

MÉTODO ALTERNATIVO PARA A REDUÇÃO DO GRAU DOS POLINÔMIOS PALINDRÔMICOS COM COEFICIENTES REAIS

Duelci A. de Freitas Vaz

Instituto Federal de Goiás, Campus Goiânia e PUC Goiás

duelci.vaz@ifg.edu.br

Julio César Saavedra Vásquez

Instituto Federal de Goiás, Campus Goiânia

julio.vasquez@ifg.edu.br

Regina Célia Bueno da Fonseca

Instituto Federal de Goiás, Campus Goiânia e IF-UnB, Campus Darcy Ribeiro

regina.fonseca@ifg.edu.br

Resumo

O comportamento dos zeros dos polinômios algébricos é uma das subáreas clássicas da Análise. Tal assunto é muito abordado na Matemática e atualmente as funções polinomiais são temas de muita investigação, tanto na área computacional, quanto na teórica. O comportamento dos zeros de polinômios palindrômicos no círculo unitário é motivo de pesquisa na literatura [1], [2] e [3]. Nos polinômios palindrômicos $P_{2n}(z)$, n inteiro, de grau par, sabe-se que podem ser expressos por $P_{2n}(z) = z^n Q_n(z + 1/z)$, onde Q_n é um polinômio de grau n , de tal forma que a partir das raízes de Q_n , obtemos as raízes de $P_{2n}(z)$. Conrad [4] aborda um procedimento para tal propósito. Neste trabalho apresentamos um método alternativo com a mesma finalidade.

Palavras chaves: redução de grau; polinômios palindrômicos; coeficientes reais.

Abstract

The behavior of the zeros of the algebraic polynomials is one of the classic subareas of Analysis. This subject is widely discussed in Mathematics and currently polynomial functions are subjects of much investigation, both in the computational and theoretical areas. The behavior of the zeros of palindromic polynomials in the unit circle is a reason for research in the literature [1], [2] and [3]. In palindromic polynomials $P_{2n}(z)$, n interger, of even degree, it is known that they can be expressed by $P_{2n}(z) = z^n Q_n(z + 1/z)$, where Q_n is a polynomial of degree n , such that from the roots of Q_n , we obtain the roots of $P_{2n}(z)$. Conrad [4] addresses a procedure for this purpose. In this work, we present an alternative method with the same purpose.

Keywords: degree reduction; palindromic polynomials; real coefficients.

1 Introdução

Da literatura, sabe-se que dado um polinômio $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$, $a_k \in \mathbb{R}$, as seguintes condições são equivalentes:

- i. $P(z)$ é palindrômico, isto é, $a_{n-k} = a_k$, $\forall k = 0, 1, 2, \dots, n$.
- ii. $P(z) = z^n P(\frac{1}{z})$. Segue-se que se z_0 é uma raiz de P , \bar{z}_0 , $\frac{1}{z_0}$ e $\frac{1}{\bar{z}_0}$ também o serão. Caso $|z_0| < 1$, então z_0 e \bar{z}_0 estarão localizadas simetricamente no interior do disco $|z| < 1$ e $\frac{1}{z_0}$ e $\frac{1}{\bar{z}_0}$ fora deste. Logo se $|z_0| = 1$, teremos apenas outra raiz complexa para $P(z)$, uma vez que $\bar{z}_0 = \frac{1}{z_0}$.
- iii. No caso de n ser par, $P_n(z) = z^{\frac{n}{2}} Q_n(z + \frac{1}{z})$, para um polinômio Q_n de grau $\frac{n}{2}$.

Do item [iii.](#), segue-se que todo polinômio palindrômico $P_n(z)$, de grau n par, pode ser expresso em termos de $w = z + \frac{1}{z}$ e que cada raiz w de Q_n gera duas raízes de $P_n(z)$. Observe-se que no caso de um polinômio palindrômico $P(z)$ de grau ímpar tem-se: $P_{2n+1}(z) = (z+1)z^n Q_n(z + \frac{1}{z})$, uma vez que $z = -1$ é raiz de todo polinômio palíndromo de grau ímpar. Logo, sem perda de generalidade é possível supor que $P_n(z)$ é de grau par.

