Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática

https://doi.org/10.34179/revisem.v6i1.14066

OS NÚMEROS MÁGICOS DE BALL E A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Eudes Antonio Costa
Universidade Federal do Tocantins
Colegiado de Matemática - Arraias
eudes@uft.edu.br

Resumo

Seja x_n um número com n algarismos. Para $n \geq 2$, o número de n algarismos obtido pela inversão da posição dos algarismos de x_n é chamado de número reverso de x_n e é indicado por x'_n. Admita que $x_n > x'_n$ e escreva o número mágico de Ball $B = (x_n - x'_n) + (x_n - x'_n)'$. Em [6], e de forma independente em [4], mostra-se que todo número de Ball B é múltiplo de 99. Para cada $k \geq 0$ inteiro, considere x_{2k} (ou x_{2k+1}) um número qualquer e $B(k)$ a quantidade de possíveis números mágicos de Ball, ou seja, correspondentes às quantidades de algarismos $2, 4, 6, \ldots, 2k, \ldots$ (ou $3, 5, 7, \ldots, 2k+1, \ldots$) temos associada a sequência $1, 4, 12, \ldots, B(k), \ldots$ formada pela quantidade de números da Ball. Em [4] mostra-se que para todo inteiro $k \geq 2$ a quantidade $B(k)$ está entre $B(k-1)$ e $3^{k-1} + B(k-1)$. Do trabalho [6] conclui-se que a quantidade $B(k)$ é uma soma de termos, de índice par, da sequencia de Fibonacci.

Abstract

Let x_n be a number with n digits. For $n \geq 2$, the number of n digits added by reversing the position of the digits of x_n is called the reverse number of x_n and is indicated by x'_n. Admit $x_n > x'_n$ and write the magic number of Ball $B = (x_n - x'_n) + (x_n - x'_n)'$. In [6], and independently in [4], it is shown that every number of Ball's number B is a multiple of 99. For each entire $k \geq 0$, consider x_{2k} (or x_{2k+1}) any number, and $B(k)$ the quantity of Ball's magic numbers, that is, corresponding to the numbers of $2, 4, 6, \ldots, 2k, \ldots$ (or $3, 5, 7, \ldots, 2k+1, \ldots$) we have associated the sequence $1, 4, 12, \ldots, B(k), \ldots$ formed by the amount of Ball's numbers. In [4] it is shown that for every integer $k \geq 2$ the amount $B(k)$ is between $B(k-1)$ and $3^{k-1} + B(k-1)$. From the paper [6] it is concluded that the quantity $B(k)$ is a sum of terms, even index, of the Fibonacci sequence.

1 Números Mágicos de Ball

Nossa discussão aqui se preocupa exclusivamente com a aritmética na base decimal, assim $x_n = a_{n-1} \dots a_0$ indica um número com n algarismos, em que $a_{n-1}, \dots, a_0$ são números inteiros de 0 a 9. Para $n \geq 2$, o número de n algarismos obtido pela inversão da posição dos algarismos de x_n é chamado de número reverso de x_n e é indicado por x'_n, logo $x'_n = a_0 \dots a_{n-1}$.

Nestas notas, x_n representa um número inteiro positivo com n algarismos, $n \geq 2$ e $a_{n-1} \neq 0$ e x'_n é o número reverso de x_n. Considere o seguinte algoritmo

Algoritmo 1.1. *: [1, 2]* ***O número de mágico Ball*** B**.**

1. *Considere um número* x_n*;*
2. *Escreva o número reverso* x'_n*;*
3. *Encontre o valor absoluto da diferença entre esses números, representado por* $y_n = |x_n - x'_n| = b_{n-1}b_{n-2} \cdots b_2b_1b_0$ *(que deve ser considerado como um número de* n *algarismos, mesmo quando o algarismo* b_{n-1}*,* b_{n-2}*, ... for zero.);*
4. *Escreva o número reverso* y'_n*;*
5. *Escreva o número* $B = y_n + y'_n$*.*

Para qualquer $B \neq 0$, chamamos o número B de mágico de Ball se for o resultado do Algoritmo (1.1). Quando $x_n > x'_n$, de forma simplificada obtemos o número mágico de Ball fazendo $B = (x_n - x'_n) + (x_n - x'_n)'$.

