

UMA NOTA SOBRE O TEOREMA DE LINEARIZAÇÃO DE GROBMAN-HARTMAN PARA CAMPOS VETORIAIS

José Vidarte

Universidade Federal de Itajubá- UNIFEI

vidarte@unifei.edu.br

Nancy Chachapoyas

Universidade Federal de Itajubá- UNIFEI

nancy@unifei.edu.br

Resumo

Em matemática, o termo “não linear” geralmente corresponde a uma análise mais difícil. Uma vez que os sistemas lineares são mais simples de analisar, uma maneira importante de entender os sistemas não lineares é descobrir em que condições eles podem ser bem aproximados por sistemas lineares. A respeito disso, temos um célebre teorema em equações diferenciais não lineares de Grobman [4] e Hartman [5], que nos garante que um campo vetorial de classe C^1 , $X : W \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (onde W é um conjunto aberto e p uma singularidade hiperbólica) é topologicamente conjugado a um campo linear $A = DX(p)$ (numa vizinhança de p e 0 , respectivamente). O objetivo deste trabalho é provar que a conjugação (“mudança de variáveis”) no teorema de Grobman-Hartman é sempre Hölder contínua. Finalmente, daremos um exemplo para ilustrar nosso resultado.

Palavras-Chave: Campos vetoriais, conjugação, linearização, singularidades hiperbólicas.

Abstract

In mathematics, the term “nonlinear” generally corresponds to a more difficult analysis. Since linear systems are easier to analyze, a key way to understand nonlinear systems is to find out where and when they can be well-approximated by linear systems. In this respect, we have a famous theorem in nonlinear differential equations due to Grobman [4] and Hartman [5], which guarantees us that a vector field of class C^1 , $X : W \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (where W is an open set and p is a hyperbolic singularity) is topologically conjugated to a linear field $A = DX(p)$ (in a neighborhood of p and 0 , respectively). This work aims to prove that the conjugation (“change of variables”) in the Grobman-Hartman theorem is always Hölder continuous. Finally, we will give an example to illustrate our result.

Keywords: Vector fields, conjugation, linearization, hyperbolic singularities.

1 Introdução

Um resultado conhecido em equações não lineares nos garante se $\Lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um campo linear hiperbólico (autovalores com parte real não nula) e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função limitada e Lipschitziana com norma do máximo e constante de Lipschitz suficientemente pequenos, então existe um homeomorfismo $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que conjuga os campos $Ax + f(x)$ e Λ , isto é, $h \circ \phi_t = \varphi_t \circ h$ onde $\varphi(t, z)$ e $\phi(t, z)$ são respectivamente, as soluções dos problemas de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + f(x), \\ x(0) = z \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \dot{y} = A(y), \\ y(0) = z, \end{cases} \quad (1.1)$$

Como consequência deste resultado, temos o Teorema de Grobman-Hartman, que garante se $X : N \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um campo de classe C^1 com p uma singularidade hiperbólica de X e $A = X'(p)$, então o campo X é localmente C^0 conjugado a A , numa vizinhança de p e zero respectivamente. Isto significa que, se $\phi_t(z)$ e $\varphi_t(z)$ são respectivamente as soluções dos problemas de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x), \\ x(0) = z \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \dot{y} = A(y), \\ y(0) = z, \end{cases} \quad (1.2)$$

então existe um homeomorfismo $h : V \rightarrow U$, onde V e U são vizinhanças de p e 0 , respectivamente, tal que $h(p) = 0$ e $h(\phi_t(z)) = \varphi_t(h(z))$, sempre que $z, \phi_t(z) \in V$ (estes resultados foram provados de forma independentemente, por Grobman [4] e Hartman [5]). Em outras palavras, o Teorema de Grobman-Hartman para campos garante que o comportamento das órbitas ao redor de uma singularidade hiperbólica é qualitativamente, a menos de homeomorfismos, o mesmo que o comportamento das órbitas de seu campo linearizado próximo deste ponto de equilíbrio, onde a hiperbolicidade significa que todos os autovalores do campo linearizado têm parte real não nula. Portanto, quando se trata deste tipo de sistema diferencial podemos utilizar a linearização, que é mais simples de ser tratada, para analisar seu comportamento ao redor de singularidades hiperbólicas.

No entanto, se a conjugação for apenas um homeomorfismo, esta pode ser ainda pouco sutil desde o ponto de vista geométrico. Pois, podemos ter dois campos vetoriais lineares hiperbólicos em \mathbb{R}^2 que são topologicamente conjugados mas estes campos lineares não têm um comportamento geométrico parecido. Por exemplo, temos que um campo linear foco estável é topologicamente conjugado a um campo linear nó estável (ver Exemplo 3.11), no entanto, estes campos têm um comportamento geométrico distinto, este fato deve-se que não podemos encontrar uma conjugação diferenciável entre estes campos. Portanto, a classificação até a conjugação topológica pode ser muito

grosseira para entender a dinâmica desses campos vetoriais. Em contraste, uma conjugação diferenciável preserva grande parte dessa estrutura. Essa hierarquia de suavidade revela diferenças sutis nas propriedades dos campos vetoriais como um todo. Dessa forma temos que estes casos de estudo são tratados sob o aspecto de invariantes de homeomorfismos de diferentes níveis de suavidade. Na Topologia Geral, estuda-se os invariantes dos homeomorfismos contínuos e, na Topologia Diferencial, os invariantes do difeomorfismo suave. Mas, os homeomorfismos Hölder e Lipschitz? Neste sentido, um estudo detalhado de conjugação Hölder ou Lipschitz para campos lineares encontra-se no artigo de McSwiggen-Meyer [11].

