REVISEM
Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática

https://doi.org/10.34179/revisem.v6i3.14644

TAREFAS EXPLORATÓRIO-INVESTIGATIVAS PARA O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE QUADRILÁTEROS NO 8.º ANO

EXPLORATORY-INVESTIGATIVE TASKS FOR TEACHING AND LEARNING OF QUADRILATERALS IN THE 8TH YEAR

Dayselane Pimenta Lopes Rezende
Universidade Federal de Juiz de Fora – UFJF
lanedayse@gmail.com

Reginaldo Fernando Carneiro
Universidade Federal de Juiz de Fora – UFJF
reginaldo.carneiro@ufjf.edu.br

Resumo

Este artigo tem como objetivo discutir as contribuições das tarefas exploratório-investigativas e dos materiais didáticos manipuláveis para o estudo de quadriláteros por alunos do 8.º ano do Ensino Fundamental em uma escola pública do interior do estado do Rio de Janeiro. Utilizaram-se, para produção de dados, o diário de campo, a gravação em áudio e vídeo da realização das tarefas pelos alunos, o relatório fotográfico dos diversos momentos e das atividades. As tarefas exploratório-investigativas possibilitaram ao aluno a compreensão de conceitos de quadriláteros, por meio da observação, da manipulação, do levantamento de hipóteses e do registro de suas descobertas, promovendo mudanças significativas no comportamento e na cultura escolar. Os materiais manipuláveis permitiram que os alunos identificassem propriedades dos quadriláteros e compreendessem conceitos. A pesquisa possibilitou a aprendizagem de conceitos e conteúdos por meio do envolvimento dos alunos para realizar as tarefas; o desenvolvimento da linguagem matemática, da capacidade de comunicar as ideias e das habilidades investigativas.

Palavras-chave: Quadriláteros. Tarefas exploratório-investigativas. Materiais manipuláveis. 8.° ano do Ensino Fundamental.

Abstract

This article aims to discuss the contributions of exploratory-investigative tasks and manipulative teaching materials for the study of quadrilaterals by students in the 8th grade of Elementary School in a public school in the Rio de Janeiro state. The field diary, audio and video recording of the students' performance of tasks, photographic report of the different moments and activities were used for data production. The exploratory-investigative tasks enabled the student to understand the concepts of quadrilaterals, through observation, manipulation, hypothesis survey and the recording of their discoveries, promoting significant changes in school culture and behavior. The manipulable materials allowed the students to identify properties of the quadrilaterals and to understand concepts. The research made it possible to learn concepts and content through the involvement of students to perform tasks, the development of mathematical language, the ability to communicate ideas and investigative skills.

Keywords: Quadrangles. Exploratory-investigative tasks. Manageable teaching materials. 8th year of Elementary School.

INTRODUÇÃO

Atualmente, a escola enfrenta desafios quanto ao processo de ensino e aprendizagem. E, quando se trata do ensino da matemática, a situação torna-se um pouco complexa, visto que, para muitos alunos, ela é considerada uma disciplina difícil, que traz medos, insegurança e traumas. Nesse sentido, Gómez-Chacón (2000) aponta que o aluno, ao aprender a matemática, recebe estímulos que podem fazê-lo reagir emocionalmente de maneira negativa ou positiva. Essa forma de reação – satisfação ou frustação – pode concretizar-se em atitudes que irão influenciar no seu processo formativo.

Assim como a experiência de aprendizagem dos alunos pode apresentar reações diversas à matemática, quando se trata da geometria, a situação pode se agravar, pois durante anos ela foi deixada em segundo plano, de acordo com estas duas razões apontadas por Lorenzato (1995, p. 3): "muitos professores não detêm os conhecimentos geométricos necessários para a realização de suas práticas pedagógicas" e a "exagerada importância que, entre nós, desempenha o livro didático, quer devido à má formação de nossos professores, quer devido à estafante jornada de trabalho que estão submetidos". Por um lado, se os professores não têm os conhecimentos geométricos para ensinar, eles poderão ter o livro didático como única fonte de consulta para suas aulas, pois consideram que podem confiar nele e que ele lhe possibilitará uma sequência lógica e coerente na apresentação dos conteúdos matemáticos aos estudantes. Por outro lado, a alta carga horária de trabalho a que os professores são submetidos também pode fazer com que utilizem apenas o livro didático em suas aulas.

Provavelmente essas causas não foram as únicas, mas de certo modo influenciaram negativamente o ensino da geometria. Com o intuito de superar os obstáculos da pesquisadora, que também é professora dos anos finais do Ensino Fundamental, buscamos ações que levassem à satisfação em aprender e proporcionassem repensar as estratégias de ensino da matemática.

Dentre essas diversas possibilidades, uma alternativa é a utilização de tarefas exploratório-investigativas nas aulas de matemática com o uso de materiais didáticos manipuláveis, cujas contribuições para o estudo de quadriláteros por alunos do 8.º ano do Ensino Fundamental em uma escola pública do interior do estado do Rio de Janeiro procuramos discutir. Portanto, nesta investigação buscamos responder a seguinte questão de pesquisa: Quais contribuições para a aprendizagem de quadriláteros podem ocorrer com o uso de tarefas exploratório-investigativas aliadas ao uso de material didático manipulativo?

Consequentemente, neste artigo, um recorte da dissertação de mestrado da primeira autora sob orientação do segundo autor, discutiremos as contribuições das tarefas exploratório-investigativas e dos materiais didáticos manipuláveis para o estudo de quadriláteros no 8.º ano do Ensino Fundamental.

A INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA E O MATERIAL DIDÁTICO MANIPULÁVEL

Dentre as diversas tendências em Educação Matemática, a investigação matemática é um campo de pesquisa amplo e atual. Ponte (2003) destaca que ela surgiu em Portugal, inicialmente a partir da resolução de problemas, e só depois foi ganhando força, constituindo-se em uma tendência.

Nesse processo, a investigação matemática, decorrente de uma "incomodação matemática", é fruto da exploração de atividades relevantes ao processo de investigação e culmina na constituição de um currículo que promova o desenvolvimento matemático dos alunos com diferentes níveis de desempenho (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003). Ainda para esses autores (2003, p. 16), "pode mesmo dizer-se que o primeiro grande passo de qualquer investigação é identificar claramente o problema a resolver. Por isso, não é de admirar que, em Matemática, exista uma relação estreita entre problemas e investigações".

Aliada à necessidade do professor de buscar metodologias alternativas e materiais didáticos para ensinar, a investigação matemática surge como uma atividade de ensino e de aprendizagem, por meio da qual "o aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e professor" (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003, p. 23).

A mudança no papel do professor e a gestão diferenciada da sala de aula tornam-se fundamentais e vão surgindo de maneira sistemática. É importante que o aluno saiba desde o início o que se pretende com a tarefa, ou seja, o professor deve ajudá-lo a compreender o que significa investigar, para que ele, então, aprenda a investigar.