Conrad [\[4\]](#) efetua várias manipulações algébricas no polinômio do exemplo abaixo para achar Q_n e conseqüentemente as raízes de $P(z)$. De fato, o polinômio palindrômico

$$P(z) = z^8 - z^5 - z^4 - z^3 + 1 = z^4 \left(z^4 - z - 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^4} \right), \quad (1.1)$$

desta forma,

$$\left(z^4 - z - 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^4} \right) - \left(z + \frac{1}{z} \right)^4 = -4z^2 - z - 7 - \frac{1}{z} - \frac{4}{z^2}. \quad (1.2)$$

Adicionando o termo $4 \left(z + \frac{1}{z} \right)^2$ na equação [\(1.2\)](#), temos

$$z^4 \left(z^4 - z - 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^4} \right) - \left(z + \frac{1}{z} \right)^4 + 4 \left(z + \frac{1}{z} \right)^2 = -z + 1 - \frac{1}{z}. \quad (1.3)$$

Adicionando o termo $\left(z + \frac{1}{z} \right)$ nos dois lados da igualdade na equação [\(1.3\)](#), temos:

$$\left(z^4 - z - 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^4} \right) - \left(z + \frac{1}{z} \right)^4 + 4 \left(z + \frac{1}{z} \right)^2 + \left(z + \frac{1}{z} \right) = 1. \quad (1.4)$$

Multiplicando o termo z^4 nos dois lados da igualdade na equação (1.4), temos:

$$z^4 \left(z^4 - z - 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^4} \right) = z^4 \left(\left(z + \frac{1}{z} \right)^4 - 4 \left(z + \frac{1}{z} \right)^2 - \left(z + \frac{1}{z} \right) + 1 \right). \quad (1.5)$$

Desta forma, da equação (1.5), obtemos

$$P_8(z) = z^4 Q_4 \left(z + \frac{1}{z} \right). \quad (1.6)$$

Conforme descrito no item iii., a equação (1.6) é um polinômio *palindrômico de grau par* ($n = 8$).

Observação 1.1. Observamos que este procedimento desenvolvido acima envolve várias manipulações algébricas as quais dependem integralmente das expressões que as precedem.

Assim, na Seção 2 mostramos um processo alternativo de redução de polinômio palindrômico com coeficientes reais.

2 Processo alternativo de redução do polinômio palindrômico com coeficientes reais

O procedimento a seguir que tem como base as relações de Viète^A permite de maneira alternativa e genericamente expressar:

$$P_{2n}(z) = z^n Q_n \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad (2.1)$$

em que $a_n \neq 0$. Sem perda de generalidade, considere o polinômio palindrômico de grau par:

$$P_{2n}(z) = z^{2n} + a_1 z^{2n-1} + a_2 z^{2n-2} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z + 1. \quad (2.2)$$

Das relações de Viète, tem-se que, se z_i ($i = 1, 2, \dots, 2n$) são as raízes de $P_{2n}(z)$, então:

$$\sum_{i=1}^{2n} z_i = -a_1, \quad \sum_{j \neq i}^n z_i z_j = a_2, \quad \sum_{i \neq j \neq k}^{2n} z_i z_j z_k = -a_3, \dots, z_1 z_2 z_3 \cdots z_{2n-1} z_{2n} = 1. \quad (2.3)$$

^AAs fórmulas de Viète relacionam os coeficientes (reais ou complexos) de um polinômio a_k com as somas e produtos de suas raízes, denominadas por François Viète [6].

Uma vez que estas raízes ocorrem em pares inversos (z_{2i-1}, z_{2i}) , onde $z_{2i} = \frac{1}{z_{2i-1}}$, $(i = 1, 2, \dots, n)$, a partir da mudança de variável $x_i = z_{2i-1} + z_{2i}$, $z_{2i} = \frac{1}{z_{2i-1}}$, $i = 1, 2, \dots, n$, é possível construir o polinômio $Q_n(x)$:

$$Q_n\left(z + \frac{1}{z}\right) = Q_n(x) = x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \dots + b_{n-2}x^2 + b_{n-1}x + b_n, \quad (2.4)$$

onde os coeficientes b_k , $(k = 1, 2, \dots, n)$ são obtidos a partir das relações das raízes de $P_n(z)$ e das relações com seus coeficientes, além do fato que $z_{2i-1}z_{2i} = 1$, $i = 1, 2, \dots, n$. De posse do polinômio $Q_n(x)$ e a partir de suas raízes x_i ($i = 1, 2, \dots, n$), obtemos as $2n$ raízes de $P_n(z)$, decorrentes da solução das n equações quadráticas:

$$x_i = z_{2i-1} + z_{2i} = z_{2i-1} + \frac{1}{z_{2i-1}}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.5)$$

