Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática

https://doi.org/10.34179/revisem.v5i2.13999

GENERALIZAÇÃO DE UMA SEQUÊNCIA INFINITA DEFINIDA POR RADICAIS ENCAIXADOS

Thiago Rodrigues Cavalcante
Universidade Federal do Tocantins
thiago.cavalcante@uft.edu.br
Élis Gardel da Costa Mesquita
Universidade Federal do Tocantins - UFT
Valdemiro Carlos dos Santos Silva Filho
Universidade Federal do Tocantins - UFT

Resumo

Neste trabalho, realizamos um estudo de uma classe de sequências de números reais definidas por radicais encaixados, a qual generaliza sequências bem conhecidas na teoria. Mais precisamente, estaremos interessadas em analisar dois tipos de sequências, dadas pelas seguintes recorrências:

$$\begin{aligned} x_0 &= \sqrt{x}, \quad x_n = \sqrt{x + \sqrt{x_{n-1}}}, \quad n \in \mathbb{N}, \\ \overline{x_0} &= \sqrt{x}, \quad \overline{x_n} = \sqrt{x + y\sqrt{\overline{x_{n-1}}}}, \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

para x e y números reais não negativos.

Abstract

In this work, we study a class of sequence of real numbers defined by nested radicals, which generalizes well known sequences in the theory. More precisely, we will be interested in analyzing two types of sequences, given by recurrences:

$$\begin{aligned} x_0 &= \sqrt{x}, \quad x_n = \sqrt{x + \sqrt{x_{n-1}}}, \quad n \in \mathbb{N}, \\ \overline{x_0} &= \sqrt{x}, \quad \overline{x_n} = \sqrt{x + y\sqrt{\overline{x_{n-1}}}}, \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

for x and y non-negative real numbers.

1 Introdução

É de conhecimento da comunidade acadêmica que grande variedade de problemas, provenientes de diversas áreas do conhecimento, recaem no estudo de sequências de números reais. Um tipo de sequência bem conhecida, e que desperta muita curiosidade, é aquele onde as sequências são definidas através de múltiplas composições de radicais. Tanto em cursos de graduação, em disciplinas como Cálculo e Introdução a Análise, como em cursos de pós-graduação, nas disciplinas de Fundamentos de Cálculo e Análise, existem exemplos, exercícios e aplicações que envolvem sequências de radicais encaixados. Neste trabalho, será feita uma generalização de uma sequência, que com absoluta certeza, o leitor já se deparou em algum momento de sua carreira acadêmica. A sequência em questão é definida pela seguinte recorrência não linear:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \sqrt{2}\\
a_1 &= \sqrt{2+\sqrt{2}}\\
a_2 &= \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\\
\vdots &= \vdots\\
a_n &= \sqrt{2+a_{n-1}}.
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

O objetivo deste trabalho é generalizar o radicando 2 da recorrência (1.1), para um número arbitrário x e além disso realizar um estudo detalhado em uma sequência dada por $x_n = \sqrt{x + y \cdot x_{n-1}}$, para x e y arbitrários. Este trabalho tem como base o estudo feito pelos pesquisadores *Seth Zimmerman e Chungwu Ho* [10], no qual eles fazem um estudo semelhante. Entretanto, aqui fazemos as demonstrações de maneira bem detalhada e de formas diferentes. Além disso, elucidamos os resultados com mais exemplos e escrevemos e demonstramos os resultados de forma mais simples para o leitor, de modo que o mesmo, com conhecimento mínimo no tema, fique familiarizado com as demonstrações aqui realizadas, o que não acontece no trabalho [10].

Antes de partimos para a parte mais técnica do trabalho, vamos destacar alguns trabalhos, aplicações, exercícios e exemplos que envolvem algum tipo de sequências definidas por radicais encaixados.

O famoso matemático indiano *Srinivasa Ramanujan,* lançou como desafio determinar qual o valor da expressão dada por radicais encaixados

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\cdots}}}.$$

Após esperar aproximadamente seis meses sem sucesso, ele mesmo forneceu uma equação que gera a solução do problema posto, a qual é dada por:

$$x+n+a=\sqrt{ax+(n+a)^2+x\sqrt{a(x+n)+(n+a)^2+(x+n)\sqrt{\cdots}}}. \tag{1.2}$$

Considerando $x=2, n=1$ e $a=0$ em (1.2), obtemos:

$$3=2+1+0=\sqrt{0\cdot 2+(1+0)^2+2\sqrt{0(2+1)+(1+0)^2+(2+1)\sqrt{\cdots}}},$$

ou seja, encontramos o número 3 como solução da expressão. Este mesmo problema pode ser encontrado no banco de questões da OBMEP-Olimpíadas Brasileira de Matemática das Escolas Públicas [2]. Além deste problema, as questões 22 e 23, do mesmo banco de questões, também envolvem sequências de radicais encaixados.

Um outro matemático que segue essa mesma vertente é o famoso francês *François Viète*. Este trabalhou com sequências infinitas de radicais encaixados dentre as quais se destacam, $(\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \cdots)$ e $(\sqrt{2}, \sqrt{2-\sqrt{2}}, \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \cdots)$. Estas sequências estão relacionadas com o número irracional π e tal relação é estabelecida através dos limites

$$\frac{2}{\pi}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdot\ldots \quad \text{e} \quad 2^k\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{k \text{ vezes}}}\to\frac{\pi}{2}.$$

Estas identidades são conhecidas como *Fórmulas de Viète*. Para mais detalhes e outras informações sugerimos [3, 4, 5, 8, 9] e referências neles contidas.

Os autores *Zimmerman e Ho*, em [10], fizeram um estudo detalhado de algumas sequências de radicais encaixados que inclui a sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e deram um passo na direção a qual pretendemos seguir. Generalizando o radicando, trocando 2 por um número real positivo a, obtendo assim $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}=(\sqrt{a}, \sqrt{a+\sqrt{a}}, \cdots)$, eles demonstraram que a sequência é convergente e obtiveram a seguinte expressão para o limite

$$\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots}}}=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}. \tag{1.3}$$

Vale destacar que basta fazer $a=1$ em (1.3), que obtemos o conhecido número áureo $(1+\sqrt{5})/2$, ou seja,