Assim, para Ponte, Brocardo e Oliveira (2003, p. 23), pensar em investigação matemática “como atividade de ensino e aprendizagem, ajuda trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo assim, uma poderosa metáfora educativa”.

Investigar envolve quatro momentos, essenciais para que a investigação matemática aconteça:

> O primeiro momento abrange o reconhecimento da situação, a sua exploração preliminar e a formulação de questões. O segundo momento refere-se ao processo de formulação de conjecturas. O terceiro inclui a realização de testes e o eventual refinamento das conjecturas. E, finalmente, o último diz respeito à argumentação, à demonstração e avaliação do trabalho realizado. (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003, p. 20)

Os autores ainda afirmam que esses momentos podem acontecer de maneira simultânea, e em cada um deles várias atividades podem ser realizadas, como: explorar e formular questões (reconhecer uma situação problemática, explorar essa situação, formular questões); levantar conjecturas (organizar dados, formular e fazer afirmações sobre eles); fazer testes e reformulações (realizar testes e refinar uma conjectura); e justificar e avaliar (justificar uma conjectura, avaliar o raciocínio ou seu resultado). Torna-se importante que o aluno tenha suas ideias valorizadas desde o início do desenvolvimento das atividades investigativas e que a intervenção do professor ocorra sempre que se constatar a desmotivação discente.

O primeiro momento de uma investigação é essencial para que as demais etapas sejam efetivadas, pois é quando o aluno se familiariza com a tarefa e busca compreendê-la. Uma maneira de potencializar essa etapa é o trabalho em grupo, pois a troca de ideias oferece várias alternativas para a resolução da tarefa.

Nessa etapa, os alunos passam a ter contato com os dados gerados e buscam organizá-los. Surgem, assim, as primeiras conjecturas, e é importante registrar todas elas, para testá-las posteriormente. Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) afirmam que essa fase permite aos alunos interiorizar certa conjectura para refutá-la ou não. Aqui a intervenção do professor torna-se essencial, pois deve estimular os alunos a apresentarem contraexemplos para confirmar se a conjectura é válida ou não.

Entretanto, esses autores demonstram preocupação especificamente com o último momento de uma investigação, pois, na maioria das vezes, os alunos transformam suas conjecturas em conclusões, sem se preocupar em justificá-las. Se essa situação não for percebida, o processo de investigação pode perder o sentido e não atingir o objetivo proposto inicialmente.

A discussão de uma investigação propicia a sistematização das principais conjecturas, bem como a reflexão do trabalho de investigação realizado. É uma fase fundamental para os alunos, para que, por um lado, "ganhem um entendimento mais rico do que significa investigar e, por outro, desenvolvam a capacidade de comunicar matematicamente e de refletir sobre o seu trabalho e o seu poder de argumentação. Sem a discussão final, se corre o risco de perder o sentido da investigação" (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003, p. 41).

De acordo com os autores supracitados, as investigações matemáticas apontam para um percurso metodológico que permita aos alunos vivenciar cada momento da aprendizagem, propondo questionamentos, discutindo e estabelecendo relações da matemática com problemas de sua realidade.

Em um contexto de aulas investigativas, o papel do professor muda completamente em relação aos procedimentos docentes "tradicionais". Ele passa a ser moderador de todo o processo, desempenhando um "conjunto de papéis no decorrer de uma investigação: desafiar os alunos, avaliar o seu progresso, raciocinar matematicamente e apoiar o trabalho deles" (PONTE et al., 1998, p. 47). Segundo os autores, isso exige uma boa cultura matemática e capacidade de decisão para estabelecer ligações com demais conceitos matemáticos ou extramatemáticos.

Ponte (2003) relata a dificuldade de diferenciar uma tarefa investigativa de uma tarefa exploratória. Nesse sentido, o autor optou por denominar todas as tarefas investigativas como tarefas exploratório-investigativas devido à complexidade para diferenciá-las. Corroborando as ideias desse autor, Fiorentini (2006) entende que as tarefas exploratório-investigativas devem ser abertas, exploratórias, sem direcionar o pensamento do aluno ou apresentar múltiplas possibilidades de alternativa e significação. Além disso, são desenvolvidas desde a fase de exploração e de problematização até a formulação de conjecturas que podem ser testadas por meio de tentativas de demonstração, tornando-se uma investigação matemática.

Uma possibilidade de trabalho com as atividades investigativas é utilizar o material didático manipulável, que pode ser compreendido como "objetos ou coisas que o aluno é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar. Podem ser reais que têm aplicação no dia-a-dia ou podem ser objetos que são usados para representar uma ideia" (REYS, 1971 *apud*

MATOS; SERRAZINA, 1996, p. 193). Ou, ainda, segundo Lorenzato (2012, p. 18), "é qualquer instrumento útil ao processo de ensino-aprendizagem". Portanto, todo tipo de instrumento que favoreça o processo de ensino e aprendizagem dos estudantes pode ser considerado um material didático – por exemplo, um livro, um quebra-cabeça, uma calculadora, um filme, um jogo, entre outros.

A utilização de materiais didáticos manipuláveis pode ser relevante para o ensino e a aprendizagem em geometria, porém, o "uso inadequado ou pouco exploratório de qualquer material manipulável pouco ou nada contribuirá para a aprendizagem matemática" (NACARATO, 2005, p. 4). Assim, não é suficiente ter disponível esse tipo de material, sem saber utilizá-lo de modo a possibilitar o desenvolvimento de habilidades e do raciocínio matemático nos alunos.

Lorenzato (2012) destaca que sua utilização depende do professor e de suas concepções pedagógicas em relação à matemática e ao processo de ensino e aprendizagem. Se o professor o utiliza apenas para apresentar algum conceito ao aluno, ele reproduz um reforço à memorização do conceito matemático. Contudo, a forma de empregá-lo pode possibilitar que o aluno faça suas descobertas, tenha suas próprias percepções, constatações e soluções, permitindo o "desenvolvimento cognitivo e afetivo do aluno" (LORENZATO, 2012, p. 25).

Os materiais didáticos, afirma Passos (2012, p. 87), devem possuir características que facilitem sua aplicabilidade, para modelar o maior número possível de ideias e de conceitos matemáticos, pois essa gama de aplicações possibilita que os alunos "estabeleçam conexões entre os diversos conceitos intrínsecos à manipulação do material".

Corroborando essas ideias, Lorenzato (2012) descreve algumas potencialidades desse material, de acordo com a intenção de uso pelo professor, e destaca que o material manipulável pode ser um raio X, na medida em que permite ao professor observar os conceitos que devem ser revistos ou aprofundados; pode ser um regulador, uma vez que possibilita ao aluno aprender no seu próprio ritmo; pode ser um modificador, pois favorece mudanças na ordem de abordagem do conteúdo previsto; e pode ser utilizado em diferentes níveis de ensino.