Exemplo 1.2. [4] Para $n = 3$, dado $x_3 = 843$, usamos o algoritmo para obter $x'_3 = 348$, donde obtemos $y_3 = 843 - 348 = 495$. Assim, $y'_3 = 594$. Finalmente, resulta que $B = 495 + 594 = 1089$.

Para qualquer $x_3 = a_2a_1a_0$, com $a_2 \neq a_0$, como no Exemplo (1.2), o resultado final sempre será o número 1089. O mesmo fato ocorre quando temos um número inicial $x_2 = a_1a_0$ com $a_1 \neq a_0$, sempre obteremos o número 99 no final. Portanto, 99 e 1089 são exemplos de números de mágicos de Ball. Em [2, p. 8] (ou [1, p. 48]) prova-se que 1089 é o número resultante para todo o número x_3, como no Exemplo 1.2.

Em [2], o autor apresenta uma justificativa para o Algoritmo (1.1) retornar o número 1089 quando $n = 3$, e independentemente em [3]. Na verdade, em [2] observa-se que o Algoritmo (1.1) resulta em 9×11^2, ou seja, 1089. Enquanto em [4, 6] propõem o Algoritmo (1.1) para todo número inteiro positivo x_n para quaisquer $n \geq 2$.

A Tabela 1 apresenta a lista de números de Ball ao aplicar o Algoritmo (1.1) aos números x_n com $n = 2, 4$ ou 6 algarismos.

n	número	condição	Número mágico de Ball	Quantidade
2	$x = a_1a_0$	$a_1 > a_0$	99	1
4	$x = a_3a_2a_1a_0$	$a_3 = a_0$ e $a_2 > a_1$	990	4
		$a_3 > a_0$ e $a_2 < a_1$	9999	
		$a_3 > a_0$ e $a_2 > a_1$	10890	
		$a_3 > a_0$ e $a_2 = a_1$	10989	
6	$x = a_5a_4a_3a_2a_1a_0$	$a_5 = a_0$ e $a_4 > a_1$ e $a_3 < a_2$	99990	12
		$a_5 = a_0$ e $a_4 > a_1$ e $a_3 > a_2$	108900	
		$a_5 = a_0$ e $a_4 > a_1$ e $a_3 = a_2$	109890	
		$a_5 = a_0$ e $a_4 = a_1$ e $a_3 > a_2$	9900	
		$a_5 > a_0$ e $a_4 > a_1$ e $a_3 < a_2$	1089990	
		$a_5 > a_0$ e $a_4 > a_1$ e $a_3 > a_2$	1098900	
		$a_5 > a_0$ e $a_4 > a_1$ e $a_3 = a_2$	1099890	
		$a_5 > a_0$ e $a_4 < a_1$ e $a_3 > a_2$	999999	
		$a_5 > a_0$ e $a_4 < a_1$ e $a_3 < a_2$	991089	
		$a_5 > a_0$ e $a_4 < a_1$ e $a_3 = a_2$	990099	
		$a_5 > a_0$ e $a_4 = a_1$ e $a_3 = a_2$	1099989	

Tabela 1: Exemplos extraídos de [4]

2 Propriedades dos Números de Ball

Consideramos números x_n, com $n \geq 2$. O resultado seguinte estabelece condições sobre a existência do número mágico de Ball B.