Já que uma das ferramentas fundamentais de campos não lineares ao redor de pontos fixos hiperbólicos são as conjugações, em particular as linearizações, o que se tenta procurar é a regularidade da conjugação, mas infelizmente alcançar uma conjugação diferenciável nem sempre é possível (ver Observação 5.3), uma vez que as condições de não ressonância são necessárias nos autovalores.

Devido aos fatos anteriores, surge uma pergunta natural: podemos encontrar uma conjugação ligeiramente melhor que a conjugação contínua sem modificar as hipóteses do Teorema de Grobman-Hartman? Respondendo a esta questão, o objetivo principal deste trabalho é mostrar que a conjugação h dos sistemas (1.1) tem a forma $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $h = x + v(x)$, onde $v(x)$ contínua e limitada que ademais é α -Hölder, com h inversível onde, $h^{-1}(x) = x + w(x)$, com $w(x)$ contínua e limitada que ademais é α -Hölder. Como consequência deste resultado melhoramos a regularidade da conjugação do Teorema de Grobman-Hartman, isto é, provaremos que a conjugação h dos sistemas (1.2) é um homeomorfismo local α -Hölder. Por último, gostaríamos de destacar que entre as subclasses de funções contínuas mais conhecidas (Hölder e Lipschitz) obter uma conjugação Hölderiana é o melhor resultado possível, pois Irwin [7, p. 127] afirma que sob as hipóteses do Teorema de Grobman-Hartman podemos ter que a conjugação não seja Lipschitziana.

Desejaríamos destacar, devido às diferentes aplicações do Teorema de Grobman-Hartman (ver, por exemplo, [8], [9] e [2]), que este trabalho foi escrito para estudantes e/ou pesquisadores de matemática, física, biologia e engenharia.

2 Breve Introdução a Campos Vetoriais e Fluxos

A seguir, usando o livro de Sotomayor [13], daremos um breve resumo da teoria de campos vetoriais associados a equações diferenciais. Denotaremos por $U \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n .

Definição 2.1. *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n . Um campo vetorial de*

classe $C^k, k \geq 1$ é uma aplicação $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k . Ao campo vetorial X associamos a equação diferencial

$$x' = X(x). \quad (2.1)$$

As soluções desta equação, isto é, as aplicações diferenciáveis $\xi : I \rightarrow U$, onde I é um intervalo aberto da reta, tais que

$$\xi'(t) = X(\xi(t)), \quad t \in I, \quad (2.2)$$

são chamadas de trajetórias ou curvas integrais de X ou da Eq. (2.1).

Notemos que a Eq. (2.2) é equivalente à seguinte equação integral

$$\xi(t) = x_0 + \int_0^t X(\xi(s))ds, \quad (2.3)$$

quando $\xi(0) = x_0$.

Teorema 2.2 (Teorema do fluxo local ([13])). *Seja $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de vetores de classe $C^k, k \geq 1$ definido no aberto U . Então:*

- (i) (**Existência e unicidade de soluções maximais**) *Para cada $x_0 \in U$, existe a solução maximal $\varphi(\cdot, x_0)$ de $\dot{x} = X(x), \varphi(0) = x_0$, definida no intervalo maximal I_{x_0} .*
- (ii) (**Diferenciabilidade em relação as condições iniciais**) *O conjunto $D = \{(t, x) : t \in I_x, x \in U\}$ é aberto em \mathbb{R}^{n+1} e a aplicação $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, dada por $(t, x_0) \mapsto \varphi(t, x_0)$ é de classe C^k . Além disso, temos a relação*

$$\frac{d(D_{x_0}\varphi(t, x_0))}{dt} = DX(\varphi(t, x_0))D_{x_0}\varphi(t, x_0), \quad (D_{x_0}\varphi)|_{(0, x_0)} = I_n,$$

onde I_n é a matriz identidade de ordem n .

- (iii) (**Proposição de grupo**) *Se $y_0 = \varphi(t_0, x_0)$, com $t_0 \in I_{t_0}$, então $I_{y_0} = I_{x_0} - t_0$ e $\varphi(s, y_0) = \varphi(s, \varphi(t_0, x_0)) = \varphi(t_0 + s, x_0)$.*

Observação 2.3. Do Teorema ??, segue que se $(t_0, x_0) \in D$, então existe uma vizinhança V de x_0 em U tal que $\varphi_t|_V : V \rightarrow \varphi_t(V) \subset U$ é um difeomorfismo. Com efeito, se $t \in I_{x_0}$, dado que D é aberto (Teorema ??, item (ii)), temos que existe uma vizinhança V de x_0 em U tal que $t \in I_x$, para todo $x \in V$. Pelo item (ii) do Teorema ??, temos que φ_t é C^k , e do item (iii) temos que $\varphi_{-t}|_{\varphi_t(V)} : \varphi_t(V) \rightarrow V$ está bem definido, sendo a inversa de $\varphi_t|_V$.