Entretanto, Nacarato (2005) alerta para o uso inadequado dos materiais manipuláveis, quando o professor não propicia um ambiente de interação dos alunos com esses materiais, de modo que eles percebam as relações possíveis entre o material e os conceitos matemáticos estudados.

Pais (2000, p. 14) discutiu a utilização do material manipulável especificamente para o ensino da geometria e destacou duas concepções antagônicas:

> Uma consiste no entendimento de que os conceitos geométricos são entidades platônicas puramente racionais, pertencentes a um suposto mundo abstrato de ideias prontas, acabadas e acessíveis somente através do método axiomático em seu aspecto formal; a outra expressa-se pela visão de que o ensino da geometria pode ser reduzido ao nível de um conhecimento essencialmente sensitivo, trabalhado somente no aspecto experimental através da manipulação estrita de modelos materiais e de desenhos.

O ensino da geometria requer um processo voltado à visualização, relacionando-se à segunda concepção apontada pelo autor: é importante ensinar a geometria de maneira experimental, manipulando materiais e desenhos diversos. Assim, para que o aluno desenvolva a sua capacidade de visualizar, a forma de explorar os modelos ou materiais deve possibilitar "ao aluno a construção de imagens mentais" (NACARATO, 2005, p. 4).

As considerações feitas até aqui deixam claro que o material manipulável pode ser um aliado da prática pedagógica dos professores, na medida em que facilita a observação, a análise, o desenvolvimento do raciocínio lógico, crítico e científico, entre outras possibilidades. Porém, não basta simplesmente ter o material didático na sala de aula, sem explorar todos os conceitos possíveis dentro de cada tarefa.

Portanto, a utilização de materiais didáticos manipuláveis com tarefas exploratório-investigativas pode tornar possível que os alunos vivenciem experiências de aprendizagem importantes e passem a indagar, a discutir e a estabelecer relações entre a matemática escolar e a sua realidade.

CAMINHOS DA PESQUISA...

Optamos pela abordagem qualitativa, pois a pesquisa desenvolvida caracterizou-se pela observação do meio natural do indivíduo, com enfoque interpretativo. D'Ambrosio (2012, p. 93) ressalta que a pesquisa qualitativa tem diversas nomenclaturas, mas em todas elas o "essencial é o mesmo: a pesquisa é focalizada no indivíduo, com toda sua complexidade, e na sua inserção e interação com o ambiente sociocultural e natural".

Bogdan e Biklen (2013) consideram algumas características que definem uma pesquisa qualitativa, mas isso não significa que todas elas estejam presentes em uma investigação em mesmo grau e nível. As características apontadas por esses autores evidenciam que a postura do pesquisador é essencial para o desenvolvimento da pesquisa, e, por essa razão, consideramos que todas as características estão presentes nesta pesquisa, pois a pesquisadora estava imersa no ambiente de investigação, como professora-pesquisadora[1]. Assim, procuramos desenvolver este estudo considerando os alunos participantes como indivíduos contextualizados social e culturalmente; preocupamo-nos mais com o processo do que com o produto e apresentamos dados munidos de significados.

A pesquisa foi desenvolvida com 29 alunos de um 8.º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública que oferece desde a Educação Infantil até o 9.º ano do Ensino Fundamental, em um município do interior do estado do Rio de Janeiro. Alguns eram repetentes e, portanto, havia distorção idade/ano. Para identificá-los neste texto utilizamos nomes fictícios escolhidos pelos próprios estudantes.

A opção por realizar o estudo nessa turma teve dois motivos: primeiro, a professora-pesquisadora a acompanhava desde o 6.º ano e, nesse período, observou suas dificuldades de aprendizagem, bem como a aversão à disciplina de matemática; e a segunda razão estava no fato de essas dificuldades referirem-se ao conceito de quadriláteros, conteúdo que faz parte do currículo desse ano de escolaridade.

Para a coleta de dados, utilizamos diferentes procedimentos: registro escrito das observações da pesquisadora no diário de campo, gravação em áudio e vídeo da realização das tarefas pelos alunos, relatório fotográfico dos diversos momentos do desenvolvimento das tarefas e relatos dos alunos individualmente ou em grupo durante o trabalho. Tais procedimentos para a coleta de dados permitiram ainda o registro das percepções tanto da professora-pesquisadora, ao utilizar o diário de campo, quanto dos alunos, devido aos registros escritos e à gravação em vídeo e áudio das aulas.

Os dados foram coletados no período de setembro a novembro de 2016, durante as aulas semanais de matemática, em que foram trabalhadas pelos alunos nove tarefas exploratório-investigativas. Para desenvolver as tarefas, nesse período, propusemos à direção da escola e à orientação pedagógica uma mudança no planejamento anual da disciplina de matemática: adiantamos alguns conteúdos e deixamos os conteúdos referentes a estudo de quadriláteros para o período em que coletamos os dados.

[1] Utilizamos esta expressão, “professora-pesquisadora”, pois as atividades foram desenvolvidas pela professora em sua própria turma.

Os resultados apresentados e discutidos neste artigo referem-se a três tarefas exploratório-investigativas de uma sequência didática. Em cada uma, o material didático manipulável foi utilizado como *catalisador* do processo de aprendizagem, pois sua manipulação propiciou a descoberta, a exploração e a investigação do conceito abordado.

Essas tarefas foram escolhidas para serem apresentadas neste texto, pois são as que têm como objeto de estudo os quadriláteros, suas propriedades e as diagonais de um polígono. Ademais, também apresentaram resultados muito interessantes, nos sete grupos em que a turma foi dividida. Os alunos realizaram e discutiram as tarefas, registrando suas conclusões e conjecturas. Os grupos, sem formação rígida, foram escolhidos pelos alunos.

A primeira delas é a tarefa que intitulamos "Tarefa 4: Medindo, classificando e comparando paralelogramos", que teve como objetivos investigar e identificar as propriedades principais dos paralelogramos por meio da observação dos atributos relevantes e, também, investigar e medir dimensões e, efetivamente, comprovar a invariância da medida da área em relação às variações de paralelogramos formados, por meio da observação de regularidades: medida da altura (fixa) em relação à medida constante de, ao menos, um dos lados. Foram necessárias três aulas, de 50 minutos cada, para a realização dessa tarefa. Os estudantes utilizaram um material didático manipulável (Figura 1) para criar quadriláteros a partir de diferentes medidas dos lados e dos ângulos e depois investigaram diversos aspectos, como as posições dos lados, as figuras formadas, a área etc.