De fato, se $Q_n(x) = x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \dots + b_{n-2}x^2 + b_{n-1}x + b_n$, temos que:

$$-b_1 = \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n (z_{2i-1} + z_{2i}) = \sum_{i=1}^{2n} z_i = -a_1, \quad (2.6)$$

$$b_2 = \sum_{i \neq j}^n x_i x_j = \sum_{i \neq j}^n (z_{2i-1} + z_{2i})(z_{2j-1} + z_{2j}) = \sum_{i \neq j}^{2n} z_i z_j - \sum_{i=1}^{2n} z_i z_j = a_2 - n. \quad (2.7)$$

Na equação (2.7) podemos analisar cada um de seus termos relacionando-os com cada termo da equação (2.3): uma vez que $\sum_{i \neq j}^{2n} z_i z_j$ contém termos do tipo $z_{2i-1}z_{2i} = 1$, que não estão presentes no desenvolvimento de $\sum_{i \neq j}^n (z_{2i-1} + z_{2i})(z_{2j-1} + z_{2j})$, o número excedente deste tipo de parcelas de valor 1 é dado por

$$C_2^{2n} - 2^2 C_2^n = n. \quad (2.8)$$

Por outro lado,

$$-b_3 = \sum_{i \neq j \neq k}^n x_i x_j x_k = \sum_{i \neq j \neq k}^n (z_{2i-1} + z_{2i})(z_{2j-1} + z_{2j})(z_{2k-1} + z_{2k}). \quad (2.9)$$

Precisamos escrever o desenvolvimento da equação (2.9) em função de $z_i z_j z_k$, $i \neq j \neq k$, de fato,

$$-b_3 = \sum_{i \neq j \neq k} z_i z_j z_k - \sum z_{2i-1} z_{2i} z_k. \quad (2.10)$$

Pois ternas do tipo $z_{2i-1} z_{2i} z_k = z_k$ não estão presentes nas $2^3 C_3^n$ parcelas do desenvolvimento de (2.9), o número excedente deste tipo de parcelas é dado por: $C_3^{2n} - 2^3 C_3^n = 2n(n-1)$, pois $\sum_{i \neq j \neq k} z_i z_j z_k$ tem C_3^{2n} ternas. Portanto, a equação (2.10) pode ser reescrita:

$$-b_3 = \sum_{i \neq j \neq k}^{2n} z_i z_j z_k - (n-1) \sum_{k=1}^{2n} z_{2i-1} z_{2i} z_k. \quad (2.11)$$

Usando as relações de (2.3) na equação (2.11), obtemos

$$\begin{aligned} -b_3 &= -a_3 - (n-1) \sum_{k=1}^{2n} z_k = -a_3 - (n-1)(-a_1) \\ b_3 &= a_3 - (n-1)a_1. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Agora vamos ao cálculo de:

$$b_4 = \sum_{i \neq j \neq k \neq l}^n x_i x_j x_k x_l = \sum_{i \neq j \neq k \neq l}^n (z_{2i-1} + z_{2i})(z_{2j-1} + z_{2j})(z_{2k-1} + z_{2k})(z_{2l-1} + z_{2l}). \quad (2.13)$$

Observe que esta última expressão, o seu desenvolvimento contém $2^4 C_4^n$ parcelas. Uma vez que parcelas do tipo $z_{2i-1} z_{2i} z_j z_l = z_j z_l \neq 1$ e $z_{2i-1} z_{2i} z_{2j-1} z_{2j} = 1$, não estão presentes. Dessa forma, se substituirmos $\sum_{i \neq j \neq k \neq l}^{2n} z_i z_j z_k z_l$ na expressão que determina b_4 , teremos:

$$b_4 = \sum_{i \neq j \neq k \neq l} z_i z_j z_k z_l - \left(\sum_{z_j z_l \neq 1} z_{2i-1} z_{2i} z_j z_l + \sum z_{2i-1} z_{2i} z_{2j-1} z_{2j} \right). \quad (2.14)$$

