REVISEM
Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática

https://doi.org/10.34179/revisem.v6i1.14598

QUEM INICIA A PARTIDA DE FUTEBOL? UM ESTUDO SOBRE A PROBABILIDADE NO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

WHO STARTS THE SOCCER MATCH? A STUDY ON PROBABILITY IN THE 6TH GRADE OF ELEMENTARY SCHOOL

Clarissa Coragem Ballejo
Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul
clarissa.ballejo@acad.pucrs.br

Elisabete Rambo Braga
Colégio Farroupilha
beterambobraga@gmail.com

Lori Viali
Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul
viali@pucrs.br

Resumo

Este artigo analisou as respostas de 31 estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental que não tiveram estudo formal sobre probabilidade. Para tanto, foram elaboradas 11 questões sob a perspectiva das demandas cognitivas de Peter Bryant e Terezinha Nunes. As questões consideraram os seguintes tópicos: aleatoriedade, espaço amostral, quantificação e comparação de probabilidades. O questionário, envolvendo uma temática futebolística, foi aplicado de forma síncrona em uma aula remota de Matemática de uma escola privada de Porto Alegre, RS. A análise qualitativa, apoiada em dados quantitativos, sugere que tais estudantes apresentam raciocínio intuitivo sobre aleatoriedade, mas sem a utilização deste vocábulo. Quanto ao espaço amostral, a maioria da turma mostrou facilidade em identificá-lo nas situações apresentadas. Em relação à quantificação e comparação de probabilidades, verificou-se que a maioria quantifica. Contudo, esperam que esse valor seja obtido nos experimentos aleatórios, o que caracteriza o pensamento, ainda, essencialmente determinístico. Considera-se que o estudo de probabilidade tende a ter um bom resultado se for iniciado nos primeiros anos da escolarização. Assim, é necessário fornecer uma ampla gama de experiências que possibilitem o trabalho tanto do conceito empírico de probabilidade (frequências relativas) quanto o clássico, construindo uma base sólida para a formalização posterior desses conceitos.

Palavras-chave: Probabilidade. Demandas Cognitivas. Ensino Fundamental.

Abstract

This article analyses the responses given by 31 students from the 6th year of elementary school, which did not have any formal study on probability. For that, 11 questions were elaborated based on the perspective of cognitive demands of Peter Bryant and Terezinha Nunes. The questions were

about the following topics: randomness, sample space, quantification and comparison of probabilities. The questionnaire, involving a soccer theme, was applied synchronously in an online mathematics class at a private school in Porto Alegre, RS. The qualitative analysis, supported by quantitative data, suggests that such students present an intuitive reasoning about randomness, but without using this word. As for the sample space, the majority of the class showed ease in identifying it in the situations presented. Regarding the quantification and comparison of probabilities, it was found that the majority quantify it. However, the subjects expect this value to be obtained through random experiments, which characterizes thought, still, essentially deterministic. It is considered that the study of probability tends to have a good result if it starts during the first years of schooling. Therefore, it is necessary to provide a wide range of experiences that enable the work of the empirical concept of probability (relative frequencies) and the classic one, building a solid basis for the further formalization of these concepts.
Keywords: Probability. Cognitive Demands. Elementary School.

INTRODUÇÃO

A probabilidade é uma área da Matemática que modela eventos aleatórios. Para Santana, Fernandes e Borba (2020), a aleatoriedade é essencial para a compreensão da probabilidade, pois é o que distingue os fenômenos aleatórios dos deterministas. Segundo Batanero (2016), desde pequenos estamos cercados por incertezas nas mais diversas situações cotidianas e, muitas delas, são permeadas pela aleatoriedade.

Em seus estudos, Fischbein (1975) concluiu que crianças possuem ideias concretas e intuitivas sobre probabilidade e, dessa forma, o seu ensino pode e deve começar o quanto antes. Para o autor, se o ensino da Matemática se concentra apenas em situações deterministas é possível que as crianças apresentem dificuldades futuras, para quantificar e entender experiências e vivências aleatórias.

Nesse sentido, a compreensão da probabilidade é fundamental para o entendimento do meio em que vivemos, afinal ela está presente em situações que envolvem julgamento de riscos e senso de justiça, conforme destacam Santana, Fernandes e Borba (2020). Portanto, sua inserção, em todos os níveis da Educação Básica torna-se essencial, devendo-se estar atento ao grau de complexidade e ao perfil do estudante em questão (BATANERO, 2019). Nos últimos anos, constatou-se que diversos países incluíram a probabilidade em seus currículos escolares, tais como Canadá, Espanha, Chile e Brasil.

Viali e Silva (2016), por sua vez, destacam que a incerteza e a aleatoriedade estão presentes no dia a dia. Nesse contexto, é imprescindível que as escolas propiciem o trabalho com estes tópicos o quanto antes, com vistas ao desenvolvimento da argumentação com embasamento em dados científicos.

Batanero (2005) ressalta, ainda, que o ensino de probabilidade, atualmente, tem um viés mais experimental quando comparado com os currículos de vinte anos atrás. No entanto, Vasquez et al. (2019) presumem que deve ser feita uma abordagem com atividades dinâmicas e de ordem prática, tendo em vista a vasta possibilidade de contextualização que o tema permite. A aplicação mais recente da probabilidade é no contexto da pandemia da Covid-19, que despontou na República Popular da China, no final do ano de 2019 e tomou proporções globais no início de 2020. A definição de políticas de enfrentamento da pandemia é fundamentada em pesquisas epidemiológicos, alicerçadas em estudos estatísticos e probabilísticos.

Diante desta realidade, este artigo apresenta uma prática aplicada remotamente com estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede particular da cidade de Porto Alegre, no estado do Rio Grande do Sul. Tal práxis buscou abordar a probabilidade por meio de tarefas experimentais, a partir das habilidades e competências previstas na Base Nacional Comum Curricular (2017) e das demandas cognitivas propostas por Bryant e Nunes (2012). O presente estudo fez uma análise sobre a compreensão de conceitos referentes à probabilidade com estudantes entre os 11 e os 12 anos, que não tiveram um estudo formal sobre o tema, a partir da temática futebol.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Inclusão da probabilidade na BNCC

A inclusão da probabilidade no currículo escolar foi sugerida pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), em 1997, para estudantes a partir dos 11 anos de idade. Já a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento normativo que entrou em vigor no ano de 2017, determina que a probabilidade deva ser abordada desde o 1º ano do Ensino Fundamental, isto é, a partir dos 6 anos de idade.

É pertinente sublinhar que a BNCC (2017) é obrigatória e está prevista na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional e no Plano Nacional da Educação. Os currículos de todas as escolas das redes públicas e particulares brasileiras devem ter a BNCC como referencial, uma vez que ela estabelece conhecimentos, competências e habilidades que devem ser desenvolvidas no decorrer da escolaridade básica.