A tarefa seguinte, "Tarefa 5: Investigando os quadriláteros", buscou propiciar ao aluno a compreensão das relações entre quadriláteros e analisar as propriedades dos quadriláteros estudados, por meio da observação e da exploração dos elementos de todas as figuras obtidas. Novamente foi utilizado um material manipulável nas três aulas de 50 minutos cada. A proposta consistiu em cortar e colar diferentes circunferências de papel (Figura 3 e Figura 4) para investigar os quadriláteros que eram formados, assim como suas propriedades.

Por fim, a última tarefa abordada neste texto foi a "Tarefa 6: Traçando diagonais", que teve como finalidade compreender o conceito de diagonais de um polígono e traçar suas diagonais a partir da identificação de um vértice. Com duração de duas aulas de 50 minutos cada, foram empregados os seguintes materiais didáticos manipuláveis: geoplano quadrado, elásticos coloridos e papel de malha pontilhada que imita um geoplano. Nessa tarefa, os estudantes construíram figuras geométricas no geoplano, depois traçaram suas diagonais e, em seguida, discutiram sobre as quantidades de diagonais, de acordo com o número de lados das figuras, entre outros diversos aspectos.

Importante destacar que em todas essas tarefas havia questionamentos realizados pela professora como forma de colocar os alunos no movimento da investigação matemática. Além disso, optamos por apresentar separadamente as discussões sobre cada uma das tarefas, para compreender o contexto em que cada uma foi desenvolvida, verificar os aspectos que estamos buscando para responder nossa questão de pesquisa e alcançar o objetivo proposto.

As análises dos dados partiram da teoria de análise de conteúdo de Bardin (1977, p. 44), que a considera um conjunto de técnicas de análise, "visando obter por procedimentos sistemáticos e objectivos de descrição do conteúdo das mensagens indicadores que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) destas mensagens".

Assim, neste texto serão apresentados e analisados os dados do diário de campo da pesquisadora, que deram elementos para reconstituir as discussões ocorridas, e as gravações em áudio e vídeo das aulas em que foram desenvolvidas as tarefas. Para tanto, as gravações foram assistidas inúmeras vezes, de forma que a pesquisadora pudesse perceber aspectos das tarefas discutidos pelos alunos e indícios das contribuições das tarefas exploratório-investigativas e dos materiais didáticos manipuláveis para o estudo de quadriláteros.

No tratamento desses dados, realizamos recortes, agregação e enumeração das informações, de modo a chegar a uma representação do conteúdo, e optamos, neste recorte, pela unidade de registro que foi a base para auxiliar na categorização das informações: o tema, que consistiu na classificação, por analogia, de elementos que formaram conjuntos com mensagens que abordavam o mesmo assunto.

Assim, esses dados foram organizados em tabelas que trouxeram as contribuições, os questionamentos e as discussões dos diferentes grupos de alunos sobre uma mesma tarefa. Foram selecionadas as mensagens mais significativas e representativas dessas reflexões, que serão apresentadas em quadros das três tarefas discutidas.

A partir do exposto, passaremos a discutir o desenvolvimento das tarefas pelos estudantes do 8.° ano do Ensino Fundamental.

"AS FIGURAS SÃO QUADRILÁTEROS PORQUE POSSUEM QUATRO LADOS"

Apresentaremos e discutiremos inicialmente a tarefa 4, denominada "Medindo, classificando e comparando paralelogramos". Para sua realização foi utilizado o artefato modelador de paralelogramo, proposto por Kaleff (2008) e construído com uma placa de papelão coberta com papel quadriculado e isolada com plástico autoadesivo. Sobre essa placa foram adaptados arames, inseridos em furos e dobrados no verso da placa, que servem como guias a pares de canudos de plásticos rígidos colados juntos. Por dentro de cada canudo azul passa o arame e nos canudos vermelhos foram colocados elásticos finos ou fios de silicone, amarrados na parte de trás da placa de papelão.

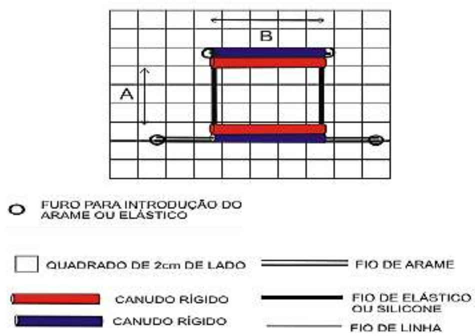

Figura 1 – Artefato modelador de paralelogramos
Fonte: Kaleff (2008, p. 90)

Esse material didático manipulável permitiu aos alunos observarem algumas propriedades dos paralelogramos, que ajudaram a diferenciar esses quadriláteros dos demais. Proença e Pirola (2009) afirmam que os materiais manipulativos, aliados ao trabalho com tarefas que possibilitem a exploração de semelhanças e de diferenças entre as figuras, envolvem conceitos geométricos e podem contribuir para aquisição desses conceitos.

A possibilidade de visualizar as formas geométricas e analisar as regularidades de algumas características foi facilitada pelo uso do artefato modelador de paralelogramos. Na verdade, o artefato foi, realmente, facilitador da observação dessas regularidades, pois permitiu aos alunos identificarem algumas propriedades dos paralelogramos, sem se preocupar com sua memorização.

Além disso, os alunos reproduziram, em malha quadriculada, os paralelogramos formados, ao movimentarem o par de canudos, para posterior medição dos lados e dos ângulos de cada figura formada, conforme revela a Figura 2. No momento da reprodução desses paralelogramos, os alunos deviam estar muito atentos, pois precisavam reproduzir figuras semelhantes às geradas pela manipulação do artefato.

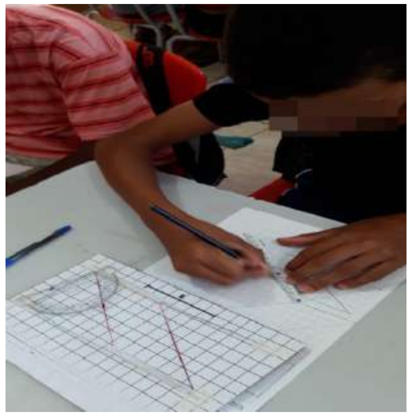

Figura 2 – Registro fotográfico da tarefa 4
Fonte: arquivo da pesquisadora

Durante a realização da tarefa 4, os alunos já estavam organizados e se identificavam com tarefas exploratório-investigativas, pois os grupos dividiram as responsabilidades de cada membro rapidamente e executaram as orientações, sem precisar da ajuda da professora-pesquisadora. Essa tarefa foi dividida em duas partes: a primeira, destinada ao estudo dos paralelogramos e suas propriedades; e a segunda, referente ao estudo da área dos paralelogramos.

O desenvolvimento da investigação propiciou a aprendizagem de conceitos, como: congruência de ângulos e lados do paralelogramo, paralelismo, soma dos ângulos internos e área dos paralelogramos. No Quadro 1, apresentamos os registros de algumas considerações dos grupos, que permitiram a aprendizagem sobre paralelogramos.