O total excedente destes dois tipos de parcelas é dado por:

$$C_4^{2n} - 2^4 C_4^n = \frac{n(n-1)(4n-7)}{2}. \quad (2.15)$$

Das quais C_2^n parcelas são do tipo $z_{2i-1} z_{2i} z_{2j-1} z_{2j} = 1$, logo:

$$b_4 = \sum_{i \neq j \neq k \neq l}^{2n} z_i z_j z_k z_l - \left(\sum_{z_j z_l \neq 1} z_j z_l + \frac{n(n-1)}{2} \right). \quad (2.16)$$

Por outro lado, o total de parcelas do tipo $z_{2i-1} z_{2i} z_j z_l = z_j z_l \neq 1$ é

$$C_4^{2n} - 2^4 C_4^n - C_2^n = 2n(n-1)(n-2). \quad (2.17)$$

Uma vez que $\sum_{j \neq l}^{2n} z_j z_l$ contém C_2^{2n} parcelas, das quais n são do tipo $z_{2i-1} z_{2i} = 1$ e $C_2^{2n} - n = 2n(n-1)$ do tipo $z_j z_l \neq 1$, segue-se que $\sum_{z_j z_l \neq 1} z_j z_l$ contém exatamente $(n-2)$ vezes a quantidade deste tipo de termos contidos em $\sum_{k \neq l}^{2n} z_k z_l$, portanto:

$$\sum_{z_j z_l \neq 1} z_j z_l = (n-2) \left(\sum_{k \neq l}^{2n} z_k z_l - n \right). \quad (2.18)$$

Substituindo esta última relação (2.18) na equação (2.16), temos:

$$b_4 = \sum_{i \neq j \neq k \neq l}^{2n} z_i z_j z_k z_l - \left((n-2) \sum_{k \neq j}^{2n} z_k z_l - \frac{n(n-3)}{2} \right), \quad (2.19)$$

ou equivalentemente,

$$b_4 = a_4 - (n-2)a_2 + \frac{n(n-3)}{2}. \quad (2.20)$$

O cálculo do coeficiente b_5 do polinômio $Q_n(x)$ dado na equação (2.4):

$$\begin{aligned} -b_5 &= \sum_{i \neq j \neq k \neq l \neq r}^n x_i x_j x_k x_l x_r \\ &= \sum_{i \neq j \neq k \neq l \neq r}^n (z_{2i-1} + z_{2i})(z_{2j-1} + z_{2j})(z_{2k-1} + z_{2k})(z_{2l-1} + z_{2l})(z_{2r-1} + z_{2r}) \\ &= \sum_{i \neq j \neq k \neq l \neq r}^{2n} z_i z_j z_k z_l z_r - \left(\sum z_{2i-1} z_{2i} z_j z_k z_l + \sum z_{2i-1} z_{2i} z_{2j-1} z_{2j} z_k \right) \\ &= \sum_{i \neq j \neq k \neq l \neq r}^{2n} z_i z_j z_k z_l z_r - \left(\sum z_j z_k z_l + \sum z_k \right). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Uma vez que a quantidade de parcelas $z_{2i-1} z_{2i} z_{2j-1} z_{2j} z_k = z_k$ desta última é $(2n-4)C_2^n$, logo o número de termos do $z_j z_k z_l$ será dado por:

$$C_2^{2n} - 2^2 C_2^n = n^B. \quad (2.22)$$

^B $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, com $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$.

Por outro lado, $\sum_{i \neq j \neq k}^{2n} z_i z_j z_k$ contém C_3^{2n} parcelas, das quais $(2n - 2)C_1^n$ são do tipo $z_i z_j z_k = z_k$ e $C_3^{2n} - 2(n - 1)C_1^n = \frac{4n(n-1)(n-2)}{3}$, termos tal que $z_i z_j \neq 1$, segue-se que $\sum_{j \neq k \neq l} z_j z_k z_l$ contém exatamente $(n-3)$ vezes a quantidade deste tipo de termos presentes em $\sum_{j \neq k \neq l}^{2n} z_j z_k z_l$, portanto:

$$\sum z_{2i-1} z_{2i} z_j z_k z_l = (n - 3) \left(\sum_{z_j z_l \neq 1} z_j z_k z_l - \sum z_k \right). \quad (2.23)$$