Nesse contexto, a BNCC (2017) destaca que o objetivo principal desse tema nos

Anos Iniciais é o de promover uma compreensão de que nem todos os fenômenos são determinísticos. Já para os Anos Finais, o estudo da probabilidade deve ocorrer mediante

> [...] experimentos aleatórios e simulações para confrontar os resultados obtidos com a probabilidade teórica – probabilidade frequentista. A progressão dos conhecimentos se faz pelo aprimoramento da capacidade de enumeração dos elementos do espaço amostral, que está associada, também, aos problemas de contagem. (BRASIL, 2017, p. 274).

Considerando que a proposta, deste trabalho, está destinada ao 6º ano do Ensino Fundamental, é conveniente apresentarmos os objetos de conhecimentos e as habilidades previstas na BNCC para esta etapa de ensino. Esses elementos estão apresentados no Quadro 1.

Quadro 1 – Objetos de conhecimento e habilidade curriculares referentes à probabilidade

Objetos de conhecimento	*Habilidade*
➢ Cálculo de probabilidade como a razão entre o número de resultados favoráveis e o total de resultados possíveis em um espaço amostral equiprovável. ➢ Cálculo de probabilidade por meio de muitas repetições de um experimento (frequências de ocorrências e probabilidade frequentista).	➢ Calcular a probabilidade de um evento aleatório, expressando-a por um número racional (forma fracionária, decimal e percentual) e comparar esse número com a probabilidade obtida por meio da repetição de experimentos sucessivos.

Fonte: BNCC (2017, p. 304-305).

A partir dos dados dispostos no Quadro 1 foi possível determinar os assuntos que foram utilizados na elaboração de um plano de aula destinado a estudantes de 6º ano. Para fundamentar a proposta, adotou-se o modelo das quatro demandas cognitivas de Peter Bryant e Terezinha Nunes, descrito na sequência.

Demandas cognitivas de Bryant e Nunes

Como aporte teórico central optou-se pela teoria das demandas cognitivas propostas por Bryant e Nunes (2012), a qual embasa o aprendizado de probabilidade em quatro aspectos norteadores: compreensão da aleatoriedade, formação de espaço amostral, comparação e quantificação de probabilidades e a compreensão das relações entre eventos (BRYANT; NUNES, 2012). Devido à complexidade desse tema, esses autores constataram à necessidade fundamentar a aprendizagem de probabilidade nestes quatro requisitos (SANTANA; FERNANDES; BORBA, 2020).

A primeira exigência cognitiva refere-se ao conceito de aleatoriedade mediante à compreensão da interdependência de eventos sucessivos. Em situações que envolvem probabilidade não há como predizer quais eventos irão acontecer, nem a ordem de ocorrência, mesmo ainda que possam ser listados todos os possíveis acontecimentos (BRYANT; NUNES, 2012). No que tange ao processo de ensino e aprendizagem, Bryant e Nunes (2012) ressaltam a necessidade de serem trabalhados jogos com os estudantes de 10 anos ou mais que viabilizem a classificação quanto a serem justos ou não.

A segunda demanda relaciona-se à compreensão do espaço amostral, por meio da determinação de todas as possibilidades de ocorrência de um determinado evento. Para tanto, é imprescindível o emprego do raciocínio combinatório, permitindo, dessa forma, a quantificação de conjuntos ou subconjuntos de situações. Os autores afirmam, ainda, que o conhecimento do espaço amostral é essencial para a resolução de qualquer problema de natureza probabilística (BRYANT; NUNES, 2012).

A terceira condição cognitiva no que se refere à quantificação, é expressa pela razão entre um resultado específico e o conjunto dos possíveis resultados. Entretanto, há situações em que se faz necessário estabelecer comparações, empregando relações simples como "mais" ou "maior" (BRYANT; NUNES, 2012). Para Santana, Fernandes e Borba (2020), muitos dos erros cometidos por estudantes em situações probabilísticas têm sua origem no cálculo ou na comparação dessas proporções.

Por último, a quarta demanda cognitiva, denominada correlação, aborda a identificação de eventos dependentes ou independentes, por meio de uma associação aleatória ou uma relação de fato entre dois eventos (BRYANT; NUNES, 2012). Destaca-se, ainda, que a compreensão desse aspecto depende do entendimento das três exigências anteriores (SANTANA; FERNANDES; BORBA, 2020).

É pertinente ressaltar que esse último aspecto não foi abordado nesta investigação em função de o estudo ter sido realizado com discentes do 6° ano do Ensino Fundamental. Assumindo que esta quarta demanda exige um nível maior de complexidade, considera-se mais adequado que seja abordada em anos posteriores.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

Este trabalho é caracterizado como um estudo qualitativo, que tem por característica a investigação de fenômenos em seu contexto e em toda sua diversidade, levando em consideração os conhecimentos e as práticas dos sujeitos envolvidos (BOGDAN; BIKLEN, 1994). Vale destacar que são apresentados alguns dados quantitativos de modo a complementar, com maior precisão, as informações coletadas.

Em consonância com a BNCC (2017) e as demandas cognitivas propostas por Bryant e Nunes (2012), estruturou-se um plano de ensino para introduzir a probabilidade com uma turma de 31 estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede privada de Porto Alegre, RS. A atividade foi aplicada na modalidade remota por um dos autores, que também é docente desta turma.

É pertinente ressaltar que foi a primeira vez que esse grupo de alunos trabalhou com probabilidade, embora seu ensino esteja previsto desde 2018, conforme documentos oficiais do referido colégio, em consonância com a BNCC (2017). Porém, nesta instituição, a adequação feita para atender às normativas da BNCC foram estabelecidas no ano de 2019 e entraram em vigência em 2020.

Nessa perspectiva, apresenta-se no Quadro 2, a estrutura organizada para a construção das 11 questões aplicadas com os estudantes. Cada pergunta, elaborada a partir das habilidades previstas na BNCC (2017), teve como foco o trabalho com uma ou mais demandas cognitivas. Como exceção, a questão sete, visou a atender, conjuntamente, tanto a probabilidade quanto a estatística, conforme sugere Batanero (2019) ao utilizar o termo "estocástica" para se referir a esta situação. Segundo a autora, a estocástica enfatiza a dependência mútua do conhecimento e raciocínio sobre probabilidade e estatística, que estão conectadas e devem ser ensinadas conjuntamente (Batanero, 2019).