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Diversas questões sobre radicais encaixados, ou que os utilizam para resolver tais problemas, são exploradas em olimpíadas de matemática no mundo todo além de estarem em diversos livros, dentre os quais podemos destacar o livro de Fundamentos de Cálculo [7] do curso de mestrado profissional-PROFMAT. Como exemplo de questão, podemos citar a Questão 6 do Nível 3 do banco de questões de 2016 da OBMEP [1], na qual se pede para encontrar o valor da expressão dada em radicais encaixados:

$$\sqrt{1+2014\sqrt{1+2015\sqrt{1+2016\cdot 2018}}}. \tag{1.4}$$

A solução desta questão se dá, utilizando que $(n-1)(n+1)+1=n^2$, para qualquer $n\in\mathbb{R}$. Em particular, fazendo $n=2017$ na identidade anterior, analisando dentro do último radical da expressão (1.4) e seguindo o mesmo processo, obtemos:

$$\begin{aligned}\sqrt{1+2014\sqrt{1+2015\sqrt{1+2016\cdot 2018}}} &= \sqrt{1+2014\sqrt{1+2015\sqrt{2017^2}}}\\ &= \sqrt{1+2014\sqrt{1+2015\cdot 2017}}\\ &= \sqrt{1+2014\sqrt{2016^2}}\\ &= \sqrt{1+2014\cdot 2016}\\ &= \sqrt{2015^2}\\ &= 2015.\end{aligned}$$

Portanto

$$\sqrt{1+2014\sqrt{1+2015\sqrt{1+2016\cdot 2018}}} = 2015.$$

O questionamento que fica é, será que podemos generalizar este fato e encontrar uma quantidade finita de radicais encaixados que convergem para qualquer número, por exemplo o 2020? E se fossem infinitos os radicais encaixados, como o dado em (1.1), também garantiríamos a convergência? Neste trabalho vamos generalizar e analisar para que valores conseguimos garantir tal convergência.

2 Preliminares

A ideia utilizada na obtenção dos principais resultados é garantir que a sequência em questão é monótona (não crescente ou não decrescente) e limitada. Utilizando um resultado clássico do estudo de sequências, o qual garante que *toda sequência monótona limitada é convergente* [6], provamos alguns dos teoremas principais. Além disso, fazendo uso de uma equação característica e da unicidade do limite de sequências, determinamos para qual valor a sequência de radicais encaixados converge.

Inicialmente vamos garantir a convergência da sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada em (1.1), ou seja, vamos provar o seguinte resultado.

Proposição 2.1. *A sequência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots\right)$ *é convergente e o seu limite é igual a* 2.

Demonstração. Note que, como $\sqrt{2} > 0$, então $a_1 = \sqrt{2} < \sqrt{2+\sqrt{2}} = a_2$. Utilizaremos indução sobre n para provar que a sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente e portanto monótona. Temos que $a_1 < a_2$, como descrito anteriormente. Iremos supor que $a_n < a_{n+1}$ e provaremos que $a_{n+1} < a_{(n+1)+1}$, garantindo assim o crescimento da sequência. Utilizando a definição da sequência, dada pela recorrência $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$, com $a_0 = \sqrt{2}$, e a hipótese de indução $a_n < a_{n+1}$, temos que

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} < \sqrt{2 + a_{n+1}} = a_{n+2},$$

concluindo assim que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente. Devido ao seu crescimento, a sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada inferiormente por $a_0 = \sqrt{2}$.

Neste momento, novamente utilizando indução sobre n, vamos provar que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada superiormente e concluir que se trata de uma sequência limitada. Temos que $a_0 = \sqrt{2} < 2$, $a_1 = \sqrt{2+\sqrt{2}} < \sqrt{2+2} = 2$. Suponha que $a_n < 2$. Por definição $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} < \sqrt{2+2} = 2$. Portanto $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada superiormente por 2.

Na verdade podemos calcular explicitamente o limite dessa sequência. Dada a relação de recorrência $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$, denotando por l o limite da sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, o qual garantimos a existência anteriormente e aplicando o limite em ambos os lados da equação e eliminando o radical, obtemos a equação quadrática $l^2 - l - 2 = 0$ cujas raízes são $l = -1$ e $l = 2$. Devido a lei de formação de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, o seu limite l deve ser não negativo, ou seja, devemos ter $l = 2$. $\square$

Neste momento, substituiremos o número 2 por um número real qualquer x e vamos garantir para quais valores deste x a sequência em questão converge. Mais precisamente, vamos provar o seguinte resultado:

Teorema 2.2. *Para todo número real* $x > 0$, *a sequência de radicais encaixados*

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sqrt{x}, \sqrt{x+\sqrt{x}}, \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}, \ldots\right)$$

é convergente.

Demonstração. A demonstração é análoga à demonstração da Proposição 2.1 e pode ser encontrada em [10]. □

Denotando por L o limite da sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, garantido pelo **Teorema 2.2**, este por sua vez é dado pela raiz positiva da equação quadrática $L^2 - L - x = 0$, ou seja, se L denota tal limite, então

$$L = \frac{1+\sqrt{1+4x}}{2}. \tag{2.1}$$

A ideia agora é determinar para quais valores de x a expressão (2.1) faz sentido, ou seja, existe um número real L de tal modo que

$$x_n \longrightarrow L.$$

Em suma, provaremos o seguinte.

Proposição 2.3. *Sejam um número real $r > 1$ e L definido em (2.1). Então existe um único número real x, tomado como $x = r(r-1)$, tal que $L = r$.*

Demonstração. Dado $r > 1$, faça $x = r(r-1)$ em (2.1). Deste modo, obtemos:

$$L = \frac{(1+\sqrt{1+4r(r-1)}\,)}{2} = \frac{(1+\sqrt{1+4r^2-4r}\,)}{2} = \frac{(1+\sqrt{(2r-1)^2}\,)}{2} = r.$$

A unicidade vem da injetividade de $x = r(r-1)$, para $r > 1$. □

O resultado anterior, nos garante que é possível escrever um número real $r > 1$ como limite de sequências de radicais encaixados. Para isso, basta tomar $x = r(r-1)$ e utilizar a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemplo 2.4. Seja $r = 4$, então temos que o valor $x = 4(4-1) = 12$ e, segue do resultado anterior que

$$4 = \sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12+\cdots}}}.$$

Supondo $r = 7$, então temos que o valor $x = 7(7-1) = 42$ e consequentemente

$$7 = \sqrt{42+\sqrt{42+\sqrt{42+\cdots}}}.$$

Podemos determinar diversos exemplos de números que são escritos como limite de sequências de radicais encaixados da forma descrita pela sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. A dúvida que fica, a qual vamos responder nos resultados principais é, e se mudarmos o radicando da sequência nas formas

$$\overline{(x_n)}_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sqrt{x}, \sqrt{x + y\sqrt{x}}, \sqrt{x + y\sqrt{x + y\sqrt{x}}}, \dots\right),$$

será que podemos garantir a convergência de $\overline{(x_n)}_{n\in\mathbb{N}}$? Podemos escrever números como limite de sequências desse tipo?