Proposição 2.1. *[4, Afirmação 1, 2] (a) Considere x_n para n par, isto é,*

$$x_n = a_{2k-1}a_{2k-2}\ldots a_{k+1}a_ka_{k-1}a_{k-2}\ldots a_1a_0.$$

O número mágico de Ball B existe se uma das condições ocorre:

$$a_{2k-1} \neq a_0 \text{ ou } a_{2k-2} \neq a_1 \text{ ou } \ldots \text{ ou } a_{k+1} \neq a_{k-2} \text{ ou } a_k \neq a_{k-1}\ .$$

(b) Considere x_n para n ímpar, isto é,

$$x_n = a_{2k}a_{2k-1}\ldots a_{k+2}a_{k+1}a_ka_{k-1}a_{k-2}\ldots a_1a_0.$$

O número mágico de Ball B existe se uma das condições ocorre:

$$a_{2k} \neq a_0 \text{ ou } a_{2k-1} \neq a_1 \text{ ou } \ldots \text{ ou } a_{k+2} \neq a_{k-2} \text{ ou } a_{k+1} \neq a_{k-1} \,.$$

A demonstração deste fato pode ser obtida em [4]. De acordo com a Proposição 2.1, consideramos o número x_{2k} ($k \geq 1$), que consiste em um número par de algarismos (ou x_{2k+1} que consiste em um número ímpar número de algarismos) e, para cada k, $B(k)$ associa a quantidade de números mágicos de Ball B. Observando a Tabela 1, e outros exemplos, temos correspondente às quantidades iniciais de algarismos forem $2, 4, 6, \ldots, 2k, \ldots$ (ou $3, 5, 7, \ldots, 2k+1, \ldots$), temos $1, 4, 12, \ldots, B(k), \ldots$ a sequência de quantidade de números mágicos de Ball. Veja que

$$1;\ 4 = 1 + 3;\ 12 = 1 + 3 + 8; \ldots .$$

Nosso intento é formalizar o resultado sobre a quantidade de números mágicos de Ball associado ao número x_n com $n = 2k$ algarismos (ou $n = 2k + 1$ algarismos), e expressar $B(k)$ como a soma de termos (de índices pares) da sequencia de Fibonacci,

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144, \ldots \tag{2.1}$$

isto é, a sequencia F_j dada pela recorrencia $F_{j+2} = F_{j+1} + F_j$ para todo $j \geq 1$, veja [5].

Teorema 2.2. *Para um número natural x_{2k} com $2k$ algarismos, para todo $k \geq 1$, a quantidade de números mágicos de Ball $B(k)$ é $F_{2k} + F_{2(k-1)} + \cdots + F_2$, em que F_j é o termo de posição j da sequencia de Fibonacci (2.1).*

Apresentaremos uma demonstração do Teorema 2.2 na Seção 4. Outro resultado interessante acerca dos números mágicos de Ball é o seguinte.

Teorema 2.3. *[4, Afirmação 3], [6, Theorem 1] Todo número mágico de Ball B é um múltiplo do número 99.*

Na próxima seção apresentaremos uma demonstração adaptada de [6].

3 Demonstração do Teorema 2.3

Antes da demonstração, vamos associar a cada número com n algarismos $x_n = a_{n_1} \ldots a_0$, o número X_n chamado de código de x_n. Este código X_n compreende uma sequência de $0s$ e $1s$, tem algarismo final 0 e codifica as informações necessárias para passar do número inicial x_n para o número de Ball B resultante. Vamos apresentar a construção do X_n informalmente. Escreva o número $x_n = a_{n-1} \ldots a_0$, o qual tomamos $a_{n-1} > a_0$, e abaixo dele, seu reverso $x'_n = a_0 \ldots a_{n-1}$, como mostrado abaixo:

$$\begin{array}{cccc} & a_{n-1} & \dots & a_0 \\ - & a_0 & \dots & a_{n-1} \\ \hline & * & \dots & * \end{array}$$