Definição 2.4 (Fluxo local). *O fluxo local ou grupo local a um parâmetro gerado por X é a aplicação $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^n$.*

Definição 2.5 (Fluxo global). *Um campo X é dito completo se o intervalo de definição de qualquer solução maximal da Eq. (2.2) é a reta toda, isto é, $I_x = \mathbb{R}$; para todo $x \in U$, ou seja, se $D = \mathbb{R} \times U$. Neste caso, a função $\varphi : I \rightarrow U$ é chamado fluxo global.*

Observação 2.6. Condições suficientes para termos campos completos:

- (i) Se $U = \mathbb{R}^n$ e X é limitado ($\|X(x)\| < c$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$), então X é completo.
- (ii) Se o campo $X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é globalmente Lipschitz, então X é completo.

Denotamos por $\text{Diff}^k(U)$ o grupo dos difeomorfismos de classe C^k do aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, dotado da operação de composição.

Observação 2.7. As seguintes propriedades justificam a terminologia de grupo a um parâmetro na Definição 2.4. Seja $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de vetores completo de classe C^k , $k \geq 1$. Então o fluxo de X , $\varphi : \mathbb{R} \times U \rightarrow U$ satisfaz:

(i)

$$\frac{\partial(\varphi(t, x))}{\partial t} = X(\varphi(t, x)); \quad \varphi(0, x) = x.$$

Em particular, $X(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{(0, x)}$.

(ii) $\varphi(s, \varphi(t, x)) = \varphi(s + t, x)$, para quaisquer $s, t \in \mathbb{R}$.

(iii) Fixando t , a aplicação $\varphi_t(x) = \varphi(t, x)$ define um difeomorfismo C^k . Além disso, a aplicação $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \text{Diff}^k(U)$, dada por $\Phi(t) = \varphi_t$ define um homeomorfismo de grupos.

Exemplo 2.8. Considere o campo $Y(x, y) = (2x, -4y)$. Temos que o fluxo do campo Y é dado pela aplicação, $\psi(t, (a, b)) = (e^{2t}a, e^{-4t}b)$. De fato, derivando a função $\psi(t, (p, q))$, em relação a t obtemos,

$$\frac{d\psi(t, (p, q))}{dt} = (2e^{2t}p, -4e^{-4t}q) = Y(\psi(t, (p, q))).$$

Logo, por definição, concluímos o exemplo.

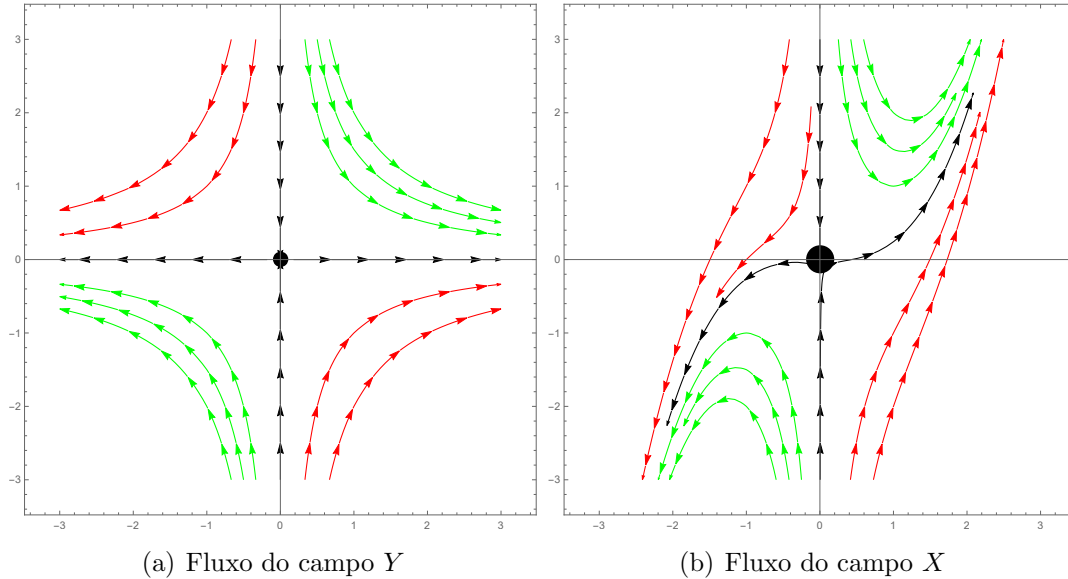


Figura 1: Fluxos dos Exemplos 2.8 e 2.9, respectivamente.