Segue-se que o número de parcelas do tipo $z_i z_j z_k = z_k$ é

$$\left(- (n - 3)C_2^n + 2(n - 2)C_2^n \right) = \frac{(n - 4)(n - 1)n}{2}. \quad (2.24)$$

Substituindo estas duas últimas relações em (2.21), obtemos

$$- b_5 = \sum_{i \neq j \neq k \neq l \neq r}^{2n} z_i z_j z_k z_l z_r - (n - 3) \sum z_j z_k z_l + \frac{(n - 4)(n - 1)}{2} \sum_{k=1}^{2n} z_k. \quad (2.25)$$

Usando as relações (2.3) na equação (2.25), obtemos

$$b_5 = a_5 - (n - 3)a_3 + \frac{(n - 4)(n - 1)}{2} a_1. \quad (2.26)$$

Pelo exposto acima concluímos que cada coeficiente b_k de índice par/ímpar depende de todos os coeficientes a_k de índice par/ímpar inferiores ou iguais a k . Seguindo um procedimento análogo ao supracitado é possível obter os b_k , $k \geq 6$.

Por exemplo, no caso de um polinômios palindrômicos de grau 8 e 6:

$$P(z) = z^8 + a_1 z^7 + a_2 z^6 + a_3 z^5 + a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + 1 \quad (2.27)$$

$$P(z) = z^6 + a_1 z^5 + a_2 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + 1, \quad (2.28)$$

seus correspondentes polinômios reduzidos são respectivamente:

$$Q_4(x) = x^4 + a_1 x^3 + (a_2 - 4)x^2 + (a_3 - 3a_1)x + (a_4 - 2a^2 + 2). \quad (2.29)$$

$$Q_3(x) = x^3 + a_1 x^2 + (a_2 - 3)x + (a_3 - 2a_1). \quad (2.30)$$

Assim, por exemplo, no caso específico do polinômio

$$P_8(z) = z^8 - z^5 - z^4 - z^3 + 1, \quad (2.31)$$

temos que seu polinômio reduzido é:

$$Q_4(x) = x^4 - 4x^2 - x + 1, \quad (2.32)$$

uma vez que $a_1 = 0$, $a_2 - 4 = -4$, $a_3 - 3a_1 = -1$ e $a_4 - 2a_2 + 2 = 1$. Pelas equações (2.1), (2.4) e (2.32), o polinômio (2.31) pode ser expressido como:

$$P_8(z) = z^4 Q_4\left(z + \frac{1}{z}\right) = z^4 \left(\left(z + \frac{1}{z}\right)^4 - 4\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - \left(z + \frac{1}{z}\right) + 1. \right) \quad (2.33)$$

A partir da argumentação dada acima podemos enunciar e demonstrar o seguinte teorema.

Teorema 2.1. *Considere o polinômio palindrômico de grau par e com coeficientes reais,*

$$P(z) = z^{2n} + a_1 z^{2n-1} + a_2 z^{2n-2} + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + 1, \quad (2.34)$$

e seja $Q_n(x)$ seu polinômio reduzido. Então x é uma raiz real de $Q_n(x)$ se, e somente, $P(z)$ possui duas raízes z , tais que z é real ou $|z| = 1$. Ou, equivalente, para cada raiz complexa de $Q_n(x)$, $P(z)$ possuirá 2 raízes complexas z , $|z| \neq 1$ e reciprocamente.

Demonstração. Seja $z = \alpha + \beta i$ uma raiz qualquer $P(z)$ logo as raízes de $Q_n(x)$ são tais que

$$x = z + \frac{1}{z} = z + \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \alpha \left(1 + \frac{1}{|z|^2}\right) + \beta \left(1 - \frac{1}{|z|^2}\right) i. \quad (2.35)$$

Logo x será real se, e somente se, $z \in \mathbb{R}$ ou $|z| = 1$. □

Observa-se que, se $x \in \mathbb{R}$, da equação (2.35) tem-se

$$z = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 - 4}}{2}, \quad (2.36)$$

logo,

$$z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in (-2, 2).$$

Além disso, $|z| = \sqrt{\left(-\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right)^2} = 1^{\mathbb{C}}$. Reciprocamente, se $x \in \mathbb{R}$,

$$|x| \geq 2 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R},$$

de tal sorte que z e $1/z$ (diferente ± 1) não estão no círculo unitário.