3 Resultados Principais

3.1 Sequências da forma $\sqrt{x + y\sqrt{x + y\sqrt{x \cdots}}}$

Sequências deste tipo, podem ser definidas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} s_1 &:= s_1(x,y) = \sqrt{x}, \\ s_{n+1} &:= s_{n+1}(x,y) = \sqrt{x + y \cdot s_n}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Para facilitar no estudo, vamos considerar a seguinte sequência auxiliar:

$$r_n = \frac{1}{y} s_n.$$

Note que $r_1 = \dfrac{1}{y} s_1 = \dfrac{1}{y}\sqrt{x} = \sqrt{\dfrac{x}{y^2}}$ e, para cada $n \geq 1$, temos que:

$$r_{n+1} = \frac{1}{y} s_{n+1} = \frac{1}{y}\sqrt{x + y \cdot s_n} = \sqrt{\frac{x}{y^2} + \frac{1}{y} \cdot s_n} = \sqrt{\frac{x}{y^2} + r_n}.$$

Portanto, obtemos que esta sequência $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é definida pela seguinte recorrência:

$$\begin{aligned} r_1 &:= r_1(x,y) = \frac{1}{y}\sqrt{x}, \\ r_{n+1} &:= r_{n+1}(x,y) = \sqrt{\frac{x}{y^2} + r_n}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Ao observarmos a definição da sequência $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$, verifica-se que se trata de uma sequência dada por radicais encaixados similar à estudada no Teorema 2.2 substituindo

x por $\dfrac{x}{y^2}$. Desta forma, garantimos que a sequência $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge e além disso, utilizando a mesma ideia do Teorema 2.3, obtemos que a sequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaz:

$$s_n = y \cdot r_n \longrightarrow \frac{y \cdot (1 + \sqrt{1 + \frac{4x}{y^2}}\,)}{2} = \frac{y + \sqrt{y^2 + 4x}}{2}.$$

Por outro lado, fazendo n tender ao infinito em ambos os lados da recorrência dada em (3.1), e denotando por L_s o limite da sequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, temos que:

$$L_s^2 - y \cdot L_s - x = 0,$$

cuja raiz não negativa é $L_s = \dfrac{y + \sqrt{y^2 + 4x}}{2}$. Com isso, provamos o teorema a seguir.

Teorema 3.1. *Para números reais não negativos $x\,, y$ a sequência de radicais encaixados $(s_n)_n = \left(\sqrt{x}, \sqrt{x + y\sqrt{x}}, \sqrt{x + y\sqrt{x + y\sqrt{x}}}, \cdots\right)$ é convergente e seu limite é dado por*

$$L_s = \frac{y + \sqrt{y^2 + 4x}}{2}.$$

Além disso, dados números positivos r, y com $r > y$, existe um único $x = r(r - y)$ tal que $L_s = r$.

Demonstração. Resta apenas demonstrar a segunda parte. Na Proposição 2.3, obtemos o número $x = r(r - 1)$ de tal forma que $L = r$. Aqui, substituímos x por $\dfrac{x}{y^2}$ donde segue que $\dfrac{x}{y^2} = \dfrac{r}{y}\left(\dfrac{r}{y} - 1\right)$ ou $x = r(r - y)$ e daí teremos:

$$L_s = \frac{y + \sqrt{y^2 + 4r(r - y)}}{2} = \frac{y + \sqrt{4r^2 - 4ry - y^2}}{2} = \frac{1 + \sqrt{(2r - y)^2}}{2} = r.$$

$\square$

Para exemplificar este resultado, basta atribuirmos o valor que queremos para $L_s = r$ em $x = r(r - y)$, da seguinte forma,

Exemplo 3.2. Supondo $r = 7$ e $y = 3$, obtemos o valor $x = 7(7 - 3) = 28$ e, segue do resultado anterior, que

$$7 = \sqrt{28 + 3\sqrt{28 + 3\sqrt{28 + \ldots}}}.$$

Se $y = 2$, temos que

$$7 = \sqrt{35 + 2\sqrt{35 + 2\sqrt{35 + \ldots}}}.$$

Observação 3.3. É interessante observar que, para $r = y$, obtemos $x = r(r - r) = 0$ e assim temos que

$$y = \sqrt{y\sqrt{y\sqrt{y\sqrt{\cdots}}}}.$$

Podemos pensar no caso em que y não seja estritamente um número inteiro. Mais precisamente, somos capazes de provar o seguinte resultado:

Corolário 3.4. *Seja $r > 1$ um inteiro. Para cada divisor q de r e cada inteiro p $0 < p < r \cdot q$, sejam $y = \frac{p}{q}$ e $x = r(r - y)$. Então $r = \lim_{n\to\infty} s_n$. De fato, essas são as possíveis escolhas para x e y quando x é um inteiro positivo e y um número racional.*

Demonstração. A demonstração desse resultado é semelhante ao que foi discutido no cálculo de L_s. □

Exemplo 3.5. Tomando $r = 7$, temos que $0 < y = \frac{p}{q} < 7$ e $x = 7(7 - y)$. Para facilitar as contas, vamos supor em todos os caso $q = 7$. Mas deixamos claro que ele pode valer qualquer valor não nulo.

$$7 = \sqrt{48 + \tfrac{1}{7}\sqrt{48 + \tfrac{1}{7}\sqrt{48 + \cdots}}} \quad \text{(supondo } p = 1\text{)}.$$
$$7 = \sqrt{43 + \tfrac{6}{7}\sqrt{43 + \tfrac{6}{7}\sqrt{43 + \cdots}}} \quad \text{(supondo } p = 6\text{)}.$$

É importante observar que o valor de p deve satisfazer $0 \leq p < 49$, pois caso contrário não estaria bem definida a sequência de radicais encaixados. Por exemplo, se $p = 49$, então $y = 7 \implies x = 0$, e $p > 49$ implicaria em $x < 0$, que não define radicais no corpo dos reais.

Neste momento vamos trocar o sinal $+$ dos radicais encaixados por $-$, mais precisamente estaremos interessados em estudar sequências do seguinte tipo de sequências.