Quadro 2 – Classificação das perguntas quanto às demandas cognitivas de Bryant e Nunes (2012)

Questões/situações propostas aos estudantes	*Demandas cognitivas*		
	Compreensão da aleatoriedade	*Formação do espaço amostral*	*Quantificação e comparação de probabilidades*
1) Por que o juiz usa uma moeda?	✓		
2) Você considera que essa regra utilizada pelo juiz (usar a moeda para definir a equipe que inicia com a bola) é justa? Justifique.			✓
3) Quais são os possíveis resultados que podemos obter quando lançamos uma moeda?		✓	
4) Quando o juiz lança uma moeda apenas uma vez, qual a chance de sair: (a) Cara? (b) Coroa?			✓

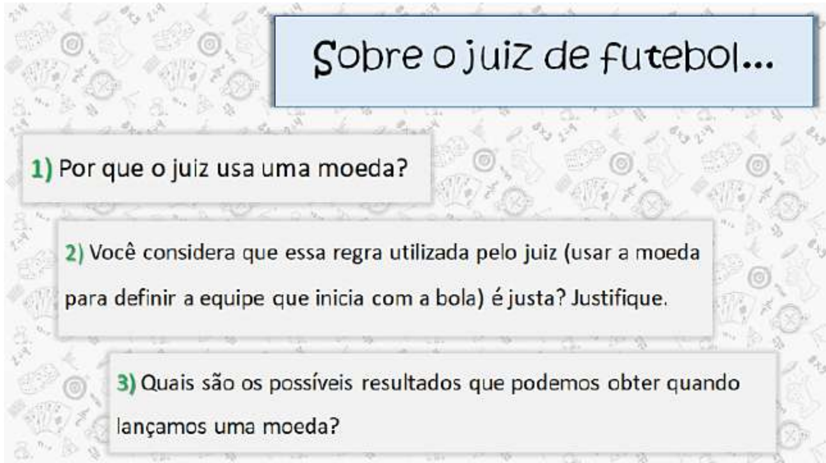
5) Se o juiz lançar uma moeda 20 vezes, quantas caras e quantas coroas você acha que sairão? Justifique.	✓		
6) Agora, você deve lançar a sua moeda 20 vezes. Quais foram os resultados encontrados? Registre-os.	✓		✓
7) Com os dados obtidos na etapa anterior, construa um gráfico, usando a régua!			
8) Você pode afirmar que todos os resultados que você encontrou são iguais aos dos seus colegas? Justifique.	✓		
9) Supondo que na primeira jogada da sua moeda tenha aparecido cara. Você pode afirmar que, na próxima jogada, sairá coroa? Justifique.	✓		
10) Quais são os possíveis resultados quando lançamos um dado comum (cúbico)?		✓	
11) O juiz perdeu sua moeda, mas encontrou um dado cúbico numerado de 1 a 6 em seu bolso. Como ele poderia estabelecer uma nova regra para definir a equipe que inicia com a bola no primeiro tempo do jogo, de forma que possa ser considerada justa para ambos os times?	✓	✓	✓

Fonte: os autores.

Para a aplicação das tarefas foi utilizado um encontro (uma hora aula), ministrada por meio da ferramenta *Google Meet*, recurso que permite a realização de videochamadas online. Solicitou-se que os estudantes dispusessem dos seguintes materiais: caderno de matemática, lápis, borracha, régua e uma moeda (de qualquer valor). Assim, a coleta de dados da atividade realizada foi composta por 11 questões, tomando por base o experimento do lançamento de uma moeda. Cada um deveria responder as perguntas feitas em seu caderno durante o tempo da aula e, ao final deste encontro, postar fotos das resoluções no Google, utilizando o *Google Sala de Aula*, ferramenta destinada à publicação de tarefas e que possibilita a interação entre os usuários.

Para que a turma tivesse melhor compreensão da atividade, elaborou-se uma apresentação, com o recurso do *Google Apresentações*, que foi compartilhada durante a aula. Assim, todos poderiam seguir as orientações do docente/pesquisador e, também, acompanhar a atividade por meio dos slides. A Figura 1 exemplifica a forma como as perguntas foram apresentadas.

Figura 1 – Captura de tela das primeiras perguntas feitas aos estudantes



Fonte: elaborado pelos autores.

As questões foram elaboradas de modo que fosse viabilizada a análise quanto ao entendimento ou não das três primeiras demandas cognitivas pelos estudantes. Assim, esta investigação pode ser caracterizada como aplicada e descritiva (BISQUERRA, 1989).

DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

Nesta seção serão descritas as etapas da tarefa realizada e a análise da mesma fundamentada em Bryant e Nunes (2012). Destaca-se que a atividade aplicada não teve como propósito realizar um estudo aprofundado de probabilidade, mas sim fazer uma abordagem introdutória ao assunto, utilizando como motivação inicial o futebol, presente no imaginário da maioria dos estudantes.

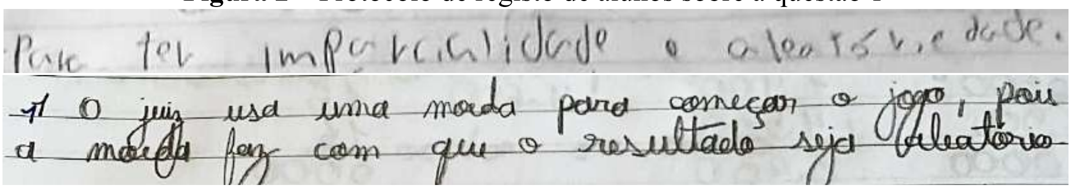
Para iniciar as discussões em aula, intitulada de “Quem começa a partida?”, mostrou-se um vídeo, que apresenta algumas regras sobre o início e o reinício de uma partida de futebol. O vídeo está disponível na plataforma *YouTube*[1] e foi utilizado com o objetivo de provocar uma reflexão sobre o motivo de o juiz lançar uma moeda, para determinar qual equipe terá a posse da bola, para iniciar a partida.

Após o vídeo, iniciou-se os questionamentos com a seguinte pergunta: *Por que o juiz utiliza uma moeda?* (Figura 1). Tal pergunta teve como objetivo analisar o entendimento dos estudantes a respeito da aleatoriedade que é a primeira demanda proposta por Bryant e Nunes (2012).

[1] Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=BLM7iNrqwnk>. Acesso em agosto de 2020.

Dos 31 respondentes, 19 (61,3 %) afirmaram que é para definir qual time começa a partida, quatro participantes (12,9%) utilizaram o verbo “sortear” para decidir quem iniciaria o jogo ou o termo “lado do campo”, seis (19,4%) empregaram a palavra “justo”, com a ideia de imparcialidade na escolha do time que ficaria com a bola e apenas dois (6,4%) utilizaram o termo “aleatoriedade”. A Figura 2 ilustra estes dois últimos casos.

Figura 2 – Protocolo de registo de alunos sobre a questão 1



Fonte: a pesquisa.

Assim como nos resultados obtidos por Batista e Borba (2016), constatou-se que alguns respondentes compararam a aleatoriedade com sorte ou azar. A aleatoriedade chancela qualquer cenário probabilístico, sendo a condição que assegura a imparcialidade em situações de lançamento de moedas ou dados ou sorteios de loteria.

A compreensão da probabilidade é necessária para o entendimento de muitos fenômenos do mundo que nos cerca, mais especificamente num cenário de análise de riscos e discernimento de justiça (SANTANA, FERNANDES; BORBA, 2020). Tal reflexão foi proposta no segundo questionamento, que fez referência à comparação e quantificação de probabilidades, terceira demanda cognitiva de Bryant e Nunes (2012): *Você considera que a regra utilizada pelo juiz (usar a moeda para definir a equipe que inicia com a bola) é justa? Justifique.* As respostas obtidas foram agrupadas e estão apresentadas na Tabela 1.