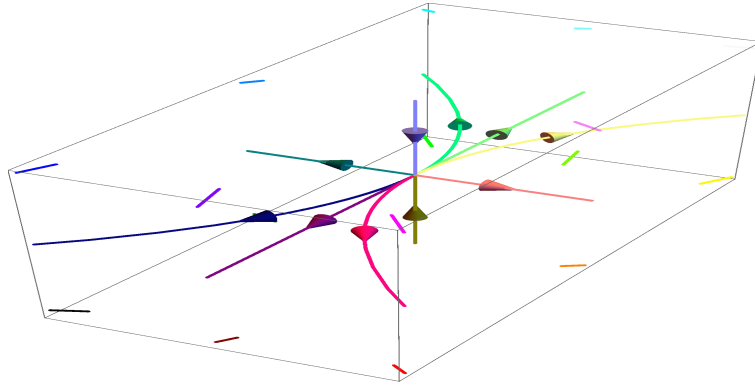
Exemplo 2.9. Considere o campo $X(x, y) = (x, -y + x^3)$. De forma similar ao exemplo anterior, pode-se verificar que o fluxo do campo X é dado por

$$\varphi(t, (a, b)) = \left(ae^t, \left(b - \frac{a^3}{4}\right)e^{-t} + \frac{a^3}{4}e^{3t} \right).$$

Exemplo 2.10. Considere o campo $M(x, y, z) = (2x, y, -z)$. Analogamente aos exemplos anteriores, podemos verificar que o fluxo do campo M é dado por

$$\varphi(t, (a, b, c)) = (e^{2t}a, e^tb, e^{-t}c).$$

Observação 2.11. Neste trabalho, apresentaremos uma das técnicas da teoria qualitativa de equações diferenciais que são as conjugações (“mudanças de variáveis”). Por exemplo, vamos a ver através de uma conjugação que os campos X e Y são qualitativamente semelhantes (ver Figura 1). Porém, não pretendemos realizar um estudo quantitativo completo das equações diferenciais (estas ferramentas, podem ser encontradas nos livros de Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias).

Figura 2: Fluxo do campo M .

3 Conjugação de Campos Vetoriais

Nesta seção, introduziremos a noção de conjugação de campos vetoriais (“mudança de variáveis”), mas antes disso, daremos a seguinte definição.

Definição 3.1. *Um homeomorfismo é uma função contínua $h : M \rightarrow N$ cuja inversa $f^{-1} : N \rightarrow M$ também é contínua.*

Exemplo 3.2. A função $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, definida como $h(x) = \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ é um homeomorfismo (Ver Gráfico 3). Com efeito,

- Temos que $h(x)$ é contínua, pois é composição de funções contínuas.
- Temos que $h(0) = 0, h(1) = 1$. Logo, usando o teorema do valor intermediário, temos que para $h(0) < d < h(1)$ existe $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = d$, o que mostra que $h(x)$ é sobrejetora.
- Desde que $h'(x) = 2 \text{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \frac{\pi}{2} = \text{sen}(\pi x) \frac{\pi}{2} > 0$, se $0 < x < 1$, $h(x)$ é monótona crescente, assim injetiva.
- Assim, a função $h(x)$ é invertível. A inversa é dada por $h^{-1}(x) = \frac{2}{\pi} \arcsin(\sqrt{x})$, pois $h \circ h^{-1}(x) = x$. Daqui, a sua inversa também é contínua.

Observação 3.3. Uma função contínua e bijetiva não é necessariamente um homeomorfismo, pois a inversa não é necessariamente contínua, como nos mostra o seguinte

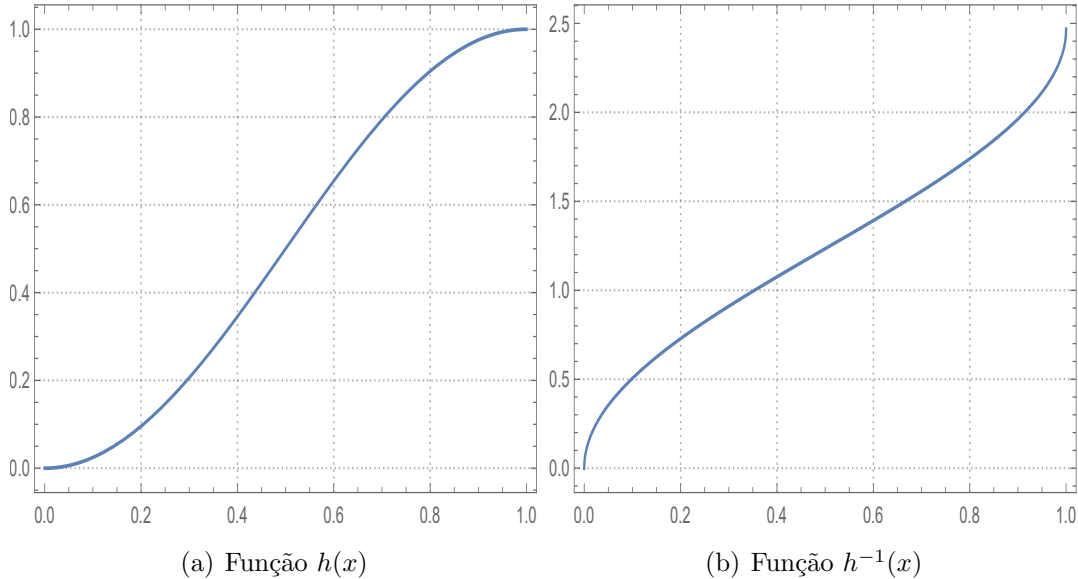


Figura 3: Gráfico da função h e sua inversa.