^CDe fato, da equação (2.36) temos: $z = -\frac{x \pm \sqrt{-(4-x^2)}}{2} \implies z = -\frac{x}{2} \pm i \frac{\sqrt{(4-x^2)}}{2} \implies |z| = 1$.

Exemplo 2.2. Considere o polinômio reduzido

$$Q_5(x) = x^5 + x^4 - 6x^3 - 3x^2 + 7x + 5 \quad (2.37)$$

do polinômio

$$P(z) = z^{10} + z^9 - z^8 + z^7 - z^6 + 5z^5 - z^4 + z^3 - z^2 + z + 1. \quad (2.38)$$

A figura 1 mostra as raízes (ou zeros) z_i , $i = 1, 2, \dots, 10$ do polinômio $P(z)$ dado na equação (2.38) e suas localizações no círculo unitário.

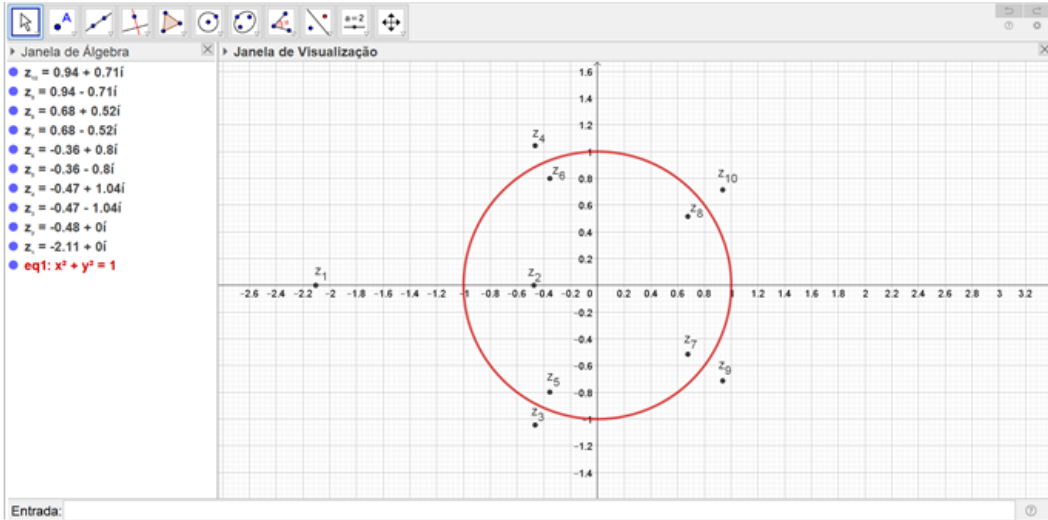


Figura 1: Raízes do polinômio $P(z)$ dado na equação (2.38) no círculo unitário.

A partir das 5 raízes x_i de $Q_n(x)$ dada na equação (2.37), resolvemos as 5 correspondentes equações quadráticas para achar as 10 raízes de $P(z)$ dada na equação (2.38). Por exemplo, para $x = -2,58$ da equação (2.5), temos

$$-2,58 = z + \frac{1}{z}. \quad (2.39)$$

Na figura 1 podemos observar as duas soluções da equação (2.39): $z = -0,48$ e $z = -2,1$ que correspondem às duas raízes de $P(z)$ da equação (2.38).

Exemplo 2.3. Seja o polinômio

$$P(z) = z^9 + 4z^8 + 3z^7 + 2z^6 + z^5 + z^4 + 2z^3 + 3z^2 + 4z + 1. \quad (2.40)$$

Uma vez que o polinômio dado na equação (2.40) pode ser escrito como

$$P(z) = (z + 1)(z^8 + 3z^7 + 2z^5 - z^4 + 2z^3 + 3z + 1), \quad (2.41)$$

segue que o polinômio reduzido de $z^8 + 3z^7 + 2z^5 - z^4 + 2z^3 + 3z + 1$ é

$$Q_4(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 10x. \quad (2.42)$$

A figura 2 mostra as raízes (ou zeros) z_i , $i = 1, 2, \dots, 9$ do polinômio $P(z)$ dado na equação (2.40) e suas localizações no círculo unitário.