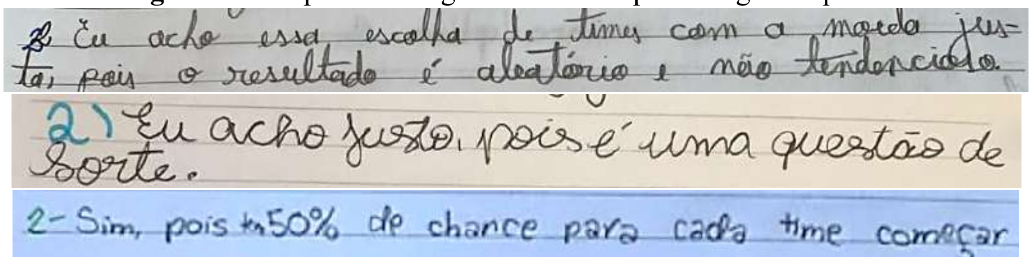
Tabela 1 – Respostas obtidas da segunda questão

Categorias	Estudantes	(%)
A – Sim, devido à imparcialidade da regra.	12	38,7
B – Sim, depende da sorte.	7	22,6
C –Sim, a probabilidade de começar o jogo é igual para os dois times.	6	19,4
D – Sim, há 50% de chance para cada time.	1	3,2
E – Sim, com justificativa incorreta.	1	3,2
F – Sim, mas não apresentou justificativa.	1	3,2
G – Não, há pessoas que tem mais sorte que outras.	1	3,2
H – Mais ou menos, depende de sorte.	2	6,5
Total	**31**	**100**

Fonte: a pesquisa.

A Figura 3 apresenta três exemplos de respostas obtidas e que fazem parte das categorias A, B e C (ver Tabela 1), respectivamente.

Figura 3 – Respostas de alguns estudantes para a segunda questão


2 Eu acho essa escolha de times com a moeda jus-
ta, pois o resultado é aleatório e não tendenciado.

2) Eu acho justo, pois é uma questão de
sorte.

2- Sim, pois tem 50% de chance para cada time começar

Fonte: a pesquisa.

É pertinente ressaltar que 25,8% justificaram suas respostas positivas ou negativas utilizando o vocábulo “sorte”. Sobre isso, Fernandes, Gea e Diniz (2019), em uma pesquisa com futuros professores da Educação Básica, constaram que argumentos de sorte e de azar também foram empregados na definição de tarefas de probabilidade de maneira preponderante. Esses autores classificaram essa situação como emblemática, uma vez que esses docentes não diferenciaram os fenômenos aleatórios dos determinísticos.

As questões de números 3 e 10 (*Quais são os possíveis resultados que podemos obter quando lançamos uma moeda?* e *Quais são os possíveis resultados quando lançamos um dado comum (cúbico)?*) tiveram por finalidade verificar se a turma era capaz de identificar o espaço amostral de um experimento aleatório, que seria a segunda demanda cognitiva de Bryant e Nunes (2012). A primeira das duas questões estava relacionada ao lançamento de uma moeda, já a segunda, ao lançamento de um dado comum (6 faces).

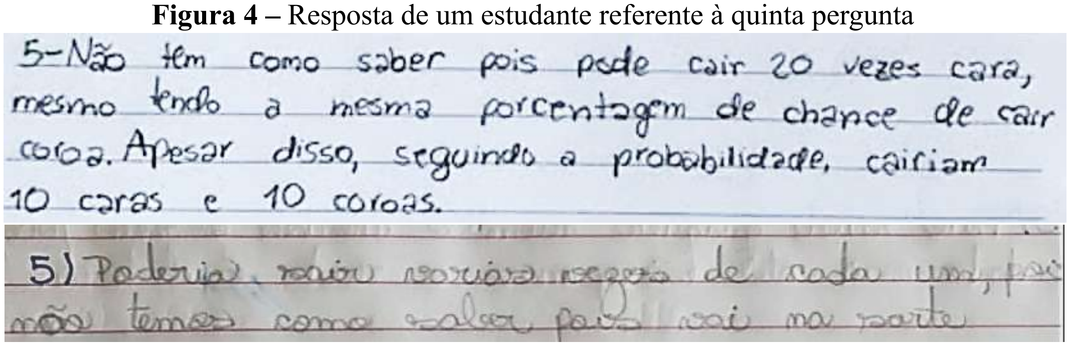
Todos os estudantes identificaram corretamente o espaço amostral do lançamento de uma moeda, afirmando que as possibilidades de resultados são “cara” e “coroa”. Quanto ao lançamento de um dado, 28 participantes (90,3%) responderam de forma correta. Dois (6,5%) não responderam e, um (3,2%), apresentou uma resposta parcial dizendo que os possíveis resultados do lançamento de um dado são apenas os valores “6” ou “3”.

Santos (2015) afirma que a noção de espaço amostral pode ser desenvolvida por meio da articulação do pensamento probabilístico e do raciocínio combinatório, destacando o papel do educador na elaboração de estratégias de ensino que promovam a elaboração conceitual deste tópico pelo estudante. Corroborando essa ideia, Oliveira e Barbosa (2020) enfatizam a relevância do estudo deste assunto desde os primeiros anos de escolaridade. Para tanto, o professor deve promover simulações e jogos, entre outros procedimentos metodológicos, que viabilizem o reconhecimento de situações em que a aleatoriedade está presente (OLIVEIRA; BARBOSA, 2020).

As perguntas quatro e cinco tiveram como propósito abordar a quantificação e a comparação de probabilidades, terceira demanda cognitiva de Bryant e Nunes (2012). Assim, a quarta pergunta questionou se: *Quando o juiz lança uma moeda, apenas uma vez, qual a chance de sair (a) cara? e (b) coroa?* Na análise das respostas, verificou-se que 25 (80,6%) dos alunos responderam corretamente utilizando percentuais, dizendo que era de 50% para cada face da moeda. Vale destacar que, desses 25 respondentes, somente um usou, além da porcentagem, a notação fracionária. Dois estudantes (6,5%) apresentaram a resposta na forma de texto, utilizando termos, tais como “muito”, “pouco” e “mesma”. Quatro respostas (12,9%) foram imprecisas.

Sobre a pergunta de número cinco (*Se o juiz lançar uma moeda 20 vezes, quantas caras e quantas coroas você acha que sairão? Justifique.*), dos 31 respondentes, 12 (38,7%) afirmaram que, seguramente, seriam 10 caras e 10 coroas, mostrando, assim, uma visão determinista da situação. Outros 13 (41,9%) estudantes relataram possíveis valores, justificando com argumentos relacionados à probabilidade que, embora não utilizando a palavra “aleatoriedade”, remetiam a ela. Assim, as seguintes expressões foram utilizadas: “sorte”, “não tem como saber”, “não é possível determinar ao certo”, “depende”, “não tem como prever” e “pode ser qualquer coisa”. Nesse sentido, é relevante observar que, esses discentes já possuem ideias intuitivas sobre a aleatoriedade, mas ainda não conseguem utilizá-la em suas justificativas. A Figura 4 exemplifica duas dessas situações.

