frac{x-1,75}{2-1,75} \right) dx \Rightarrow F_2^{(2)} = -0,95833.$$

Com esses valores podemos escrever a equação em forma de matrizes do “Elemento 4”,

$$\begin{pmatrix} 7,5 & -7,5 \\ -7,5 & 7,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{(4)} \\ u_2^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,91667 - 1,75 \frac{d\bar{u}}{dx} \Big|_{x_4} \\ -0,95833 + 2 \frac{d\bar{u}}{dx} \Big|_{x_5} \end{pmatrix}.$$

Escrevendo a equação matricial em forma de um único domínio, denotando os valores nodais do sistema como  $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5$ . A matriz rigidez e a matriz das soluções aproximadas serão

$$\begin{pmatrix} 4,5 & -4,5 & 0 & 0 & 0 \\ -4,5 & 4,5 + 5,5 & -5,5 & 0 & 0 \\ 0 & -5,5 & 5,5 + 6,50 & -6,5 & 0 \\ 0 & 0 & -6,5 & 6,5 + 7,5 & -7,5 \\ 0 & 0 & 0 & -7,5 & 7,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix}.$$

Seguindo o mesmo raciocínio utilizado para dois elementos, então a matriz das forças e gradientes será expressa por

$$\begin{pmatrix} -0,54167 + \frac{d\bar{u}}{dx} \Big|_{x_1} \\ -0,58333 + 1,25 \frac{d\bar{u}}{dx} \Big|_{x_2} & -0,66667 - 1,25 \frac{d\bar{u}}{dx} \Big|_{x_2} \\ -0,70833 + 1,5 \frac{d\bar{u}}{dx} \Big|_{x_3} & -0,79167 - 1,5 \frac{d\bar{u}}{dx} \Big|_{x_3} \\ -0,83333 + 1,75 \frac{d\bar{u}}{dx} \Big|_{x_4} & -0,91667 - 1,75 \frac{d\bar{u}}{dx} \Big|_{x_4} \\ -0,95833 + 2 \frac{d\bar{u}}{dx} \Big|_{x_5} \end{pmatrix},$$

e a equação matricial pode ser representada por

$$\begin{pmatrix} 4,5 & -4,5 & 0 & 0 & 0 \\ -4,5 & 10 & -5,5 & 0 & 0 \\ 0 & -5,5 & 12 & -6,5 & 0 \\ 0 & 0 & -6,5 & 14 & -7,5 \\ 0 & 0 & 0 & -7,5 & 7,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,54167 + \frac{d\bar{u}}{dx}\Big|_{x_1} \\ -1,25 \\ -1,5 \\ -1,75 \\ -0,95833 + 2\frac{d\bar{u}}{dx}\Big|_{x_5} \end{pmatrix}.$$

Aplicando as condições de contorno  $y(1) = 0$  e  $y(2) = 0$ ,  $u_1 = 0$  e  $u_5 = 0$ . Daí

$$\begin{pmatrix} 4,5 & -4,5 & 0 & 0 & 0 \\ -4,5 & 10 & -5,5 & 0 & 0 \\ 0 & -5,5 & 12 & -6,5 & 0 \\ 0 & 0 & -6,5 & 14 & -7,5 \\ 0 & 0 & 0 & -7,5 & 7,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,54167 + \frac{d\bar{u}}{dx}\Big|_{x_1} \\ -1,25 \\ -1,5 \\ -1,75 \\ -0,95833 + 2\frac{d\bar{u}}{dx}\Big|_{x_5} \end{pmatrix}.$$

Resolvendo o sistema de equações pode-se determinar a solução aproximada nos nós 2, 3, 4, e os gradientes das extremidades do elemento,

$$u_2 = -0,4026 \quad u_3 = -0,5047 \quad u_4 = -0,360$$

$$\frac{d\bar{u}}{dx}\Big|_{x_1} = -2,350 \quad \frac{d\bar{u}}{dx}\Big|_{x_5} = 1,831$$

A Figura 9 mostra uma comparação gráfica entre a solução exata e as soluções aproximadas pelo método de Galerkin, adotando um único elemento, dois elementos e quatro elementos.

Podemos verificar, que ao adotar o domínio total, ou seja um único elemento, os resultados que satisfazem a solução são apenas os valores de contorno, tendo uma grande discrepância de resultados em quase todo o domínio. Por outro lado, quando é realizado a discretização do domínio em dois ou quatro elementos, os valores encontrados para cada nó são idênticos aos valores exatos do problema, como foi utilizado um polinômio linear os valores entre os nós formam uma reta.