3.2 Sequências da forma $\sqrt{x - y\sqrt{x - y\sqrt{x - \cdots}}}$

Inicialmente vamos considerar $y = 1$ e neste sentido, vamos considerar a sequência definida por

$$
\begin{aligned}
u_1 &:= u_1(x) = \sqrt{x}, \\
u_2 &:= u_2(x) = \sqrt{x - u_1} = \sqrt{x - \sqrt{x}}, \\
u_3 &:= u_3(x) = \sqrt{x - u_2} = \sqrt{x - \sqrt{x - \sqrt{x}}} \\
u_4 &:= u_4(x) = \sqrt{x - u_2} = \sqrt{x - \sqrt{x - \sqrt{x - \sqrt{x}}}}, \\
u_5 &:= u_5(x) = \sqrt{x - u_2} = \sqrt{x - \sqrt{x - \sqrt{x - \sqrt{x - \sqrt{x}}}}}, \\
&\vdots \\
u_{n+1} &:= u_{n+1}(x) = \sqrt{x - u_n}.
\end{aligned}
$$

Analisando a sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida anteriormente, para que a mesma faça sentido, deve se ter obrigatoriamente $x - \sqrt{x} \geq 0$, o que equivale a $x \geq 1$. Para garantir a monotonicidade e a limitação dessa sequência, vamos estudar duas subsequências de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Mais precisamente, utilizaremos indução matemática na sequência formada pelos termos ímpares e na definida pelos índices pares.

Note que $u_2 = \sqrt{x - \sqrt{x}} > 0$, via propriedades fundamentais, conseguimos provar que $u_4 = \sqrt{x - \sqrt{x - \sqrt{x - \sqrt{x}}}} > u_2$. Suponhamos que este resultado seja válido para $n \in \mathbb{N}$ arbitrário, ou seja, $u_{2n} \leq u_{2n+2}$. Vamos provar que o mesmo vale para o sucessor de n, $n+1$, isto é, que $u_{2(n+1)} \leq u_{2(n+1)+2}$ e concluir o resultado. Segue da definição de u_n que

$$
\begin{aligned}
u_{2(n+1)} = u_{2n+2} &= \sqrt{x - \sqrt{u_{2n+1}}} \\
&= \sqrt{x - \sqrt{x - u_{2n}}}.
\end{aligned}
$$

Pela hipótese de indução, $u_{2n} \leq u_{2n+2}$, temos que

$$
\begin{aligned}
u_{2n+2} &\leq \sqrt{x - \sqrt{x - u_{2n+2}}} \\
&= \sqrt{x - \sqrt{u_{2n+3}}} \\
&= u_{2n+4} = u_{2(n+2)},
\end{aligned}
$$

provando assim que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência crescente.

Para garantir a limitação e concluir o resultado, vamos utilizar novamente indução sobre n. Como $u_1 > 0$ e $x > 1$, então $x - u_1 < x$, o que implica em $u_2 = \sqrt{x - u_1} < \sqrt{x}$. Novamente, vamos supor que este fato seja verdadeiro para um $n \in \mathbb{N}$ arbitrário, ou seja, que $u_{2n} < \sqrt{x}$ e provar que $u_{2(n+1)} < \sqrt{x}$. Observe que, de $u_{2n} < \sqrt{x}$, temos que

$$-u_{2n+1} = -\sqrt{x - u_{2n}} < -\sqrt{x - \sqrt{x}}. \tag{3.3}$$

Por outro lado, pela hipótese de indução, segue que

$$\begin{aligned} u_{2(n+1)} = u_{2n+2} &= \sqrt{x - \sqrt{x - u_{2n+1}}} \\ &\overset{(3.3)}{<} \sqrt{x - \sqrt{x - \sqrt{x}}} \\ &= \sqrt{x - u_2} < \sqrt{x}, \end{aligned}$$

onde a última desigualdade segue do fato de $u_2 \geq 0$. Concluímos então que a sequência $0 < u_{2n} < \sqrt{x}$ e portanto limitada e consequentemente a sequência $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente.

Utilizando um raciocínio análogo, garantimos que a sequência formada pelos índices ímpares satisfaz $0 < u_{2n+1} < \sqrt{x}$ e é decrescente, logo convergente. Agora vamos provar que as duas sequências convergem para o mesmo limite, garantindo assim que a sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente. Para garantir este fato, inicialmente vamos provar que $u_{n+1} + u_n \geq \sqrt{x}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

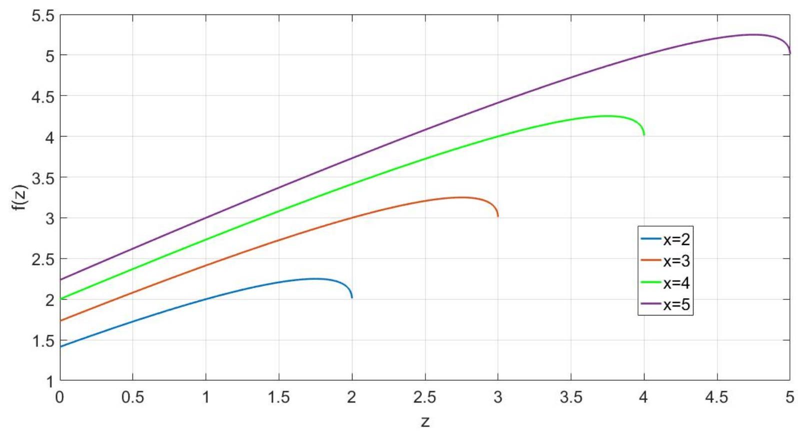
Note que $u_{n+1} + u_n = \sqrt{x - u_n} + u_n$. Deste modo, vamos considerar a seguinte função $f(z) = \sqrt{x - z} + z$, associada à sequência $(u_{n+1} + u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Iremos estudar o crescimento de f e provar que $z = 0$ é valor mínimo de f, ou seja, $f(u_n) = u_{n+1} + u_n \geq f(0) = \sqrt{x}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para demonstrar este fato, ou seja, que 0 é valor mínimo de f, observe que f está definida para $z \in [0, x]$. Usando a derivada $f'(z)$, para $z \in [0, x]$, mostramos que f é crescente no intervalo $\left[0, x - \frac{1}{4}\right]$, atinge seu máximo no ponto $z = (x - \frac{1}{4})$ e decresce para $z > x - \frac{1}{4}$.

Por outro lado, temos que $f(0) = \sqrt{x}$ e $f(x) = x$, são os valores das funções nos extremos do intervalo de definição e tem valor máximo $f(x - \frac{1}{4}) = x + \frac{1}{4}$. Portanto o valor mínimo da função será $f(0)$ ou $f(x)$, que são os valores que a função assume nos extremos do intervalo. Utilizando o *Teorema de Weierstrass*, [6, 7], o qual garante que toda função contínua definida em um compacto atinge máximo e mínimo. Neste caso, como $f(x - \frac{1}{4}) = x + \frac{1}{4}$ é valor máximo, temos que o valor mínimo de f é atingido nos extremos, $f(0) = \sqrt{x}$ ou $f(x) = x$.