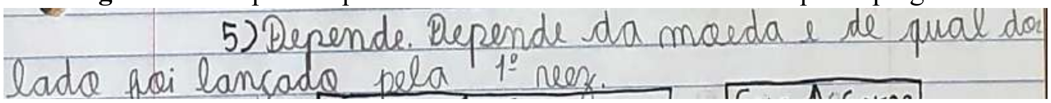
Figura 4 – Resposta de um estudante referente à quinta pergunta



Fonte: a pesquisa.

Houve dois (6,5%) estudantes que estipularam quantidades de caras e coroas, sem, contudo, apresentar justificativas. Outros dois (6,5%) responderam “não tenho ideia” e, ainda, dois (6,5%) apresentaram respostas errôneas ou imprecisas, conforme exemplificado na Figura 5.

Figura 5 – Resposta equivocada de um estudante referente à quinta pergunta



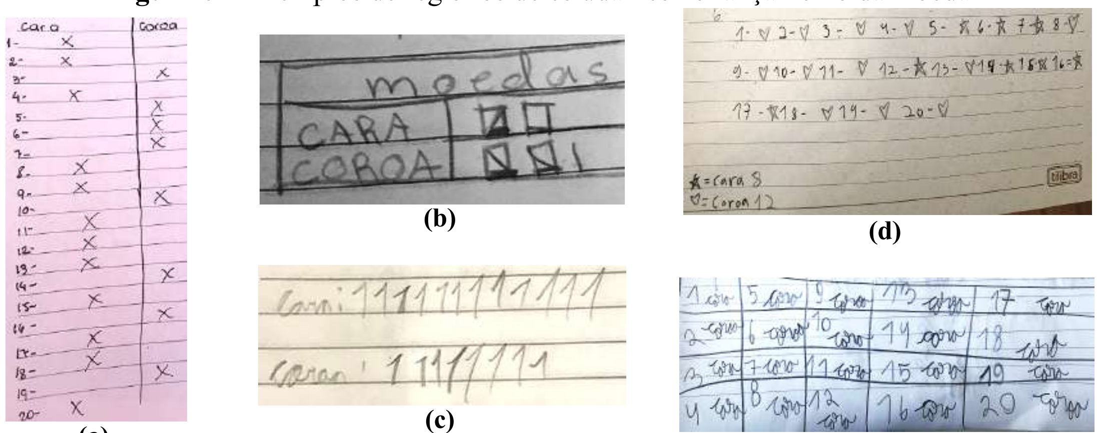
Fonte: a pesquisa.

Os eventos aleatórios podem ser mais bem compreendidos mediante atividades que contemplem a probabilidade frequentista (BATISTA; BORBA, 2016). Essa percepção vem ao encontro das prerrogativas propostas pela BNCC (2017) em relação ao ensino de probabilidade no sexto ano. Nesse sentido, Batanero (2016) ressalta a necessidade do trabalho com a probabilidade frequencial de forma a promover o entendimento de que os resultados obtidos em um determinado experimento podem ser diferentes, mesmo quando aplicados sob as mesmas condições. Além disso, a referida abordagem complementa o significado clássico, promovendo articulação entre a estatística e a probabilidade.

Com a sexta questão (*Agora, você deve lançar a sua moeda 20 vezes. Quais foram os resultados encontrados? Registre-os.*), objetivou-se a abordagem das ideias de aleatoriedade e comparação de probabilidades por meio de um experimento repetido várias vezes. No relato deste item da tarefa, quatro (12,9%) estudantes obtiveram como resultado 10 caras e 10 coroas. Isso trouxe certa inquietação aos demais, que também estavam esperando por esse resultado. Nesse contexto, Fischbein (1975) coloca que a compreensão do acaso nem sempre acontece de maneira espontânea, uma vez que nosso pensamento muitas vezes está condicionado a explicações deterministas advindas da Matemática. Além disso, o acaso não é uma situação reversível na qual se pode voltar ao início de um experimento, como lançar uma moeda e, repetindo sob as mesmas condições, obter o mesmo resultado (GEA et al., 2016). A respeito do restante da turma, 10 alunos (32,3%) obtiveram 11 a 9, 12 (38,7%) encontraram 12 a 8, três (9,7%) 13 a 7, um (3,2%) estudante obteve 15 a 5 e novamente um, obteve 16 a 4.

Para a realização desse registro, os participantes não apresentaram dúvidas, apenas alguns questionaram se havia um modelo específico a ser seguido ou se poderiam criar os seus próprios. Salientou-se que, para esta tarefa, qualquer tipo de registro poderia ser utilizado, desde que ele fosse claro e organizado. A Figura 6 ilustra cinco destes modelos, realçando a diversidade encontrada nas anotações feitas.

Figura 6 – Exemplos de registros de estudantes no lançamento da moeda



(a) (b) (c) (d) (e)

Fonte: a pesquisa.

Observa-se que, embora todos os registros dos estudantes da Figura 6 sejam distintos, o princípio de organização deles é o mesmo. Alguns demonstraram noção intuitiva de agrupamento de dados, enquanto outros os registraram de forma não agregada ou agrupada. Sobre este aspecto, considera-se, independentemente de como foram estruturados, tais registros são formas úteis de organizar dados.

É pertinente salientar que 20 lançamentos é considerado pouco para o desenvolvimento de um trabalho com uma abordagem frequencial. Paula (2020), por exemplo, sugere a utilização de um software, que realize a simulação do lançamento de moedas, garantindo condições idênticas do experimento. Nesta situação, embora o número de lançamentos tenha sido pequeno, foi o suficiente para que o assunto fosse explorado, visto que o foco desta questão, conforme já explicitado, estava na compreensão da aleatoriedade e na comparação de probabilidades. De outra forma, os estudantes poderiam se desmotivar, caso a quantidade de jogadas fosse muito elevada. Justifica-se, assim, a opção por lançar os dados de forma concreta por se tratar de crianças que estavam tendo contato com este tema pela primeira vez.

Com o objetivo de fazer com que os estudantes pudessem relacionar os resultados probabilísticos com os estatísticos, solicitou-se na sétima questão que fizessem uma representação gráfica dos resultados obtidos com o experimento da moeda (*Com os dados obtidos na etapa anterior, construa um gráfico, usando a régua!*). Para se ter uma melhor compreensão dos dados, Wild e Pfannkuch (1999), salientam para a necessidade de se utilizar mais de um tipo de registro. A essa capacidade de permutar as representações feitas é o que esses autores denominam transnumeração, um tipo de pensamento estatístico.