Quadro 1 – Considerações dos grupos sobre a tarefa 4

Pergunta 1: Comparando as medidas dos lados da figura modelada, o que você observa? Grupo 1: *Os lados opostos são congruentes.* Grupo 2: *Que a soma de todos os ângulos é igual a 360°.* Grupo 3: *Todos têm quatro lados.* Grupo 4: *Sempre um lado é igual ao outro.* Grupo 5: *Que as medidas dos lados não são iguais.* Grupo 6: *Tem lados que se coincidem.* Grupo 7: *Que o tanto que você muda, vão surgindo outras figuras.* Pergunta 2: Comparando as medidas dos ângulos de todas as figuras, o que você observa? Grupo 1: *Os ângulos opostos são congruentes, e a medida deles é equivalente a 360º.* Grupo 2: *Em algumas figuras as medidas dos ângulos são iguais.* Grupo 3: *Que os ângulos opostos são iguais.* Grupo 4: *Os ângulos opostos são iguais.* Grupo 5: *Que todos os ângulos não são iguais, a soma é 360º.* Grupo 6: *Que os ângulos variam de acordo com a figura.*

Grupo 7: *Que, se a figura mudar sempre, vão mudar os ângulos.* Pergunta 3: Podemos afirmar que essa figura é um quadrilátero? Grupo 1: *Sim, porque tem 4 lados, e a soma dos ângulos é 360º.* Grupo 2: *Sim, as figuras são quadriláteros porque possuem 4 lados.* Grupo 3: *Sim, porque eles têm 4 lados.* Grupo 4: *Sim, porque todas as figuras têm 360º e têm sempre 4 lados.* Grupo 5: *Sim, porque tem quatro lados e a soma dos ângulos internos é 360º.* Grupo 6: *Sim, pois todas as figuras têm 4 lados.* Grupo 7: *Sim, porque todas as figuras que nós fizemos tinham 4 lados.* Pergunta 4: Como podemos verificar se os lados opostos são paralelos ou não? Explique. Grupo 1: *Tem que ver se eles têm a mesma distância de um para o outro e os lados são sempre paralelos.* Grupo 2: *Usando o transferidor.* Grupo 3: *Porque as medidas dos ângulos são iguais.* Grupo 4: *São paralelas porque a distância dos lados é sempre a mesma, nunca vão se encontrar.* Grupo 5: *Que os lados nunca se encontram.* Grupo 6: *Eles têm a mesma medida de lados e de ângulos.* Grupo 7: *Porque se movimentam os lados e podem fazer outras figuras, sei que eles são paralelos.*

Fonte: arquivo da pesquisadora

Fizemos vários questionamentos para que os grupos avançassem nas aprendizagens e chegassem às considerações apresentadas no quadro. As considerações dos grupos só foram possíveis, porque a tarefa foi realizada por etapas, e, a cada etapa, os alunos puderam ir refletindo e anotando suas conclusões. Vários questionamentos foram feitos: quando mediram os lados das figuras, vocês notaram alguma semelhança entre as medidas? Se essas medidas são iguais, o que podemos afirmar? Uma figura que tem quatro lados pode ser chamada de quadrilátero? Por quê? Existem outras características para considerar que uma figura é um quadrilátero? Como verificar isso?

Analisando as respostas dos grupos, percebemos que os alunos, para registrar o seu pensamento de acordo com a investigação, apresentaram dificuldades, dentre as quais destacamos: sintetizar as suas conjecturas; usar a linguagem matemática correta; compreender o processo de construção das conjecturas; e generalizar os conceitos aprendidos durante a realização das atividades. No decorrer dos trabalhos e da discussão dos grupos, algumas dificuldades foram superadas, e reflexões sobre as conjecturas dos grupos na sala de aula, ao final da tarefa, facilitaram o entendimento das propriedades de um quadrilátero.

Como podemos notar no Quadro 1, em todos os itens, a maioria conseguiu descrever alguma propriedade dos paralelogramos, fato este que pode ser identificado nos registros do grupo 1, que trouxeram com suas próprias palavras, por exemplo, que os lados e os ângulos opostos são congruentes.

Dos registros escritos do grupo 2, destacamos a resposta dada para a pergunta 3, em relação à medida dos lados da figura formada. Registraram "que a soma de todos os ângulos é igual a 360°", mas a resposta não tem relação com a medida dos lados, e sim com a medida dos ângulos. Porém, na socialização das conclusões dos grupos, o grupo 2 conseguiu perceber que a pergunta 3 tratava da medida dos lados e que não cabiam ali as respostas referentes aos ângulos.

Essa situação enriqueceu a discussão final da tarefa e a conclusão da turma. Nesse momento, poderíamos aceitar as conjecturas ou refutá-las, pois novamente os grupos foram levados a testá-las e verificar se eram válidas para quaisquer paralelogramos. Essa fase da investigação é importante para a consolidação da investigação realizada (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003).

A discussão das conclusões da pergunta 4 permitiu aos alunos testarem suas conjecturas. O significado de lados paralelos é importante para que se compreenda o que é um paralelogramo e, como consequência, a validade das propriedades citadas. Diante de registros diferenciados, a resposta do grupo 1 e a do grupo 4 são muito próximas e destacam uma característica importante, quando se trata de paralelismo: a distância entre os lados tem que ser sempre a mesma, ou seja, não pode variar, quando movimentamos os canudos.

O artefato foi de grande contribuição para que os alunos refinassem e testassem suas conjecturas, pois podiam movimentar o par de canudos sobre o arame, observando as características das figuras formadas; configurou-se, assim, um momento do trabalho investigativo, descrito por Ponte, Brocardo e Oliveira (2003).

A segunda parte da tarefa 4 foi uma exploração-investigação da área dos paralelogramos, que possibilitou aos alunos relacionar as medidas da base e da altura com a quantidade de quadradinhos da região interna dos paralelogramos. Dessa maneira, não era apenas uma aplicação de fórmulas de área, mas sim uma investigação que propiciou o entendimento de que, para calcular a área de um paralelogramo, bastaria multiplicar o comprimento (no caso, chamado de base) pela largura (no caso, chamado de altura).

Na socialização das conclusões dos grupos, percebemos que a segunda parte da tarefa 4 foi realizada sem muita dificuldade e que a possibilidade de relacionar a quantidade de quadradinhos com as medidas da base e da altura permitiu entender o conceito de área de um paralelogramo.