Considere o papel desempenhado pela i-ésima coluna da direita para esquerda ($i = 0, \dots, n-1$) na subtração do número x'_n de x_n. Defina o algarismo z_i da seguinte maneira: se um dez (10) tiver que ser deslocado da $i+1$-ésima para a i-ésima coluna, z_i será 1; caso contrário, é 0. Dessa maneira, obtemos a sequencia $z_0, \dots, z_{n-1}$ de 0s e 1s. O número $z_0 \dots z_{n-1}$ com n algarismos é chamado de código de x_n e é denotado por X_n, ou seja, $X_n = z_0 \dots z_{n-1}$. Desde que estamos assumindo que $a_{n-1} > a_0$, $z_0 = 1$ e $z_{n-1} = 0$. O número do $n-1$ algarismos obtido de X_n pela exclusão do $z_{n-1} = 0$ no final é denotado por $X_{\overline{n}} = z_0 \dots z_{n-2}$ e é chamado de código truncado de x_n.

Para ilustrar essas idéias, considere o número de seis algarismos $x_6 = 397862$. Subtraindo $x'_6 = 268793$ de x_6, temos

$$\begin{array}{ccccccc} & 3 & \cancel{9}^{8} & \cancel{7}^{17} & \cancel{8}^{7} & \cancel{6}^{15} & \cancel{2}^{12} \\ - & 2 & 6 & 8 & 7 & 9 & 3 \\ \hline & 1 & 2 & 9 & 0 & 6 & 9 \\ \hline\hline & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

As colunas nas quais um dez (10) foi deslocado da coluna adjacente à esquerda são (iniciando à direita) 0, 1 e 3, usando a notação acima temos

$$z_0 = 1,\ z_1 = 1,\ z_2 = 0,\ z_3 = 1,\ z_4 = 0 \text{ e } z_5 = 0\ .$$

Portanto temos o código $X_6 = 110100$ e o código trucado $X_{\overline{6}} = 11010$. Conforme Tabela 1, para esse $x_6 = 397862$ em particular, temos o número de Ball

$$B = 129069 + 960921 = 1089990 = 99 \times 11010 = 99 \times X_{\overline{6}}\ .$$

Considere x_{n+1} um número com $n+1$ algarismos e D denota o número 10, assim $x_{n+1} = a_n \dots a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i D^i$, com $a_n > a_0$ e $x'_{n+1} = a_0 \dots a_n = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} D^i$. Usando desta notação, faremos a demonstração do Teorema 2.3.

Demonstração. do Teorema 2.3

Sejam o número $x_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} a_i D^i$ com $n+1$ algarismos, o número reverso $x'_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} D^i$ e o código $X_{n+1} = z_0 \dots z_n$ associado a x_{n+1}. Sem perda de generalidade, admita que $x_{n+1} > x'_{n+1}$. Assim pela definição de $z_0, \dots, z_n$, temos que

$$x_{n+1} - x'_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} (a_i + z_i D - a_{n-i} - z_{i-1}) D^i\ ,$$

em que fazemos $z_{-1} = 0$. Como $z_n = 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
B &= (x_{n+1} - x'_{n+1}) + (x_{n+1} - x'_{n+1})' \\
&= \left(\sum_{i=0}^{n}(a_i + z_iD - a_{n-i} - z_{i-1})D^i\right) + \left(\sum_{i=0}^{n}(a_{n-i} + z_{n-i}D - a_i - z_{n-i-1})D^i\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n}(a_i + z_iD - a_{n-i} - z_{i-1} + a_{n-i} + z_{n-i}D - a_i - z_{n-i-1})D^i \\
&= \sum_{i=0}^{n}(z_iD - z_{i-1} + z_{n-i}D - z_{n-i-1})D^i \\
&= \sum_{i=0}^{n} z_iD^{i+1} - \sum_{i=0}^{n} z_{i-1}D^i + \sum_{i=0}^{n} z_{n-i}D^{i+1} - \sum_{i=0}^{n} z_{n-i-1}D^i \\
&\overset{z_n=z_{-1}=0}{=} D^2\sum_{i=1}^{n} z_{n-i}D^{i-1} - \sum_{i=1}^{n} z_{n-i}D^{i-1} \\
&= (D^2-1)z_0\cdots z_{n-1} = 99 \times X_{\overline{n+1}}\ .
\end{aligned}$$