exemplo. Considere o conjunto $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. A função

$$\begin{aligned} h : [0, 2\pi) &\rightarrow \mathbb{S}^1 \\ t &\mapsto (\cos(t), \text{sen}(t)) \end{aligned}$$

é contínua, pois suas coordenadas são contínuas, e é bijetora com inversa

$$\begin{aligned} g = h^{-1} : \mathbb{S}^1 &\rightarrow [0, 2\pi) \\ z = (\cos(t), \text{sen}(t)) &\mapsto t = g(z). \end{aligned}$$

Porém, não é um homeomorfismo, pois \mathbb{S}^1 é um conjunto compacto. Assim, g não pode ser contínua, pois sua imagem $[0, 2\pi)$ não é compacta em \mathbb{R} .

Definição 3.4 (Conjugação de campos). *Sejam X e Y dois campos vetoriais de \mathbb{R}^n , $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $Y : V \rightarrow \mathbb{R}^n$, e sejam $\phi : D \rightarrow U$, $\psi : \hat{D} \rightarrow V$ os fluxos de X e Y , respectivamente. Dizemos que X é topologicamente conjugado a Y (resp. C^k -conjugado) se existe um homeomorfismo (resp. um difeomorfismo C^k) $h : U \rightarrow V$ tal que*

$$h(\phi(t, x)) = \psi(t, h(x)),$$

para todo $(t, x) \in D$. Neste caso, temos necessariamente $I^{\max}(x) = I^{\max}(h(x))$, onde $I^{\max}(x)$ e $I^{\max}(h(x))$ denotam os intervalos maximais das respectivas soluções maximais. O homeomorfismo h se chama conjugação topológica (resp. C^k -conjugação) entre X e Y .

Observação 3.5. De forma prática, podemos ver h como uma “mudança de variáveis” que torna os dois campos vetoriais equivalentes no sentido topológico ou diferencial, respectivamente. A mudança de variável transfere uma propriedade das soluções de X , $\phi(t, x)$, para uma propriedade sobre as soluções de Y , $\psi(t, h(x))$.

3.1 Exemplos

A seguir, apresentaremos alguns exemplos que nos ajudarão, a ter uma visão geométrica e analítica de conjugação (“mudança de variáveis”). No restante deste trabalho, usaremos a notação $(x, y)^t := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Vamos lembrar uma notação importante que é a exponencial de uma matriz quadrada A (cf. [13, p. 58]), definida como

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!},$$

onde $A^k = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{k\text{-vezes}}$. Além disso, a exponencial de uma matriz tem as seguintes propriedades (cf. [13, p. 58 e p. 61])

Proposição 3.6. *Sejam A, B e C matrizes de ordem $n \times n$. Então,*

- (a) $\frac{d}{dt}(e^{At}) = Ae^{At} = e^{At}A$, $e^{0A} = I$;
- (b) $e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}$;
- (c) Se $BC = CA$, então $e^{tBC} = Ce^{tA}$;
- (d) Se $B = C^{-1}AC$, então $e^{tB} = C^{-1}e^{tA}C$;
- (e) $\|e^A\| \leq e^{\|A\|}$.

Exemplo 3.7. Considere as seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}, R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } R^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Seja $X(x, y) = A(x, y)^t = (-x - 3y, -3x - y)$. Temos que (cf. [13, Proposição 2.11]), o fluxo é dado por

$$\varphi(t, (a, b)) = e^{At}(a, b), \quad \text{onde } t \in \mathbb{R} \text{ e } (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

Seja $\psi(t, (p, q))$ o fluxo de tipo “sela” (um autovalor negativo e o outro positivo) do campo $Y = B(x, y)^t = (2x, -4y)$. Temos que, $\psi(t, (p, q)) = (e^{2t}p, e^{-4t}q)$. Pode-se verificar que a rotação de 45° , definida por $h(x, y) = R(x, y)^t = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y, -x + y)$, é uma função analítica com inversa analítica $h^{-1}(x, y) = R^{-1}(x, y)^t = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y, x + y)$. Como $B = h^{-1}Ah$, pela Proposição 3.6, item (d), se segue que, $e^{Bt} = h^{-1}e^{At}h$. Portanto,

$$h(\psi(t, p)) = \varphi(t, h(p)).$$

A Figura 4 nos mostra, que através do campo Y (mais simples) e da conjugação h (“mudança de variável” mediante uma rotação de 45°), podemos entender as propriedades dinâmicas do campo X (um pouco mais complicado).