“E, SE COLOCAR OS ANÉIS ‘MUCADINHO’ TORTOS, VAI VIRAR UM LOSANGO”

Na tarefa 5, o material utilizado foi tesoura, papel e cola. Os alunos receberam fitas de papel que deveriam ser coladas formando anéis como mostrado na Figura 3a. Depois disso, precisaram fazer colagens de dois desses anéis, formando diferentes ângulos entre eles, e cortar ao meio no pontilhado mostrado nas figuras. Uma das possibilidades era colar os anéis perpendicularmente, como mostrado na Figura 3b, e, em seguida, cortar no pontilhado, mas esse ângulo poderia ser outro também, e os estudantes deveriam investigar o que aconteceria.

Esses cortes nos anéis colados faziam surgir diferentes quadriláteros, como pode ser visto na Figura 4. Essa tarefa aguçou muito a curiosidade dos alunos.

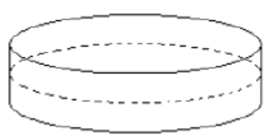

Figura 3a – Anel formado a partir das tiras de papel, coladas nas extremidades

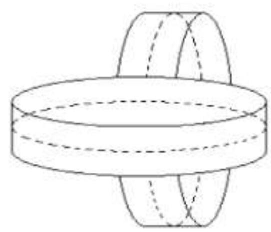

Figura 3b – Anéis colados perpendicularmente

Fonte: Rêgo, Rêgo e Vieira (2012, p. 44)

Esta tarefa permitiu a discussão de diversas propriedades dos quadriláteros, tais como as medidas dos lados, medidas dos ângulos, paralelismo, número de lados, número de ângulos, etc. Para formar um retângulo ou quadrado, os anéis deveriam ser colados perpendicularmente para formar ângulos retos. Para os demais quadriláteros, os anéis deveriam ser colados de maneira inclinada. Na Figura 4 podemos observar os anéis de papel e alguns quadriláteros formados a partir do corte desses anéis, quando eles são colados e cortados.

Figura 4 – Registro fotográfico - Quadriláteros formados pelo corte dos anéis
Fonte: arquivo da pesquisadora

O título desta seção nos permitiu observar que os alunos utilizaram uma linguagem própria para descrever a conclusão, apresentada nas discussões finais do grupo 6, referente à tarefa 5, conforme Quadro 3. Essa frase resume o entendimento dos alunos do que é um losango, pois, para chegar a essa conclusão, eles deveriam tentar responder a seguinte pergunta: “Que modificações devem ser feitas no tamanho dos anéis ou na forma de colar, para que o resultado seja um losango e não um quadrado?” A tarefa proporcionou o entendimento de que o losango tem que ter os lados de mesma medida, e o que muda é a medida dos ângulos. E isso o diferencia de um quadrado, em que todos os ângulos e lados têm a mesma medida. Dessa forma, ao descrever que, se colassem os anéis um “mucadinho” torto, ia formar um losango, os alunos revelam compreender os atributos de um losango.

Com essa tarefa, os alunos identificaram os atributos necessários para conceituar quadrado, retângulo, losango, trapézio, entre outros polígonos. Segundo Rêgo, Rêgo e Vieira (2012), essa tarefa pode oportunizar, de maneira intuitiva, questões relativas aos quantificadores universais e existenciais de um polígono. A observância do tamanho dos anéis e da maneira de colá-los influenciou na formação do quadrilátero. Por exemplo, se quisessem construir um quadrado, os anéis teriam que ser do mesmo tamanho e deveriam ser colados de forma perpendicular. Caso quisessem formar um losango que não fosse quadrado, os anéis deveriam ser de mesmo tamanho, mas a forma de colá-los não seria a mesma, deveria ser inclinada.

Assim, quanto aos aspectos que determinavam as modificações necessárias para formar um losango ou um retângulo, os alunos observaram que a maneira como os anéis foram colados ou o seu tamanho definiam quais figuras seriam formadas. Isso pode ser comprovado nas discussões e nos registros escritos dos grupos, como apresentado no Quadro 2.

Quadro 2 – Registro escrito dos grupos, referente à tarefa 5

Grupo 1: *Quando os anéis são iguais e colamos na perpendicular, forma um quadrado e, se em vez de colar na perpendicular, colamos na diagonal, forma um losango. Se os anéis são diferentes, podemos formar retângulo ou paralelogramo. E, quando colamos quatro anéis de formas diferentes, formaram dois hexágonos.*
Grupo 2: *Todas as figuras são quadriláteros. Quando colamos perpendicular, formou um quadrado ou um retângulo. E, se colar dois anéis de mesmo tamanho meio tortos, forma um losango. E, se colar os anéis de tamanho diferentes meio tortos, forma um paralelogramo.*
Grupo 3: *Todas as figuras têm vários tamanhos e não são iguais.*
Grupo 4: *Para formar um losango, é só colocar um anel com o outro um pouco torto; e, para formar o quadrado, os anéis foram colados na perpendicular. Dependendo da posição e do tamanho dos anéis, formam figuras diferentes.*
Grupo 5: *Quando os anéis foram colados na perpendicular, formou um quadrado; e nós não colamos os anéis na perpendicular, aí formou um losango. Nós pegamos dois anéis de formatos diferentes, colamos de modo perpendicular e cortamos e formou um retângulo. Quando colamos dois anéis de tamanhos diferentes meio torto, cortamos e formou um paralelogramo. É possível formar várias figuras, utilizando argolas de vários tamanhos.*
Grupo 6: *Os anéis colados na perpendicular viraram um quadrilátero. E, se colocar os anéis "mucadinho" tortos, vai virar um losango. Nós colocamos um anel pequeno e um grande e deu um paralelogramo.*
Grupo 7: *Recortando os dois anéis ao meio, forma um quadrado, quando eles foram colados na perpendicular. Colando os anéis meio tortos, formam losango ou paralelogramo.*

Fonte: arquivo da pesquisadora

Observando as conclusões dos grupos, percebemos que eles classificaram os quadriláteros de acordo com seus atributos relevantes. Por exemplo, para ser um quadrado, observaram que os anéis tinham que ser de mesmo tamanho e colados perpendicularmente. Para chegar a essa conclusão, foi solicitado que medissem os ângulos e os lados de cada figura formada, com o objetivo de comprovar algumas características dos quadriláteros resultantes, para depois poder nomeá-los. Isso possibilitou-lhes analisar e explorar os elementos das figuras obtidas.

A partir das anotações dos grupos, iniciamos a discussão final da tarefa. Nesse momento, foram explorados alguns elementos que ainda não tinham sido percebidos inicialmente. O primeiro deles estava relacionado aos atributos relevantes para ser um paralelogramo: os lados opostos tinham que ser paralelos. Assim, concluímos que as figuras formadas, nomeadas como quadrado, retângulo, losango e o próprio paralelogramo, tinham seus lados opostos congruentes e paralelos e, portanto, podiam ser chamados de paralelogramos. Para a comprovação dessa propriedade, mediram-se os ângulos e os lados de cada figura formada, além de considerar o tamanho e a forma como os anéis foram colados.