□

4 Demonstração do Teorema 2.2

O Teorema 2.3 mostra que o número $B(k)$ que buscamos é o mesmo que o número de diferentes códigos truncados $X_{\overline{2k}}$ ou, equivalentemente, códigos X_{2k}. Inicialmente em [6], para determinar a quantidade de códigos, o autor considerou apenas o caso em que a_n é (sempre) maior que a_0, ao considerar x_{n+1} maior que x'_{n+1}, e obteve o seguinte resultado

Proposição 4.1. *[6, Theorem 3] Para um número natural x_{2k} com $2k$ algarismos, com $k \geq 1$ tem-se que a quantidade $B(k)$ de números de Ball é igual a F_{2k}, em que F_j é o termo de posição j da sequencia de Fibonacci (2.1) .*

A demonstração pode ser consultada em [6]. Um resultado auxiliar para demonstração do Teorema 2.2 é o seguinte.

Proposição 4.2. *Se B_0 é um número de Ball associado a um número x_n com n algarismos então $10B_0$ é um número de Ball associado a um número x_{n+2} com $n+2$ algarismos.*

Demonstração. (O resultado e a demonstração podem ser inferidos de [6, Concludig remarks] .) Dado um número $x_n = a_{n-1}\dots a_0$ com n algarismos, pelo Teorema 2.3 temos que o número de Ball B_0 associado ao número x_n é $99 \times X_{\overline{n}}$, em que $X_{\overline{n}}$ é o código truncado associado ano número x_n . E mais ao número x_n temos associado o código $X_n = z_n \cdots z_0$, ao acrescentar um mesmo algarismo a no início e no fim do número x_n obtemos $x_{n+2} = aa_n \dots a_0 a$ um número com $n+2$ algarismos e obtemos o código $X_{n+2} = 0z_n \cdots z_0 0$. Novamente, pelo Teorema 2.3 temos que o número de Ball associado ao número x_{n+2} é $99 \times X_{\overline{n+2}} = 99 \times 10 \times X_{\overline{n}} = 10B_0$. □

Demonstração. do Teorema 2.2
Dado número x_{2k} com $n = 2k$ algarismos, suponha que $a_{n-1} > a_0$, segue da Proposição (4.1) que $B(k) = F_{2k}$. Agora, no caso em que $a_{n-1} = a_0$, segue da Proposição (4.2) que a quantidade de números de Ball é a mesma para $n-2$ algarismos, assim temos $B(k-1) = F_{2(k-1)}$. Recursivamente, obtemos o resultado. □

Referências

[1] J. Ball, *Think of a Number*, Dorling Kinderly Limited, Great Britain, 2005.

[2] W. W. R. Ball, *Mathematical Recreations and Essays*, The Macmillan Company, New York, (Tenth Edition), 1926.

[3] E. A. Costa, Mais um Número Mágico, Revista do Professor de Matemática **80**, 2013, 23–24 .

[4] E. A Costa e E. G. Mesquita, O Número Mágico M, Revista da Olimpíada do IME-UFG **9**, 2014, 33–43. <<https://files.cercomp.ufg.br/weby/up/1170/o/Eudes9.pdf>>

[5] N. N. Vorobev, *Numeros de Fibonacci.* Lecciones populares de matemáticas: Editorial MIR, Moscú, Rússia, 1974.

[6] R. Webster, A combinatorial problem with a Fibonacci solution, Fibonacci Quart. **33** (1995), no. 1, 26–31.

Submetido em 17 de Julho de 2020.
Aceito em 30 de Setembro de 2020.