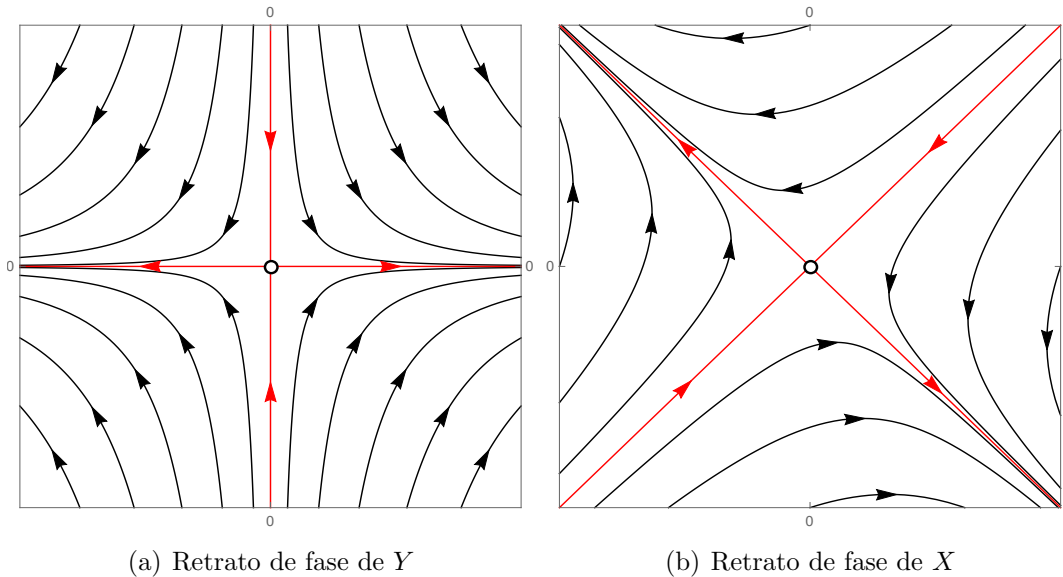


Figura 4: Conjugação de duas selas lineares.

Exemplo 3.8 ([13]). Seja o campo $X = (x, -y + x^3)$. Pode-se verificar que o fluxo é dado por

$$\varphi(t, (a, b)) = \left(ae^t, \left(b - \frac{a^3}{4} \right) e^{-t} + \frac{a^3}{4} e^{3t} \right),$$

onde $t \in \mathbb{R}$ e $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Seja $\psi(t, p)$ o fluxo linear de tipo “sela” $Y = (x, -y)$. Pode-se provar que, a função $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $h(x, y) = \left(x, y + \frac{x^3}{4}\right)$, é uma função analítica com inversa $h^{-1}(x, y) = \left(x, y - \frac{x^3}{4}\right)$ de modo que,

$$h(\psi(t, p)) = \varphi(t, h(p)).$$

A Figura 6 nos mostra, que através do campo linear Y (mais simples) e da conjugação h (“mudança de variável”, que fixa o eixo y e que muda o eixo x para um eixo cúbico $-x^3/4$), podemos entender as propriedades dinâmicas do campo não linear X (mais complicado).

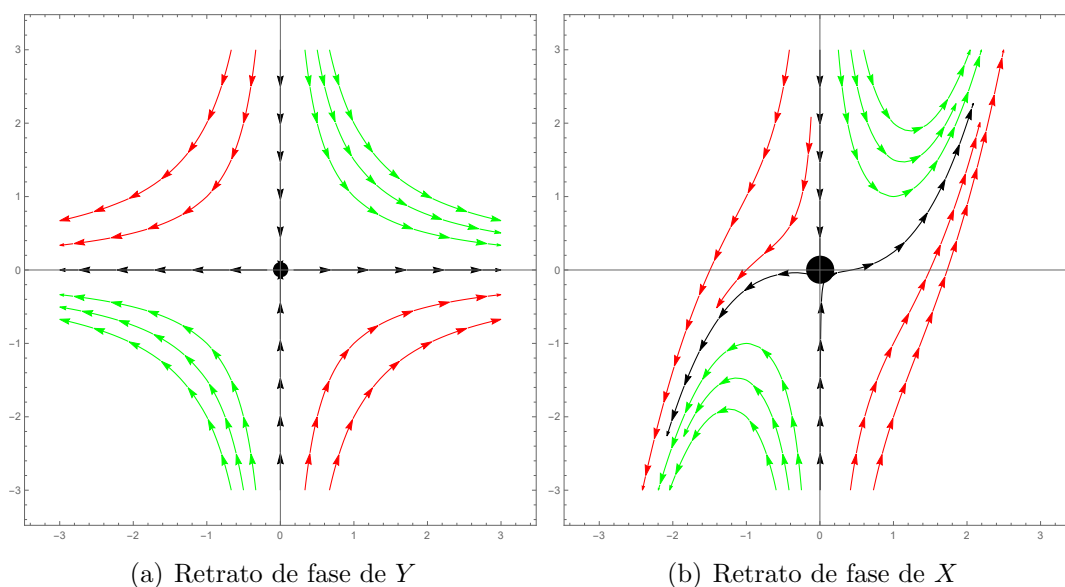


Figura 5: Conjugação de duas selas, sendo uma não linear.

3.2 Conjugações Topológicas Para Campos Lineares

Nesta parte, enunciamos um teorema que caracteriza conjugações topológicas para campos lineares. Para isso, vamos introduzir as seguintes notações:

- O conjunto $L(\mathbb{R}^n)$ denota todas as aplicações lineares $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ limitadas.
- O conjunto $GL(\mathbb{R}^n)$ denota todos os elementos de $L(\mathbb{R}^n)$ que são invertíveis.