Também destacamos algumas interseções entre as figuras, que puderam ser observadas e discutidas coletivamente: que todo quadrado é um retângulo, mas o inverso não é verdade; que todo quadrado é um losango, mas o inverso não é verdade, entre outras características. Para chegar a essas conclusões, foi importante identificar os atributos relevantes de cada figura construída, pois eles são essenciais para definir cada uma (PROENÇA; PIROLA, 2009).

De fato, as tarefas exploratório-investigativas contribuem para que os alunos compreendam os conceitos, por meio da descoberta, da observação, da análise, da manipulação, do registro, da formulação e da exploração de questões que propiciaram o estudo dos quadriláteros. Ademais, o ensino apoiado na exploração e na investigação possibilitou compreender vários atributos e propriedades dos polígonos, sem se basear apenas na memorização e na técnica.

"O TRIÂNGULO NÃO PERMITE PENDURAR AS CORDAS"

O subtítulo desta seção apresenta a primeira conclusão da turma: "o triângulo não permite pendurar as cordas". Assim, os alunos concluíram que o triângulo não possui diagonal, pois não tem como seguir a primeira regra apontada para o desenvolvimento da tarefa, ou seja, que nenhuma corda poderia ligar os cantos vizinhos.

Utilizamos o geoplano quadrado, elásticos coloridos, malha pontilhada para a reprodução dos polígonos representados no geoplano. Primeiramente, propusemos uma situação em que o pátio da escola deveria ser enfeitado com bandeirinhas para uma festa junina, mas, para pendurá-las de um canto a outro, duas regras deveriam ser obedecidas: nenhuma corda poderia ligar cantos vizinhos e um mesmo par de cantos não poderia ser ligado por mais de uma corda. Foi solicitado aos alunos que seguissem essas regras e tentassem verificar quantas cordas deveriam ser penduradas, se o pátio da escola tivesse o formato triangular, quadrangular, pentagonal, etc.

A representação das situações da forma do pátio (triangular, quadrangular, pentagonal, hexagonal, entre outras) da escola no geoplano permitiu aos alunos utilizarem as duas regras de maneira concreta. Isso facilitou a compreensão da tarefa e a conclusão dos grupos, mediante as observações das regularidades.

No Quadro 4, trazemos um trecho do diálogo de um grupo de alunos na tentativa de responder ao item 3 da tarefa 6, com o objetivo de apresentar como se procedeu à conclusão da investigação.

Quadro 3: Trecho de um diálogo de um grupo de alunos

L1. Iander: *Aqui sempre é esse número menos três.* (apontou para a segunda coluna do quadro[2]).
L2. Professora: *Vocês chegaram a essa conclusão?*
L3. Iander: *É. O valor da terceira coluna é sempre o valor da primeira, vezes o valor da segunda coluna. E o valor da terceira coluna é sempre a metade do valor da segunda, não é?*
L4. Marcos Victor: *Então, aqui vai ser n dividido para dois.* (apontou para a última linha da terceira coluna).
L5. Iander: *É n dividido para dois? Não, é esse daqui dividido para dois, né?* (apontou para a última linha da segunda coluna).
L6. Marcos Victor: *É.*
L7. Iander: *Então, é n menos 3 vezes n dividido para dois. Escreve aí que já fiz demais.*
L8. Professora: *Como vocês chegaram a essa conclusão?*
L9. Iander: *Sei lá, tia, nós estávamos observando aqui e fizemos.*
L10. Professora: *Uh! Na hora de preencher, vocês foram observando o que estava acontecendo?*
L11. Iander: *Na hora que eu cheguei... eu queria fazer um negócio para eu aprender rápido e fui vendo que aqui é sempre esse menos três* (apontou para a primeira coluna). *Esse aqui era esse, vezes esse.* (apontou para a primeira e a segunda colunas) *e esse aqui* (apontou para a quarta coluna) *é a metade desse* (apontou para a terceira coluna).
L12. Professora: *Por que, para achar o número de diagonais distintas, é sempre a metade do número total de diagonais traçadas a partir de um vértice?*
L13. Marcos Victor: *Porque, segundo a regra, a corda só podia ligar uma vez.*
L14. Professora: *Agora responda o item 3.*
L15. Darlon: *O número de lados vezes o vértice.*
L16. Iander: *Isso não.*
L17. Iago: *Que o número de lados menos três... 6 x 3=18.*
L18. Professora: *Sim, mas o que nos interessa é o número de diagonais distintas. Como fazer para encontrar esse número?*
L19. Iander: *Dividir por 2.*
L20. Professora: *Então, registre isso aí.*
L21. Iago: *O número de lados menos 3 vezes o número de lados dividido por 2 é igual ao número de diagonais.*
L22. Darlon: *É isso!*

Fonte: Parte da transcrição das gravações realizadas em áudio e vídeo durante a realização da tarefa

O trecho desse diálogo permite-nos observar as estratégias utilizadas pelos alunos para completar o quadro. Destacamos parte desse diálogo, quando o aluno Iander foi indagado pela professora-pesquisadora sobre como chegaram aquele resultado:

> *Na hora que eu cheguei ... eu queria fazer um negócio para eu aprender rápido e fui vendo que aqui é sempre esse menos três* (apontou para a primeira coluna). *Esse aqui era esse vezes esse.* (apontou para a primeira e segunda coluna) *e esse aqui* (apontou para a quarta coluna) *é a metade desse* (apontou para a terceira coluna) (L11: IANDER).

Analisando esse trecho do diálogo, percebemos que o aluno pensou em uma estratégia para completar o quadro rapidamente, sem precisar desenhar todos os polígonos

[2] O quadro foi dividido em quatro colunas, da seguinte forma: na primeira coluna seria registrado o número de lados do polígono; na segunda coluna, o número de diagonais traçadas a partir de um vértice; na terceira coluna, o número total de diagonais traçadas a partir de cada vértice; e na quarta coluna, número total de diagonais distintas do polígono.

no geoplano e suas diagonais. Até porque, quanto maior o número de lados do polígono, mais difícil ficava para traçar as diagonais. A observação das regularidades que estavam acontecendo permitiu que o aluno completasse o quadro, sem precisar traçar as diagonais. É interessante atentar também para o desenvolvimento da autonomia do aluno quando procura estratégias de investigação. E as discussões, de fato, induziram os alunos a fazerem suas explorações, estabelecendo conjecturas na definição de diagonais de um polígono e definindo, assim, uma relação algébrica para o cálculo do número de diagonais de um polígono.