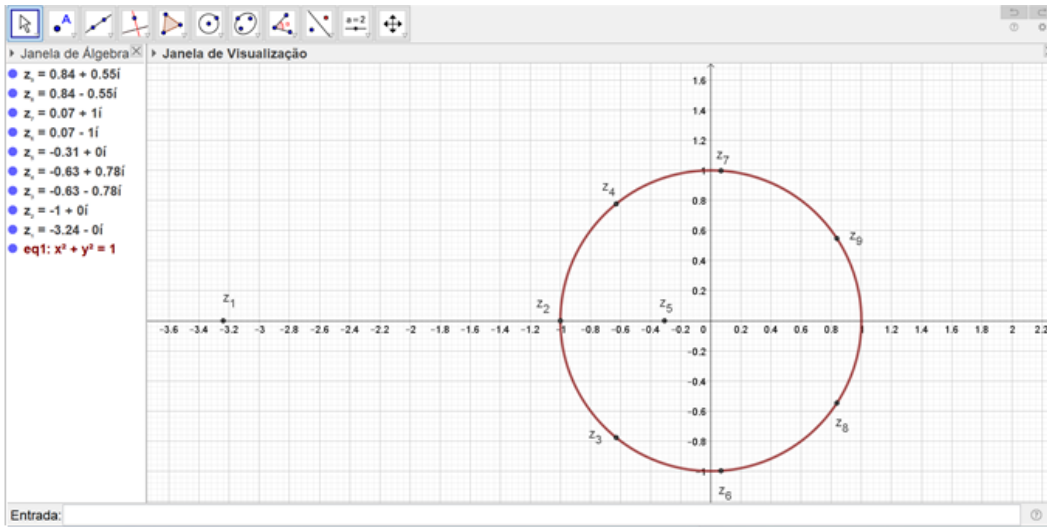


Figura 2: Raízes do polinômio $P(z)$ dado na equação (2.40) no círculo unitário.

3 Resultados Principais

É interessante observar como a geometria intrínseca das raízes dos polinômios palindrômicos simplifica o cálculo das mesmas. Temos apresentado aqui um processo recursivo que permite a redução do grau de um polinômio palindrômico facilitando o cálculo bem como a determinação da natureza e alocação das suas raízes em relação ao círculo unitário. Por outro lado, se impormos condições nos coeficientes b_k de $Q_n(x)$ que definam a natureza das suas raízes e posição em relação a $|z| = 1$ isto permitirá construirmos seu correspondente polinômio palindrômico cujas raízes terão natureza e alocação decorrente das raízes de $Q_n(x)$ verificando assim as condições constantes nos trabalhos de [2], [3] e [5].

Referências

- [1] Kwon, Do Yong. *Reciprocal polynomials with all zeros on the unit circle*. Acta Math. Hung v. **131**(3), p. 285-294, 2011. <https://doi.org/10.1007/s10474-011-0090-6>
- [2] Lakatos, Piroska. *On zeros of reciprocal polynomials*. Publ. Math. Debrecen, v. **61**(3-4), p. 645-661, 2002. ISSN 0033-3883
- [3] Marden, Morris. *Geometry of polynomials*. Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 3, American Mathematical Society, 2nd edition, Providence, Rhode Island, 1966. <https://dx.doi.org/10.1090/surv/003>
- [4] Conrad, Keith. *Symmetric Polynomials*. Kconrad.math.uconn.edu editor in the Ring Theory. Expository papers, unpublished notes available at <https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/> - Ver na página de notas/arquivos das exposições (do autor) e descer até o bloco “*Teoria de Anel*”, onde encontrará a referência “*Polinômios Simétricos*”. Postado Online e acessado em 05–Junho–2020.
- [5] Meneguette, Messias. *Zeros in the unit disk*. SIAM Review, v. **36**(4), pp. 656-657, 1994. <https://doi.org/10.1137/1036150>
- [6] Viète, François. *The Analytic Art: Nine Studies in Algebra, Geometry and Trigonometry from the Opus Restitutae Mathematicae Analyseos, seu Algebrâ Novâ*. Dover Publications Inc. [Unabridged republication of the work originally published by The Kent State University Press, Kent, Ohio, 1983.] Mineola, New York: 2006. ISBN 0-486-45348-0

Submetido em 01 de Agosto de 2020.
1ª Decisão em 30 de Setembro de 2020.
Aceito em 04 de Junho de 2021.