Portanto, para x tomado suficientemente grande ($x > 1$), o nos interessa por estamos trabalhando com sequências, 0 é valor minimal para f, ou seja, $f(z) \geq \sqrt{x}$ para todo

$z \in [0, x]$. Em particular, $u_{n+1} + u_n \geq \sqrt{x}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. O que foi discutido anteriormente, fica mais claro analisando a figura abaixo:



Utilizando o que foi mostrado anteriormente, a definição da sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada em (3.2) e que $|u_{n+1} - u_n|\,(u_{n+1} + u_n) = \left|u_{n+1}^2 - u_n^2\right|$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - u_n| &= \frac{\left|u_{n+1}^2 - u_n^2\right|}{u_{n+1} + u_n} \\ &= \frac{|x - u_n - x + u_{n-1}|}{u_{n+1} + u_n} \\ &\leq \frac{|u_n - u_{n-1}|}{\sqrt{x}}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Mostramos anteriormente que as subsequências $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ e $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergem e, como $x > 1$, segue de (3.4) que estas convergem para o mesmo limite.

Lembramos que,

Afirmação 3.6. *se* $\lim\limits_{n\to\infty} u_{2n} = U$ *e* $\lim\limits_{n\to\infty} u_{(2n+1)} = U$*, então* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = U$.

Ver, por exemplo, [6]. Consequentemente, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente para qualquer número real $x > 1$. Denotando por L_u o limite garantido anteriormente e fazendo n tender ao infinito em (3.2), obtemos uma equação do segundo grau em L_u, $L_u^2 + L_u - x = 0$. Segue que $L_u = \dfrac{-1 + \sqrt{1 + 4x}}{2}$. Utilizando um raciocínio análogo ao que foi feito na Proposição 2.3, para $x = r(r+1)$, obtemos $L_u = r$.

Exemplo 3.7. Considerando $r = 4$, temos que o valor $x = 4(4 + 1) = 20$ e segue que

$$4 = \sqrt{20 - \sqrt{20 - \sqrt{20 - \cdots}}}.$$

Para $r = 6$, temos que $x = 6(6 + 1) = 42$ e

$$6 = \sqrt{42 - \sqrt{42 - \sqrt{42 - \cdots}}}.$$

No sentido de generalizar a sequência para $y \neq 1$, inicialmente vamos restringir para o caso em que y é positivo. Como foi feito no estudo das sequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida em (3.1), vamos utilizar a seguinte sequência auxiliar:

$$\begin{aligned} v_1 &:= v_1(x, y) = \sqrt{x}, \\ v_{n+1} &:= v_{n+1}(x, y) = \sqrt{x - y \cdot v_n}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Trabalhado de forma análoga ao que foi feito no caso de $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, não é difícil mostrar que

$$v_n = y \cdot u_n \left(\frac{x}{y^2}\right), \tag{3.6}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue da definição de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que obrigatoriamente deve se ter $\frac{x}{y^2} \geq 1$, ou seja, a sequência $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ só esta definida para $x \geq y^2$. Como foi verificado anteriormente, a sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente, logo pela identidade (3.6), temos que a sequência $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ também é convergente. Agora, vamos verificar para quais valores de x e y conseguimos escrever um número como limite de sequências do tipo $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Teorema 3.8. *Sejam r, x e y números positivos. Então $L_v = \lim_{n\longrightarrow\infty} v_n$ se, e somente se,*

i) $0 < y < \Phi \cdot r$,

ii) $x = r(r + y)$,

onde $L_v = r$ e $\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ é o conhecido número áureo.

Demonstração. Fazendo n tender ao infinito em (3.6), obtemos $L_v = y \cdot L_u \left(\frac{x}{y^2}\right)$, onde L_u é o limite da sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Não é difícil verificar que $L_v = \frac{-y + \sqrt{y^2 + 4x}}{2}$

e além disso, utilizando argumentos similares aos de resultados anteriores mostramos que, para $x = r(r + y)$, temos $L_v = r$, provando assim o item ii).

Para provar o item i), vamos verificar que a sequência $u_n\left(\frac{x}{y^2}\right)$ está bem definida. Como foi descrito anteriormente, a boa definição da sequência $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ acontece se, e somente se $x \geq y^2$. Usando a hipótese $x = r(r + y)$ e que a estimativa $x = y^2$ leva a sequências alternadas de y e 0, devemos ter $r(r + y) > y^2$, ou equivalentemente $y^2 - ry - r^2 < 0$, para r um valor fixado. Resolvendo a equação do segundo grau $y^2 - ry - r^2 = 0$, para cada r, obtemos como raízes:

$$y_1 = r\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \quad \text{e} \quad y_2 = r\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

Como estamos interessados nos valores de y tais que $y^2 - ry - r^2 < 0$, e a concavidade da parábola, determinada pelo gráfico de $g(y) = y^2 - ry - r^2$ é para cima, os valores procurados de y se encontram $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) r < y < \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) r$. Utilizando o fato de $y > 0$, podemos restringir esse intervalo para $0 < y < \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) r$, ou seja, $0 < y < \Phi \cdot r$, como queríamos demonstrar. □

Exemplo 3.9. Considerando $r = 7$, temos que $0 < y = 7 \cdot \Phi \approx 11,3$. Vamos considerar três valores para y. Inicialmente, supondo $y = 3$ obtemos o valor $x = 7(7 + 3) = 70$ e, segue que

$$7 = \sqrt{70 - 3\sqrt{70 - 3\sqrt{70 - 3\sqrt{\dots}}}}.$$

Se $y = 6$, temos que $x = 7(7 + 6) = 70$

$$7 = \sqrt{91 - 6\sqrt{91 - 6\sqrt{91 - 6\sqrt{\dots}}}}.$$

Como foi feito no caso em que envolvia sinal positivo nos radicais, vamos analisar o caso em que y não seja necessariamente um número inteiro.

Corolário 3.10. *Seja $r > 1$ um inteiro. Para cada divisor q de r e cada inteiro p $0 < \frac{p}{q} < \phi \cdot r$, seja $y = \frac{p}{q}$ e $x = r(r + y)$. Então $r = \lim\limits_{n\to\infty} v_n(x, y)$. De fato, essas são as possíveis escolhas para x e y quando x é um inteiro positivo e y um número racional.*

Demonstração. A demonstração é similar à feita anteriormente. □

Vamos elucidar esse resultado com um exemplos.