- O conjunto $\sigma(T)$ denota o espectro de T (conjunto de autovalores da transformação linear T). Para mais detalhes, veja-se o livro de Santos [12, p. 394].

Definição 3.9 (Campo Vetorial Linear Hiperbólicos). Dizemos que $A \in L(\mathbb{R}^n)$ é um campo linear hiperbólico se todos seus autovalores têm parte real não nula.

Definição 3.10. Dado $A \in L(\mathbb{R}^n)$, denotamos por $m(A)$ o número de autovalores de A com parte real positiva, contadas com suas multiplicidades.

Teorema 3.11 ([13]). Dois campos lineares hiperbólicos, $x' = Ax$ e $x' = Bx$ são topologicamente conjugados se, e somente se, $m(A) = m(B)$.

Demonstração: A prova deste teorema pode-se encontrar no livro de Sotomayor [13, p. 81].

Exemplo 3.12. Sejam $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Então, as equações lineares $x' = Ax$ e $x' = Bx$ são topologicamente conjugadas (ver Figura 6). Além disso, elas não podem ser diferenciavelmente conjugadas nem linearmente conjugadas. De fato, temos que os autovalores da matriz A são $\{-1 + i, -1 - i\}$ e os autovalores da matriz B são $\{-1, 2\}$, logo $m(A) = m(B) = 0$. Assim, pelo Teorema 3.11 temos que as equações lineares $x' = Ax$ e $x' = Bx$ são topologicamente conjugadas. Dado que A e B têm formas canônicas distintas elas não podem ser diferenciavelmente conjugadas nem linearmente conjugadas ([13, p. 72]).

Observação 3.13. O Exemplo 3.12 nos mostra que, apesar da importância das conjugações entre campos, devemos ter cuidado na interpretação geométrica que venha desta. É por esta razão, que se procura melhorar as conjugações topológicas, pois enquanto tivermos maior regularidade na conjugação os campos conjugados são mais parecidos, como nos mostra o Exemplo 3.8.

Observação 3.14. No artigo de Patrick et al. [11], os autores dão uma caracterização completa para a existência de conjugações Hölder e Lipschitz para campos lineares hiperbólicos. Além disso, apresentam várias justificativas geométricas que nos permitem diferenciar entre campos lineares conjugados, dependendo da regularidade da conjugação (topológica, Hölderiana, Lipschitziana).

4 Resultados Principais

Nesta seção provaremos os resultados principais deste trabalho, veremos primeiro as seguintes definições.

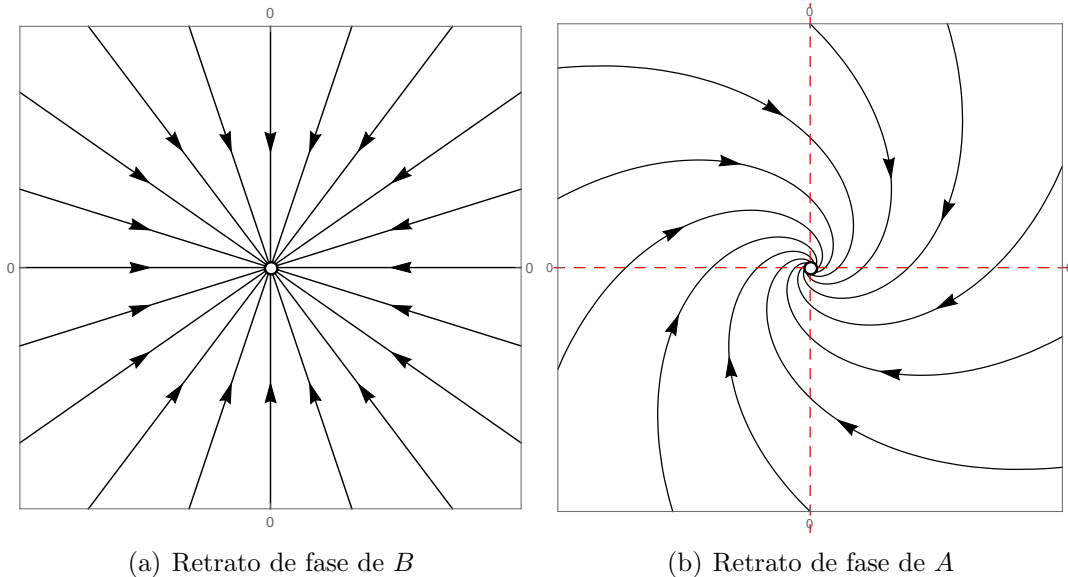


Figura 6: Conjugação entre um foco estável e um nó estável.

Definição 4.1. *Seja M um subconjunto de \mathbb{R}^n . Uma aplicação $F : M \rightarrow M$ é Lipschitziana, ou simplesmente Lipschitz, se existe $\lambda \geq 0$, tal que*

$$\|F(x) - F(y)\| \leq \lambda \|x - y\|.$$

Dizemos que λ é uma constante de Lipschitz de F . Denotamos o ínfimo das constantes de Lipschitz de F por $Lip(F)$, o qual é, ele mesmo, uma constante de Lipschitz.