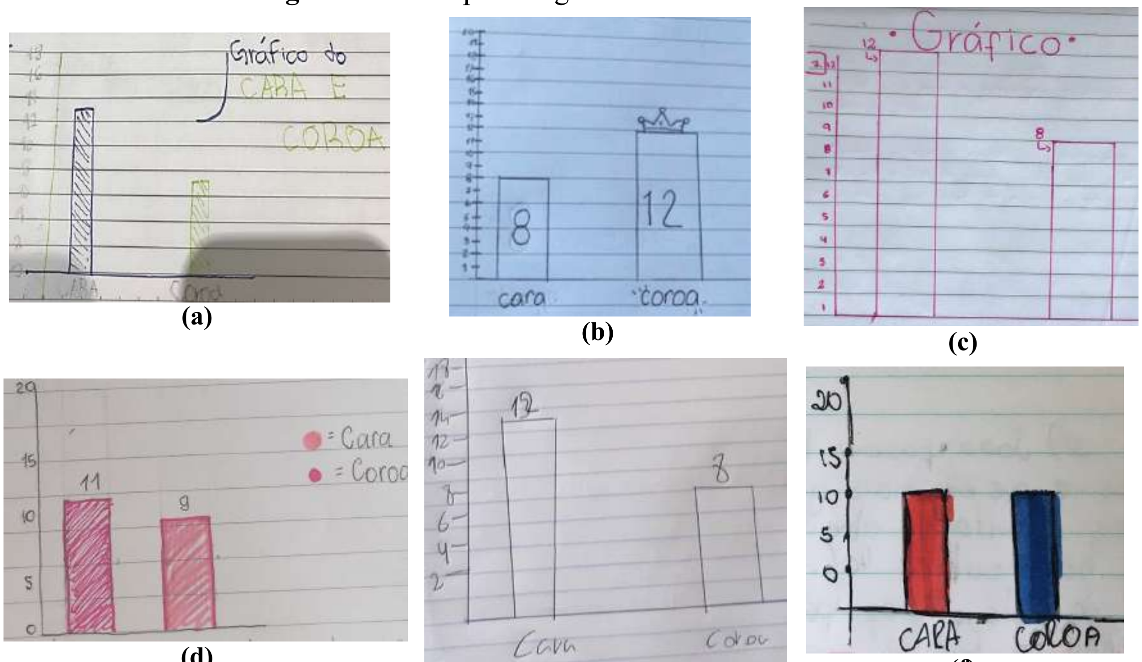
Para a execução dessa tarefa, salientou-se a relevância da utilização de uma régua na construção da representação dos dados. Alguns estudantes apresentaram dúvidas sobre qual deveria ser o tipo de gráfico a ser elaborado (barras, colunas, linhas ou setores). O docente/pesquisador destacou que nem todos os tipos de gráficos são adequados para todas as situações e que essa discussão seria feita mais adiante. Assim eles foram instruídos que, para essa situação, deveriam elaborar um gráfico que já soubessem fazer, pois afinal não foram dadas orientações sobre como elaborar a representação desses dados.

Observou-se que, embora nem todos os itens estejam presentes em suas construções gráficas, conforme recomendam Friel, Curcio e Bright (2001), considerou-se que esses estudantes apresentaram conhecimentos básicos, suficientes e adequados para este nível escolar. Tais autores elencam alguns elementos estruturais que devem estar presentes em gráficos estatísticos: títulos e rótulos, eixos e escalas, elementos usados para representar os dados (os quais os autores denominam por especificadores, como o caso do retângulo no gráfico de colunas ou os pontos em um gráfico de dispersão) e o plano de fundo do gráfico (que pode incluir cor, grade e imagens).

Dos participantes, dois (6,5%) não fizeram a representação gráfica e outros dois (6,5%) construíram tabelas em vez de gráficos. Em relação a alguns elementos destacados por Friel, Curcio e Bright (2001), analisou-se que, dos participantes que construíram os gráficos, 80,6% utilizaram um gráfico de colunas, 74,2% construíram corretamente os eixos e 80,6% identificaram corretamente os rótulos. Enfatiza-se, ainda, que 80,6% não atribuíram um título ao gráfico e 51,6% não elaboraram a escala de forma correta. Neste caso, o principal erro foi na marcação do valor inicial de um dos eixos, onde muitos começaram pelo valor "um" e não pelo valor 'zero".

A Figura 7 ilustra algumas construções. Nota-se que apenas a 7a possui um título explicativo, fato que não ocorre nas demais. No gráfico 7c estão faltando as identificações (rótulos) de "cara" e "coroa". Os gráficos 7d, 7e e 7f apresentam erros nas escalas adotadas. Embora utilizem escalas distintas, não respeitam a proporção no espaçamento entre os valores identificados no eixo das ordenadas. Observa-se, ainda, que o zero, no eixo das ordenadas, está escrito equivocadamente. Destaca-se que o gráfico 7d exibe uma legenda e sua presença ocorreu em apenas dois dos 31registros.

Figura 7 – Exemplos de gráficos elaborados dos estudantes



(a) (b) (c)

(d) (e) (f)

Fonte: a pesquisa.

A partir das construções gráficas, os discentes foram estimulados a comparar os resultados obtidos e constataram diferenças no que se refere ao número total de caras e de coroas, mediante a pergunta de número oito: *Pode-se afirmar que os resultados que você encontrou são iguais aos de seus colegas? Justifique*.

Dos 31 discentes, três (9,7%) não responderam a esse questionamento, dois (6,5%) apresentaram respostas imprecisas (sim/talvez) e 26 (83,8%) responderam que não obtiveram resultados iguais ao dos colegas. Nesta última categoria, encontram-se as afirmativas justificadas pela ideia de aleatoriedade em 13 respostas (50%), sendo que, em duas delas, eles utilizaram o termo em suas respostas. A ideia de sorte apareceu em cinco explicações (19,2%), enquanto fatores externos, como por exemplo, o tamanho da moeda e a força que foi empregada para jogá-la apareceram em três justificativas (11,5%). Em quatro (15,4%) a explicação foi imprecisa e um (3,8%) aluno não justificou.

O entendimento da aleatoriedade é algo complexo, sendo considerado o cerne do conhecimento probabilístico por Azcárate, Cardeñoso e Porlán (1998). Esses autores ressaltam que concepções incorretas sobre esse conceito podem determinar obstáculos na compreensão dos eventos aleatórios.

A ideia de aleatoriedade motivou, também, a nona questão: *Supondo que na* *primeira jogada da sua moeda tenha aparecido cara, você pode afirmar que, na próxima jogada, sairá coroa? Justifique*. Diferentemente do que encontraram Gea et al. (2016), cujos estudantes (de 10 e 11 anos) apresentaram um alto número de respostas incorretas, muitas relacionadas à ideia de "sorte", neste caso as respostas foram satisfatórias. Constatou-se que 28 (90,3%) estudantes responderam "não" e, a maioria, justificou que não se pode prever o resultado do próximo lançamento ou não se pode fazer previsões a partir da jogada atual. Desses, quatro argumentaram que se trata de uma questão de probabilidade, dois enfatizaram que a moeda não possui um padrão, um estudante afirmou que, na realidade, é uma questão de sorte e outro apontou que o experimento é aleatório. Apenas dois (6,5%) responderam que o resultado depende da jogada anterior e um (3,2%) afirmou que é possível sim prever o resultado do lançamento da moeda.