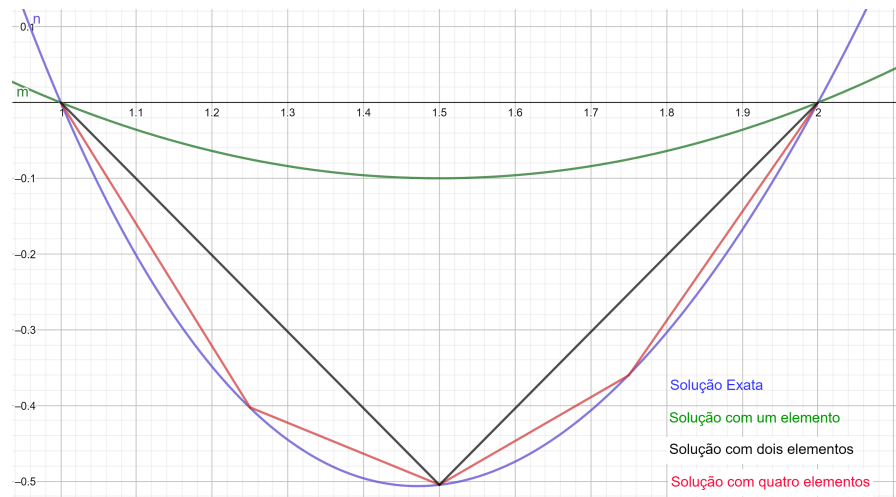


Figura 9: Comparativo entre a solução exata e as soluções aproximadas

Fonte: Elaborado pelos autores

Para o método de resíduos ponderados, de forma geral, o procedimento é aumentar o número de funções teste para obter novas soluções, e em seguida observar o comportamento da solução ao introduzir essas variações. Se a solução mudar muito pouco quando aumentamos o número de funções teste, podemos dizer que a solução converge [6].

A equação diferencial ordinária utilizada neste artigo sugere que, ao aumentar o número de elementos da discretização do domínio, a solução aproximada converge para a solução exata da equação diferencial. Esta questão de convergência deve ser feita em todas as técnicas de solução aproximada. Se não sabemos a solução exata, devemos desenvolver alguns critérios para determinar o grau de precisão da solução aproximada.

## 5 Considerações Finais

Neste artigo realizou-se o desenvolvimento do método dos elementos finitos, em especial o método de Galerkin, aplicado à análise estrutural baseada nos procedimentos de formulação de elemento retilíneo (unidimensional), que de acordo com seu comportamento mecânico em resposta ao que é pedido, pode ser aplicado a diferentes estruturas, como: barra, viga e quadro. Esses elementos retilíneos podem ser combinados para formar estruturas reticuladas compostas de elementos unidimensionais interconectados, formando sólidos planos ou volumétricos. Pois, todas as estruturas da vida real são tridimensionais, no entanto, os engenheiros fazem as aproximações com uma estrutura

unidimensional.

Devido o elevado número de operações a serem utilizados pela análise por elementos finitos para as estruturas do cotidiano, em alguns casos, a sua resolução de forma algébrica é bastante dispendiosa, sendo essencial a utilização de softwares para análise por elementos finitos. No entanto, o projetista deve ter conhecimento dos métodos algébricos, para que possa interpretar os resultados obtidos pelo software adotado no desenvolvimento do projeto.

## Referências

- [1] C. M. Araújo, *Desenvolvimento de um Algoritmo para a Análise Estática e Dinâmica de Treliças Planas*. Universidade Federal Fluminense. Niterói, 2015. Disponível em: <https://app.uff.br/riuff/handle/1/798>. Acesso em: 15 mar. de 2019.
- [2] A. F. M. Azevedo, *Método dos Elementos Finitos*. Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto Portugal. 1ª ed. Abril, 2003.
- [3] M. M. Cavalcanti e V. N. Domingos Cavalcanti, *Introdução às Equações Diferenciais Parciais*. Maringá: UEM/DMA, 2010.
- [4] Kim, N. e B. V. Sankar, *Introdução à Análise e ao Projeto em Elementos Finitos*. Rio de Janeiro: LTC, 2011.
- [5] M. A. Marconi e E. M. Lakatos, *Técnicas de Pesquisa: Planejamento e execução de pesquisas, amostragens e técnicas de pesquisas, elaboração, análise e interpretação de dados*. 6ª edição, São Paulo: Atlas, 2007.
- [6] J. G. P. Molina, *Fundamentos Del Método de Elemento Finito*. Primeira Edición, U. M. S. A.: 2010.
- [7] V. Rezende, *O Método de Galerkin*. Universidade Estadual de Maringá, 2005. Disponível em: [http://www.sites.uem.br/pma/discente/defesas-dissertacoes/veridiana\\_rezende.pdf](http://www.sites.uem.br/pma/discente/defesas-dissertacoes/veridiana_rezende.pdf). Acesso em: 20 de mar. de 2020.
- [8] S. M. M. Rotta, *O Método dos Elementos Finitos Aplicado à Análise Linear de Vigas de Euler-Bernouli: implementação computacional do elemento finito unidimensional com função de aproximação de quinto grau*. Disponível em: [http://repositorio.roca.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/5217/1/CM\\_COECI\\_2014\\_2.13.pdf](http://repositorio.roca.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/5217/1/CM_COECI_2014_2.13.pdf). Acesso em: 30 de set. de 2019.

- [9] R. Silva, *Método Numérico, Analítico e Experimental: Concorrentes ou complementares na engenharia?* Tecnologia de Simulação, Instituto ESSI. 2017. Disponível em: <https://www.esss.co/blog/metodo-numerico-analitico-e-experimental-concorrentes-ou-complementares-na-engenharia/> Acesso em: 20 de set. de 2019.
- [10] R. M. Souza *O Método dos Elementos Finitos Aplicado ao Problema de Condução de Calor*. Universidade Federal do Pará. Belém. 2003. Disponível em: [http://www.ufpa.br/nicae/integrantes/remo\\_souzaTrabPublicados/Apostilas/ApostilaElementosFinitosNiCAE.pdf](http://www.ufpa.br/nicae/integrantes/remo_souzaTrabPublicados/Apostilas/ApostilaElementosFinitosNiCAE.pdf). Acesso em: 15 set. de 2019.

**Submetido em 22 de Abril de 2020.**

**Aceito em 25 de Maio de 2020.**