Exemplo 3.11. Supondo que $r = 5$ e que o quociente de y é $q = 3$, temos que $0 < y < \phi \cdot 5 \approx 8,090$,. Portanto, temos 24 possibilidades para o valor de p, já que teríamos $0 < y = \dfrac{p}{3} < \phi \cdot 5 \approx 8,090$. e daí teremos que $x = 5(5 + y)$ podemos assumir 24 valores possíveis.

$$5 = \sqrt{\frac{80}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{80}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{80}{3} - \cdots}}} \text{ (supondo } p = 1).$$

$$5 = \sqrt{\frac{325}{3} - \frac{50}{3}\sqrt{\frac{325}{3} - \frac{50}{3}\sqrt{\frac{325}{3} - \cdots}}} \text{ (supondo } p = 50).$$

Para finalizar o estudo dessas sequências definidas por radicais encaixados, vamos considerar o caso em que se alternam os sinais dentro dos radicais.

3.3 Sequências da forma $\sqrt{x \mp y\sqrt{x \pm y\sqrt{x \mp \cdots}}}$

Neste momento faremos um breve estudo de quando os radicais alternam os sinais, ou seja, estaremos interessados em estudar os casos do tipo

$$\sqrt{x - y\sqrt{x + y\sqrt{x - y\sqrt{x + y\sqrt{\ldots}}}}} \quad \text{e} \quad \sqrt{x + y\sqrt{x - y\sqrt{x + y\sqrt{x - y\sqrt{\ldots}}}}}$$

conhecida como sequência alternada de radicais encaixados. Os limites das sequência acima, dependem se o primeiro sinal é negativo ou positivo. Vamos analisar cada uma separadamente, para tal vamos definir as seguintes sequências auxiliares:

$$\begin{aligned} a_1 &:= a_1(x, y) = \sqrt{x + y\sqrt{x}}, \\ a_{n+1} &:= a_{n+1}(x, y) = \sqrt{x + y \cdot b_n}, \end{aligned} \tag{3.7}$$

onde a sequência b_n é definida por:

$$\begin{aligned} b_1 &:= b_1(x, y) = \sqrt{x - y\sqrt{x}}, \\ b_{n+1} &:= b_{n+1}(x, y) = \sqrt{x - y \cdot a_n}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Neste momento vamos analisar minuciosamente cada uma das sequências $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidas em (3.7) e (3.8) respectivamente. Inicialmente, vamos analisar a boa definição dessas sequências, mais precisamente vamos provar o seguinte resultado:

Lema 3.12. *Dados x e y dois números reais positivos. As sequências $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são bem definidas se, e somente se $x > y\sqrt{x+y\sqrt{x}}$.*

Demonstração. Note que

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sqrt{x+y\sqrt{x}}, \sqrt{x+y\sqrt{x-y\sqrt{x}}}, \sqrt{x+y\sqrt{x-y\sqrt{x+y\sqrt{x}}}}, \quad \dots\right) \quad \text{e}$$

$$(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sqrt{x-y\sqrt{x}}, \sqrt{x-y\sqrt{x+y\sqrt{x}}}, \sqrt{x-y\sqrt{x+y\sqrt{x-y\sqrt{x}}}}, \quad \dots\right).$$

Note que a_3 só esta definido se $x - y\sqrt{x+y\sqrt{x}} > 0$ ou de forma equivalente, $x > y\sqrt{x+y\sqrt{x}}$. Similarmente, temos que b_2 só esta definido para $x - y\sqrt{x+y\sqrt{x}} > 0$. Portanto verificamos a implicação direta, ou seja, a condição $x > y\sqrt{x+y\sqrt{x}}$ é necessária.

Reciprocamente, suponha que $x, y > 0$ e que $x > y\sqrt{x+y\sqrt{x}}$, vamos provar que a sequências $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ estão bem definidas. Para provar isso vamos garantir que, para todo inteiro $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq b_n \leq \sqrt{x} \leq a_n \leq \sqrt{x+y\sqrt{x}},$$

assim garantimos que ambas as sequências estão bem definidas.

Para mostrar essa estimativa, vamos utilizar indução sobre $n \in \mathbb{N}$. Por hipótese, temos que $x > y\sqrt{x+y\sqrt{x}}$. Como $x, y > 0$, então a última inequação implica em $x > y\sqrt{x} \Rightarrow b_1 = \sqrt{x-y\sqrt{x}} > 0$. Por outro lado, utilizando novamente $x, y > 0$, temos que $b_1 = \sqrt{x-y\sqrt{x}} < \sqrt{x-0} \Rightarrow b_1 < \sqrt{x}$. Para analisar o primeiro elemento a_1, basta observar que $a_1 = \sqrt{x+y\sqrt{x}} \geq \sqrt{x}$, concluindo assim que o resultado é válido para $n = 1$.

Suponhamos que seja verdadeira para um $n \in \mathbb{N}$ arbitrário,

$$0 \leq b_n \leq \sqrt{x} \leq a_n \leq \sqrt{x+y\sqrt{x}},$$

iremos provar que vale para o sucessor $n+1 \in \mathbb{N}$. Por definição, $b_{n+1} = \sqrt{x - y \cdot a_n}$. Como $a_n \leq \sqrt{x+y\sqrt{x}}$, segue que $x - y \cdot a_n \geq x - y\sqrt{x+y\sqrt{x}} > 0$, por hipótese. Logo a sequência b_{n+1} está bem definida. Além disso, y e a_n são números positivos, então $b_n = \sqrt{x - y \cdot a_n} \leq \sqrt{x} \Rightarrow x + y \cdot b_n \leq x + y \cdot \sqrt{x}$. Donde segue que

$$0 \leq b_{n+1} \leq \sqrt{x} \leq a_{n+1} = \sqrt{x + y \cdot b_n} \leq \sqrt{x + y \cdot \sqrt{x}},$$

como queríamos demonstrar. □

Será que a estimativa $x > y\sqrt{x + y\sqrt{x}}$, dada pelo Lema 3.12, é satisfeita para todos $x, y > 0$? Vamos responder a essa pergunta auxiliar no estudo da convergência das sequências $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Suponha que $x, y > 0$ sejam tais que satisfazem $x > y\sqrt{x + y\sqrt{x}}$. Dividindo ambos os membros da desigualdade por y^2, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{x}{y^2} &> \frac{1}{y}\sqrt{x + y\sqrt{x}} \\ &= \sqrt{\frac{x}{y^2} + \sqrt{\frac{x}{y^2}}}, \end{aligned}$$