Na questão 11, apresentou-se a situação: *O juiz perdeu sua moeda, mas encontrou um dado cúbico numerado de 1 a 6 em seu bolso. Como ele poderia estabelecer uma nova regra para definir a equipe que inicia com a bola no primeiro tempo do jogo, de forma que possa ser considerada justa para ambos os times?* Para a resolução de tal problema fez-se necessário o emprego de três primeiras demandas propostas por Bryant e Nunes (2012). Buscou-se, também, proporcionar o desenvolvimento do raciocínio probabilístico, apoiado nas ideias de incerteza, aleatoriedade e amostra (VÁSQUEZ et al., 2019).

Dos participantes, 22 (70,9%) elaboram uma nova regra condizente com a situação apresentada. Para Bryant e Nunes (2012), crianças com mais de 10 anos possuem ideias sobre aleatoriedade e conseguem estabelecer associações entre o justo e o não justo. Assim, tais autores enfatizam a necessidade de se explorar essa concepção em aula, mediante a utilização de jogos. Verificou-se que a maior parte dos alunos conseguiu articular as três demandas de Bryant e Nunes (2012), consideradas pelos próprios autores como essenciais na compreensão de problemas probabilísticos. As respostas dadas pelos discentes nesta 11ª questão foram organizadas em categorias, conforme exibido na Tabela 2.

Tabela 2 – Distribuição das respostas da décima primeira pergunta

Categorias	Estudantes	(%)
A – Estabelecer de 1 a 3 para um time e de 4 a 6 para outro.	9	29,0
B – Estabelecer os números pares para um time e os números ímpares para outro.	6	19,4
C – Dividir três números para cada time.	5	16,1
D – Escolher um número para cada time.	2	6,5
E – Responderam de forma inadequada.	5	16,1
F – Não responderam.	4	12,9
Total	**31**	**100**

Fonte: a pesquisa.

Sublinha-se, no entanto, que atingir o objetivo desta última tarefa proposta não implica que os estudantes dominem, separadamente, cada uma das três demandas, conforme já discutido nas questões anteriores. Mediante os protocolos analisados, foi perceptível que praticamente todos demonstraram noção intuitiva de aleatoriedade, pelo menos em algum momento da atividade, mesmo que poucos tenham utilizado o termo apropriado. Tal constatação ficou clara, principalmente, quando se observam os resultados das questões seis e nove. Isso vai ao encontro do que destacam Bryant e Nunes (2012), quando afirmam que estudantes desta faixa etária já mostram um entendimento da ideia intuitiva de aleatoriedade.

A respeito do espaço amostral, observou-se, mais uma vez, que quase a totalidade da turma conseguiu identificá-lo nas situações apresentadas nas questões 3, 10 e 11. Considerado como um "elemento essencial na compreensão da natureza da probabilidade" (BRYANT; NUNES, 2012, p. 4), Oliveira e Barbosa (2020) sublinham que, para descrevê-lo, a criança deve, em determinada circunstância, considerar todos os possíveis eventos que podem acontecer.

Sobre a quantificação e comparação de probabilidades, verificou-se que a maioria dos estudantes quantificou a probabilidade. Isso ficou evidenciado, principalmente, pelos registros feitos pelos discentes nas questões quatro e seis. No entanto, esperam que esse valor seja obtido nos experimentos aleatórios, caracterizando, dessa forma, o pensamento, ainda, essencialmente determinístico. Nesse contexto, Batanero (2016) e Campos e Carvalho (2016) reforçam a necessidade do trabalho de caráter aleatório com estudantes da Educação Básica, no intuito de promover o entendimento de que a Matemática não se limita ao domínio determinístico. Em relação a esse aspecto, Santana, Fernandes e Borba (2020, p. 250) afirmam que “as probabilidades são quantidades com base em proporções, e é preciso calculá-las e/ou fazer comparações das probabilidades de dois ou mais eventos”.

Por fim, é pertinente sublinhar que, na aula seguinte, os 11 questionamentos foram retomados com a turma e que alguns conceitos foram apresentados e explicados com maior detalhamento, tais como as ideias de espaço amostral e aleatoriedade. Os estudantes demonstraram bastante interesse pelas ideias e relataram gostar de aprender novos termos em Matemática. Diante dessa situação, o docente/pesquisador explorou outros cenários e alertou os estudantes para o uso correto de tais expressões, exemplificando situações e solicitando que eles elaborassem exemplos a fim de que todos pudessem participar da discussão. Sobre isso, Gal (2005) reforça que aliar a linguagem cotidiana ao significado intuitivo de probabilidade é fundamental para proporcionar aos discentes uma construção de linguagem própria da probabilidade.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este estudo descreve uma pesquisa sobre a compreensão de conceitos referentes à probabilidade com estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental, fundamentada nas demandas cognitivas propostas por Bryant e Nunes (2012) e na BNCC (2017), utilizando a temática futebolística. Para tanto, elaboraram-se questões que permitiram a análise da compreensão da aleatoriedade, do espaço amostral e da comparação e cálculo de probabilidades.

A atividade foi realizada remotamente, em função pandemia de Covid-19 que assola o planeta, neste período. Mesmo diante desta circunstância, considera-se que o trabalho com a probabilidade pode ser desenvolvido por meio de simulações e exploração de situações e assuntos cotidianos, concebendo práticas pedagógicas que possam ser aplicadas ao modelo online. A pesquisa aqui realizada tornou-se possível por meio da utilização das ferramentas *Google Apresentações*, para disponibilização das questões feitas aos estudantes, *Google Meet*, para proporcionar a interação entre os participantes da investigação e *Google Sala de Aula*, como recurso destinado à coleta de dados.

Sobre o objetivo inicialmente proposto neste estudo, afirma-se que a análise realizada produziu resultados positivos frente ao estudo da probabilidade. No tocante ao entendimento de aleatoriedade, verificou-se que os estudantes apresentam uma ideia intuitiva sobre esse conceito, faltando, na maioria dos casos, a utilização de vocabulário adequado. Constatou-se, portanto, que os participantes dessa pesquisa apresentam um raciocínio intuitivo, ainda baseado no senso comum, em relação às demandas propostas por Bryant e Nunes (2012). Para exemplificar essa situação verificou-se que vários utilizaram a palavra “sorte” como sinônimo de aleatoriedade.

O conceito de aleatoriedade pode estar associado à ideia de surpresa no sentido de imprevisibilidade e, com isso, há uma tendência de se procurar respostas alternativas para eventos aleatórios, como: sorte ou azar, interferência divina, não havendo espaço para pensamento não determinístico (BOROVCNIK, 2016). Portanto, considerando que estudantes, antes mesmo dos 7 anos, são capazes de distinguir fenômenos aleatórios de deterministas (FISCHBEIN, 1975), é relevante que a probabilidade seja abordada desde cedo nas escolas.