Para promover o envolvimento dos alunos na tarefa, a utilização do material didático manipulável foi muito importante, pois propiciou um espaço adequado para que eles apresentassem suas descobertas, concordando ou não com as ideias do outro. Compôs-se, assim, um momento de construção do conhecimento, em que não só emergiram os conhecimentos trazidos por eles, mas desenvolveram-se algumas competências, como a capacidade de explorar e relacionar. Essa capacidade está presente nas discussões apresentadas no Quadro 4.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2003, p. 87) afirmam que o uso de material didático manipulável em tarefas de investigação é adequado ao estudo de vários conceitos geométricos e constituem um "ponto de partida que entusiasma os alunos a fazer explorações, apoia a obtenção e a formulação de conjecturas". De fato, em todas as tarefas, o material didático manipulável foi o propulsor da exploração-investigação. Porém, a intervenção da professora-pesquisadora durante a realização das tarefas foi importante para o desencadear da investigação matemática proposta.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Durante a realização das tarefas, todos sabíamos como se iniciava cada etapa, mas não tínhamos a noção de quais resultados surgiriam. É claro que alguns contratempos ocorreram, mas isso faz parte do cotidiano da sala de aula.

O encaminhamento dos trabalhos deixou evidente que em aulas de cunho investigativo a postura do professor em sala de aula, enquanto mediador e orientador, torna-se essencial. A intervenção no momento certo permitiu que os alunos prosseguissem com a tarefa, explorando outras possibilidades de conjecturas. O favorecimento da interação, da participação, da autonomia e do compartilhamento de ideias fez com que ocorressem mudanças tanto na forma de pensar dos alunos, que se tornaram mais críticos e questionadores, quanto na postura da professora-pesquisadora, pois as tarefas exploratório-investigativas propiciaram-lhe a refletir sobre sua própria prática docente.

É relevante reiterar a importância do material didático manipulável para o desenvolvimento das tarefas, pois facilitou a observação e a análise pelo aluno, o desenvolvimento do seu raciocínio lógico, crítico e científico, a possibilidade de experimentar, relacionar e generalizar os conceitos (LORENZATO, 2012). Embora inicialmente parecesse que os alunos não estavam aprendendo nada, no momento da socialização das conclusões conseguimos identificar as aprendizagens, e, principalmente, o desenvolvimento da autonomia.

A contribuição das tarefas exploratório-investigativas, com o uso do material didático manipulável, possibilitou ao aluno compreender conceitos, observar, manipular, conjeturar e registrar suas descobertas. E permitiu ao professor refletir sobre a própria prática, indicando mudanças na sala de aula, bem como a quebra de paradigmas escolares existentes.

Para Scheffer (2012, p. 95), a "exploração de vários tipos de investigação geométrica pode contribuir para a concretização e relação entre situações matemática". O contato com esse contexto promoveu a troca de saberes, a inversão de papéis e a reflexão sobre a prática pedagógica da professora-pesquisadora. Além disso, o envolvimento dos alunos para realizar as tarefas, o desenvolvimento da linguagem matemática, a capacidade de comunicar as ideias e as habilidades investigativas desenvolvidas, possibilitaram uma aprendizagem de significações (COLINVAUX, 2007), em que o aluno e o professor se tornaram construtores e produtores de conhecimento, mediado pela investigação matemática.

Sem dúvidas, o trabalho com tarefas exploratório-investigativas é um desafio tanto para o professor quanto para o aluno, visto que requer de todos os envolvidos uma postura questionadora. Nesse contexto da investigação matemática não existe o certo e o errado – existem, sim, relações, conjecturas que precisam ser testadas e que podem ou não ser válidas. Os investigadores não se preocupam com os resultados, mas sim com o processo para chegar ao resultado. E todo esse processo, de idas e vindas, contribui para o campo da Educação Matemática, no que tange ao processo de ensino-aprendizagem, em especial, dos conceitos geométricos.

REFERÊNCIAS

BARDIN, L. *Análise do conteúdo*. Lisboa: Edições 70, 1977.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. *Investigação qualitativa em educação*. Lisboa: Porto Editora, 2013.

COLINVAUX, D. Aprendizagem e construção/constituição de conhecimento: reflexões teórico-metodológicas. *Pro-Posições*, v.18, n.3, p. 29-51, 2007.

D'AMBROSIO, U. *Educação Matemática*: da teoria à prática. Campinas: Papirus, 2012.

FIORENTINI, D. Grupo de sábado: uma história de reflexão, investigação e escrita sobre a prática escolar em matemática. *In*: FIORENTINI, D.; CRISTÓVÃO, E. M. (org.). *Histórias e investigação de/em aulas de matemática*. Campinas, SP: Alínea, 2006. p. 13-16.

GÓMEZ-CHACÓN, M. I. *Matemática emocional:* los afectos en el aprendizaje matemático. Madrid: Narcea, 2000.

KALEFF, A. M. M. R. *Tópicos em ensino de Geometria:* a sala de aula frente ao Laboratório de Ensino e à História da Geometria. Rio de Janeiro: Cecierj, 2008.

LORENZATO, S. Por que ensinar geometria? *Educação Matemática em Revista*, v. 3, n. 4, p. 1-64, 1995.

LORENZATO, S. (org.). *O laboratório de ensino de matemática na formação de professores*. Campinas, SP: Autores Associados, 2012.

MATOS, J. M.; SERRAZINA, M. de L. *Didáctica da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta, 1996.

NACARATO, A. M. Eu trabalho primeiro no concreto. *Revista de Educação Matemática*, v. 9, n. 9-10, p. 1-6, 2005.

PAIS, L. C. Uma análise do significado da utilização de recursos didáticos no ensino da geometria. In: REUNIÃO DA ANPED, 23., Caxambu, *Anais* [...] Caxambu, 2000.

PASSOS, C. L. B. Materiais manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de matemática. *In*: LORENZATO, S. *Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores.* Campinas: Autores Associados, 2012. p. 77-92.

PONTE, J. P. Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal. *Investigar em Educação*, Lisboa, v. 2, p. 93-169, 2003.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

PONTE, J. P. *et al*. O trabalho do professor numa aula de investigação matemática. *Quadrante,* Lisboa, v. 7, n. 2, p. 41-70, 1998.

PROENÇA, M. C.; PIROLA, N. A. Um estudo sobre o desempenho e as dificuldades apresentadas por alunos do ensino médio na identificação de atributos definidores de polígono. *Zetetiké*, Campinas, v. 17, n. 31, p. 12-46, 2009.

RÊGO, R. G.; RÊGO, R. M.; VIEIRA, K. M. *Laboratório de ensino de geometria*. Campinas, SP: Autores Associados, 2012.

SCHEFFER, N. F. O LEM na discussão de conceitos de geometria a partir de mídias: dobradura e software de dinâmico. *In*: LORENZATO, S. (org.). *O laboratório de ensino de matemática na formação de professores.* Campinas: Autores Associados, 2012. p. 93-112.

Submetido em 26 de outubro de 2020.
Aprovado em 02 de junho de 2021.