donde segue que

$$\left(\frac{x}{y^2}\right)^2 - \frac{x}{y^2} > \sqrt{\frac{x}{y^2}}.$$

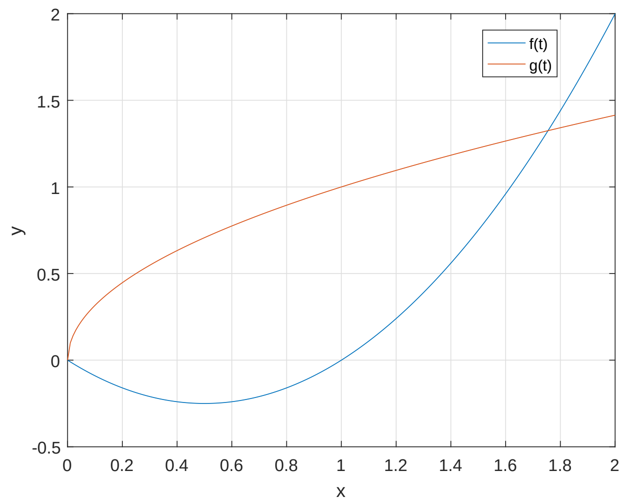
Os valores de x, y que estamos procurando, são valores positivos que satisfazem a inequação anterior. Para estudar tais valores, vamos considerar as seguintes funções $f(t) = t^2 - t$ e $g(t) = \sqrt{t}$ e analisar os valores de t para que se tenha $f(t) > g(t)$. Para facilitar o estudo, abaixo se encontram o gráfico destas funções, para $t > 0$. Ao analisar os gráficos de f e g abaixo, observamos que existe um constante $c > 0$, tal que $f(t) > g(t)$ para $t > c$. Mais precisamente, utilizando ferramentas numéricas, conseguimos resolver a equação $t^2 - t - \sqrt{t} = 0$, obtendo $c \approx 1,75$. Desta forma, para basta considerarmos $\frac{x}{y^2} > c$, ou seja, $x > c \cdot y^2$.

O próximo resultado irá garantir a convergência das sequências $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definidas em (3.7) e (3.8).

Teorema 3.13. *Seja c a constante definida anteriormente. Para qualquer número real r, sejam x e y números reais tais que*

i) $0 < y < \dfrac{2r}{(\sqrt{4c - 3}) - 1}$,

ii) $x = r^2 + yr + y^2$, *então* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = r$ *e* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = r + y$.



Demonstração. Seja $r > 0$ um número positivo arbitrário. Vamos provar que se $x, y > 0$ são tais que satisfazem i) e ii), então $x > y\sqrt{x + y\sqrt{x}}$. Já foi verificado que

$$x > y\sqrt{x + y\sqrt{x}} \Longleftrightarrow \left(\frac{x}{y^2}\right)^2 - \frac{x}{y^2} > \sqrt{\frac{x}{y^2}} \Longleftrightarrow \frac{x}{y^2} > c$$

Utilizando o item ii), segue que $\dfrac{r^2 + yr + y^2}{y^2} > c$, o que implica em $\left(\dfrac{r}{y}\right)^2 + \dfrac{r}{y} + 1 - c > 0$. Resolvendo a equação do segundo grau na variável $\dfrac{r}{y}$, obtemos:

$$\frac{r}{y} > \frac{-1 + \sqrt{4c - 3}}{2} \Longrightarrow 0 < y < \frac{2r}{\sqrt{4c - 3} - 1},$$

que é o item i) da hipótese. Concluímos que as hipóteses i) e ii) são equivalentes a determinar x, y que satisfaçam $x > y\sqrt{x + y\sqrt{x}}$. Segue do Lema 3.12 que as sequências $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são bem definidas com $\sqrt{x} \le a_n$ e da definição de $b_{n+1} = \sqrt{x - ya_n}$ que

$$\begin{aligned} |b_{n+1} - r| &= \frac{\left|b_{n+1}^2 - r^2\right|}{|b_{n+1} + r|} \\ &\le \frac{|(x - ya_n) - r^2|}{r}, \end{aligned}$$

para cada inteiro $n \in \mathbb{N}$. Utilizando o item ii), ou seja, que $x = r^2 + yr + y^2$, combinado com a última estimativa, temos que

$$|b_{n+1} - r| \leq y\frac{|(y+r) - a_n|}{r}. \tag{3.9}$$

Realizando uma manipulação matemática, mostramos que

$$|(y+r) - a_n| = \frac{|(y+r)^2 - a_n^2|}{|(y+r) + a_n|}. \tag{3.10}$$

Segue das estimativas (3.9) e (3.10) que

$$|b_{n+1} - r| \leq \frac{y \cdot \left|(y+r)^2 - a_n^2\right|}{r\,|(y+r) + a_n|}.$$

Pela definição de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ obtemos que

$$|b_{n+1} - r| \leq \frac{y \cdot \left|(y+r)^2 - (x + yb_{n-1})\right|}{r\,|(y+r) + a_n|}.$$

Novamente, usando que $x = r^2 + yr + y^2$, obtemos

$$\begin{aligned} |b_{n+1} - r| &\leq \frac{y \cdot \left|(y+r)^2 - (r^2 + yr + y^2 + yb_{n-1})\right|}{r\,|(y+r) + a_n|} \\ |b_{n+1} - r| &\leq \frac{y^2 \cdot |r - b_{n-1}|}{r \cdot |(y+r) + a_n|}. \end{aligned}$$

Agora, utilizando que $a_n \geq \sqrt{x}$, temos que

$$\begin{aligned} |b_{n+1} - r| &\leq \frac{y^2 \cdot |r - b_{n-1}|}{r\,|(y+r) + \sqrt{x}|} \\ &\leq \frac{1}{\frac{r}{y^2}\,|(y+r) + \sqrt{x}|}\,|b_{n-1} - r| \\ &= \frac{1}{\frac{r}{y}\left(1 + \frac{r}{y} + \sqrt{\frac{x}{y^2}}\right)}\,|b_{n-1} - r|\,. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Neste momento, vamos analisar o segundo membro da estimativa (3.11). Mostramos que $\dfrac{r}{y} > \dfrac{-1 + \sqrt{4c - 3}}{2}$, onde $c \approx 1,75$. Deste fato, segue que

$$\frac{r}{y} > \frac{-1 + \sqrt{4 \cdot 1,75 - 3}}{2} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \sqrt{\frac{x}{y^2}} = \sqrt{\frac{r^2 + ry + y^2}{y^2}} > 1$$

Reescrevendo os membros anteriores e utilizando que $\dfrac{r}{y} > \dfrac{1}{2}$, temos que

$$\frac{1}{\dfrac{r}{y}\left(1+\dfrac{r}{y}+\sqrt{\dfrac{x}{y^2}}\right)} < \frac{1}{\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{2}+1\right)} < 1.$$

Portanto, segue de (3.11), que

$$|b_{n+1} - r| \leq \alpha \, |b_{n-1} - r| \, , \tag{3.12}$$

onde $\alpha < 1$.