Em relação ao espaço amostral, apurou-se que, praticamente todos foram capazes de defini-lo nas situações exploradas. Por fim, sobre a quantificação e comparação de probabilidades, a maioria dos discentes consegue comparar e quantificar. Contudo, há a necessidade de um trabalho efetivo quanto ao desenvolvimento do pensamento probabilístico, pois muitos generalizam essa quantificação para os experimentos aleatórios. Tal fato pôde ser observado no lançamento de uma moeda 20 vezes, em que cerca de um terço dos estudantes esperava que fossem obtidas 10 caras e 10 coroas.

A formalização dos conceitos referentes à probabilidade deve ser oriunda de vivências que propiciem a compreensão gradativa das demandas cognitivas supracitadas, partindo de uma abordagem experimental que encaminhe para um modelo teórico. Além disso, há a necessidade do desenvolvimento da linguagem probabilística na forma verbal, numérica, simbólica, tabular e gráfica, conforme apontam Vásquez et al. (2019), no decorrer da Educação Básica.

Assim, considera-se que o estudo da probabilidade tende a ser profícuo se iniciado nos primeiros escolares. Mediante a vivência de uma ampla gama de experiências que possibilitem a discussão entre os pares sobre os resultados obtidos em diferentes situações probabilísticas, pode-se construir uma base sólida para a formalização de conceitos.

REFERÊNCIAS

AZCÁRATE, P.; CARDEÑOSO, J. M.; PORLÁN, R. Concepciones de futuros profesores de primaria sobre la noción de aleatoriedad. **Enseñanza de las ciencias**, Barcelona, v. 16, n. 1, p. 85-97, 1998.

BATANERO, C. Significados de la probabilidad en la educación secundaria. **Relime**, v. 8, n. 3, p. 247-263, 2005.

BATANERO, C. Posibilidades y retos de la enseñanza de la probabilidad en la educación primaria. *In*: 6º Congreso Uruguayo de Educación Matemática - VI CUREM, 2016, Montevidéu, Uruguai. **Anais** [...]. Montevidéu, 2016, p. 1-8.

BATANERO, C. Treinta años de investigación en educación estocástica: Reflexiones y desafíos. *In*: CONTRERAS, J. M.; GEA, M. M.; LÓPEZ-MARTÍN, M; M.; MOLINA-PORTILLO, E. (Eds.). Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística - III CIVEEST. **Anais** [...]. Granada, 2019, p. 1-15.

BATISTA, R.; BORBA, R. E. S. R. No jogo não é a moeda que diz, não é a gente que quer não: o que dizem crianças sobre a probabilidade. **VIDYA**, Santa Maria, v. 36, n. 2, p. 237-255, jul/dez. 2016. https://doi.org/10.37781/vidya.v36i2.1502

BISQUERRA, R. **Métodos de investigación educativa**: guía práctica. Barcelona: CEAC, 1989.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S**. Investigação qualitativa em educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Lisboa: Porto Editora, 1994.

BOROVCNIK, M. Probabilistic thinking and probability literacy in the context of risk. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 18, n.3, p. 1491-1516, set. 2016.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais** (1° e 2° ciclo): Matemática. MEC/SEF. Brasília, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Base Nacional Comum Curricular**: A área de Matemática. Brasília, 2017.

BRYANT, P.; NUNES, T. **Children's understanding of probability**. A literature review (full report). Londres: Nuffield Foundation, 2012.

CAMPOS, T. M. M.; CARVALHO, J. I. F. Probabilidade nos anos iniciais da educação básica: contribuições de um programa de ensino. **Em Teia**, Pernambuco, v. 7, n. 1, p. 1-18, 2016. https://doi.org/10.36397/emteia.v7i1.3884.

FERNANDES, J. A.; GEA, M. M.; DINIZ, L. N. Tarefas propostas para futuros professores dos primeiros anos para ensinar probabilidades. **Revista Brasileira de Educação**, Rio de Janeiro. v. 24, p. 1-21, out. 2019. https://doi.org/10.1590/s1413-24782019240039

FISCHBEIN, E. **The intuitive sources of probability thinking in children**. Dordrecht: Reidel, 1975.

FRIEL, S.; CURCIO, F.; BRIGHT, G. Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. **Journal for Research in mathematics Education**, p. 124-158, 2001.

GAL, I. Towards "probability literacy" for all citizens: building blocks and instructional dilemmas. *In*: G. A. Jones (Ed.), **Exploring probability in school**: challenges for teaching and learning. Nova Iorque: Springer, p. 39-63, 2005.

GEA, M. M.; FERNANDES, J. A.; BATANERO, C. B.; BENAVIDES, A. J. Intuición sobre el azar: Análisis de una experiencia aleatoria con alumnos de Educación Primaria. *In*: MARTINHO, M. H., TOMÁS FERREIRA, R. A., VALE, I.; GUIMARÃES, H. (Eds.) Seminário de Investigação em Educação Matemática - XXVII SIEM, Porto, Portugal. **Anais** [...]. Porto, 2016, p. 89-102.

OLIVEIRA, A. P.; BARBOSA, N. D. O jogo pedagógico "brincando com a probabilidade" para os anos iniciais do ensino fundamental: o espaço amostral. **Zetetike**, Campinas, v. 28, p.1-21, jan. 2020. DOI: 10.20396/zet.v28i0.8656609.

PAULA, F. V. O cálculo de probabilidades sob as abordagens clássica e frequentista. **Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática**, v. 5, n. 2, p. 398–406, 2020. DOI: 10.34179/revisem.v5i2.13272.

SANTANA, M. R. M.; FERNANDES, J. A.; BORBA, R. E. S. R. Análise das demandas cognitivas nas tarefas de probabilidade propostas em livros didáticos dos primeiros anos de escolarização. **Revista Paraense de Educação Matemática**. Campo Mourão, v. 9, n. 18, p.243-262, jan/jun. 2020. DOI: 10.33871/22385800.

SANTOS, J. A. F. L. **A produção de significações sobre combinatória e probabilidade numa sala de aula do 6º ano do Ensino Fundamental a partir de uma prática problematizadora**. 2015. 191 p. Tese (Doutorado em Educação) − Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Educação, Universidade São Francisco, Itatiba, 2015.

VÁSQUEZ, C.; ALSINA, A.; PINCHEIRA, N.; GEA, M. M.; CHANDIA, E. Una primera aproximación a la caracterización de un modelo para una enseñanza eficaz de la probabilidad a partir de las primeras edades. *In*: CONTRERAS J. M.; GEA, M. M.;

LÓPEZ-MARTÍN, M; M.; MOLINA-PORTILLO, E. (Eds.). Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística - III CIVEEST. **Anais** [...]. Granada, 2019.

VIALI, L.; SILVA, M. M. S. Sobre a necessidade de se iniciar o ensino/aprendizagem da estatística e da probabilidade na infância. **EM TEIA – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, Recife, v. 7, n. 1, p. 1-18, 2016.

WILD, C. J.; PFANNKUCH, M. Statistical thinking in empirical enquiry. **International Statistical Review**. v. 67, n. 3. México, p. 223-265, 1999.

Submetido em 14 de outubro de 2020.
Aprovado em 01 de maio de 2021.