Neste momento, vamos analisar a estimativa (3.12) para o caso em que $n = 2$ e $n = 3$:

$$\begin{aligned} |b_3 - r| &\leq \alpha \, |b_1 - r| \\ |b_4 - r| &\leq \alpha \, |b_2 - r| \, . \end{aligned}$$

Note que, estudando os termos ímpares da sequência $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, temos a seguinte estimativa:

$$|b_7 - r| \leq \alpha \, |b_5 - r| \leq \alpha^2 \, |b_3 - r| \leq \alpha^3 \, |b_1 - r| \, , \text{ para } n = 2, 4, 6.$$

Assim, indutivamente temos que

$$|b_{n+1} - r| \leq \alpha^{n/2} \, |b_1 - r| \, , \text{ para } n = 2, 4, 6, 8, 10, \ldots .$$

Utilizando o mesmo argumento para o termos pares de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, temos

$$|b_{n+1} - r| \leq \alpha^{(n-1)/2} \, |b_2 - r| \, , \text{ para } n = 3, 5, 7, 9, 11, \ldots .$$

Como $\alpha < 1$, segue que $\alpha^{n/2} < \alpha^{(n-1)/2}$, para todo $n \geq 2$. Considere β um número real maior ou igual a $\max\{|b_1 - r| \, , |b_2 - r|\}$. Então,

$$|b_{n+1} - r| \leq \alpha^{(n-1)/2}\beta, \; \forall n \geq 2.$$

Portanto $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = r$. Uma outra maneira de demonstrar a convergência da sequência $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é utilizando a **Afirmação 3.6**. Mais precisamente, mostra-se que os termos pares e os ímpares da sequência $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergem para r e garantimos que $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = r$. Os detalhes desta prova ficam a cargo do leitor.

Utilizando a definição de $a_n = \sqrt{x + yb_n}$, esta convergência e a condição ii), obtemos que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{r^2 + yr + y^2 + yr} = \sqrt{(r+y)^2} = r + y$, garantindo assim a convergência das sequências $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

Como foi feito nos demais resultados desta seção, vamos destacar este com alguns exemplos. Inicialmente, não impomos condições para o número real r, que é o limite da sequência $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Entretanto, para cada r devemos determinar x e y tais que $0 < y < \dfrac{2r}{(\sqrt{4c-3})-1}$, onde $c \approx 1,75\ldots$, o que implica que $y < \dfrac{2r}{(\sqrt{41,76-3})-1} \approx 1,98r$, e $x = r^2 + yr + y^2$. Vamos começar analisando exemplos de sequências do tipo $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemplo 3.14. Seja $r = 3$, então $y < 1,98 \cdot 7 \approx 13,86$. Considerando $y = 1,2,3$ e utilizando que $x = r^2 + yr + y^2$, obtemos :

$$3 = \sqrt{13 - 1\sqrt{13 + 1\sqrt{13 - 1\sqrt{\ldots}}}}$$

$$3 = \sqrt{19 - 2\sqrt{19 + 2\sqrt{19 - 2\sqrt{\ldots}}}}$$

Agora vamos analisar sequências dadas por recorrência alternada do modelo da sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. No Teorema 3.13, garantimos que existe o limite $L_a = \lim_{n\to\infty} a_n$, onde L_a pode assumir qualquer valor. Inicialmente, vamos supor que o limite $L_a > r$ de tal forma que $L_a - r \leq r$, ou equivalentemente $\dfrac{L_a}{2} \leq r < L_a$. Deste modo, como foi visto no teorema anterior $L_a = y + r \Rightarrow y = L_a - r$ e $x = r^2 + ry + y^2$, para $y = L_a - r < 1,9 \cdot r$.

Como L_a foi tomado de forma arbitrária, podemos pensar em $L_a \in \mathbb{Q}$, para certos valores de x, y números racionais. Não é difícil determinarmos alguns exemplos para este caso e devido ao tamanho do texto deixamos a cargo do leitor.

4 Considerações finais

Já pensando em próximos trabalhos, deixamos os seguintes questionamento para o leitor:

Se pensarmos em generalizar o índice do radical para um número $q \neq 1/2$, será que garantimos os mesmos resultados? Se analisarmos uma sequência em que variamos os índices e o radicando ao mesmo tempo, ou seja, por exemplo do tipo $x_n = \sqrt[n]{n + x_{n-1}}$, será possível garantir a convergência e escrever números como limite dessas sequências?

Uma outra pergunta que surge a respeito do comportamento assintótico deste tipo de sequência é: qual a taxa de convergência dessas sequências? O interessante é que ao analisarmos o limite destas, não sabemos ao certo o comportamento de uma porção finita dessa sequência, o que é bastante útil em diversas aplicações e métodos iterativos.

Com a certeza de que se tratam de sequências interessantes a serem estudadas, deixamos tais questionamentos e outros decorrentes do estudo a cargo do leitor para futuros trabalhos. Agradecemos as contribuições dos revisores que foram cruciais para a melhora na qualidade do trabalho final.

Referências

[1] Barbosa, R.; Feitosa, S. *OBMEP Banco de Questões 2016*, Rio de Janeiro, IMPA, 2016.

[2] Barbosa, R.; Feitosa, S. *OBMEP Banco de Questões 2018*, Rio de Janeiro, IMPA, 2018.

[3] Beckmann, P. *A history of* π, 3rd ed. Boulder, CO: The Golem Press. p. 94?95, 1971.

[4] Chang, M-L.; Chang, C-C. *Evaluation of Pi by Nested Radicals*, Mathematics Magazine, Vol. 89, n. 5, 2016.

[5] Herschfeld, A. *On Infinite Radicals*, The American Mathematical Monthly, Vol. 42, n. 7, p. 419-429, 1935.

[6] Lima, E. L. *Curso de Análise* . Vol 1, sétima edição, IMPA, Rio de Janeiro, 2006.

[7] Neto , A. C. M. *Fundamentos de Cálculo*, Rio de Janeiro, SBM, 2015.

[8] Nyblom, M. A. *More Nested Square Roots of 2* The American Mathematical Monthly, Vol. 112, n. 9, p. 822-825, 2005.

[9] Servi, L. D. *Nested Square Roots of 2*, The American Mathematical Monthly, Vol. 110, n. 4, p. 326-330, 2003.

[10] Zimmerman, S.; Ho, C. *On Infinitely Nested Radicals*, Mathematics Magazine, Vol. 81, n. 1, p. 3-15, 2008.

Submetido em 21 de Março de 2020.
Aceito em 03 de Agosto de 2020.