Definição 4.2. *Sejam U e V dois subconjuntos de \mathbb{R}^n . Dizemos que um homeomorfismo local $\Phi : (U, p) \rightarrow (V, 0)$ é α -Hölder se*

$$\|\Phi(x') - \Phi(x'')\| \leq C \|x' - x''\|^\alpha,$$

numa vizinhança de p , e

$$\|\Phi^{-1}(x') - \Phi^{-1}(x'')\| \leq C \|x' - x''\|^\alpha$$

numa vizinhança do zero.

A seguir, introduzimos a noção de ponto crítico hiperbólico.

Definição 4.3 (Singularidade Hiperbólica). *Dado um campo de vetores $X : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, de classe C^k . Uma singularidade $p \in U$ de X ($X(p) = 0$) é chamada hiperbólica se a equação determinada por sua parte linear $DX(p) \in L(\mathbb{R}^m)$ é hiperbólica, isto é, se os autovalores de $DX(p)$ têm parte real não nula.*

4.1 Enunciado dos Resultados

Nesta subsecção, enunciaremos os resultados principais deste trabalho. A seguir, enunciamos o primeiro resultado principal.

Proposição 4.4. *Seja $A \in L(\mathbb{R}^n)$ um campo linear hiperbólico. Então, existe um número $\delta > 0$ tal que para qualquer função Lipschitziana $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, com $Lip(f) \leq \delta$, $f(0) = 0$, existe uma única função $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $h = x + v(x)$, onde v é limitada e α -Hölder, tal que*

$$h \circ \phi_t = \varphi_t \circ h,$$

onde $\varphi(t, z)$ e $\phi(t, z)$ são respectivamente, as soluções dos problemas de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + f(x), \\ x(0) &= z, \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} \dot{y} &= A(y), \\ y(0) &= z. \end{cases} \quad (4.1)$$

Além disso, h é inversível onde, $h^{-1}(x) = x + w(x)$, com w limitada e α -Hölder. Isto nos garante que, a menos do homeomorfismo α -Hölder h , os retratos de fase das equações (4.1), são os mesmos respectivamente nas vizinhanças de p e 0 .

Finalmente, enunciamos o Teorema de Grobman-Hartman com regularidade α -Hölder para a conjugação.

Teorema 4.5 (Teorema de Grobman-Hartman para Campos Vetoriais). *Sejam $W \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $X : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de classe C^k ($k \geq 1$) e p uma singularidade hiperbólica de X . Considere $A = DX(p)$. Então o campo vetorial X é localmente α -Hölder conjugado a sua parte linear A numa vizinhança de p e de 0 , respectivamente, para um α suficientemente pequeno. Isto significa que, se $\phi_t(z)$ e $\varphi_t(z)$ são respectivamente as soluções dos problemas de valor inicial*

$$\begin{cases} \dot{x} &= X(x), \\ x(0) &= z, \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} \dot{y} &= A(y), \\ y(0) &= z, \end{cases} \quad (4.2)$$

então existe um homeomorfismo α -Hölder $h : V \rightarrow U$, para um α suficientemente pequeno, onde V e U são vizinhanças respectivamente de p e 0 , tal que $h(p) = 0$, de modo que

$$h(\phi_t(z)) = \varphi_t(h(z)), \quad \text{sempre que } z, \phi_t(z) \in V.$$

Isto nos garante que, a menos do homeomorfismo α -Hölder h , os retratos de fase das equações (4.5), são os mesmos respectivamente nas vizinhanças de p e 0 (ver Figura 7).

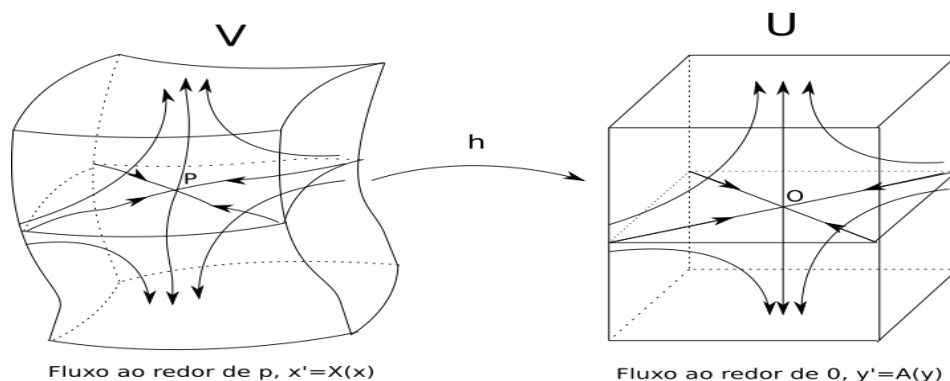


Figura 7: Possível interpretação geométrica do Teorema 4.5.
 Fonte: Adaptação de uma figura apresentada por Sotomayor [13, p. 226].

4.2 Prova da Proposição 4.4

Nesta subsecção provaremos a Proposição 4.4.

4.2.1 Resultados Auxiliares

A seguir, introduziremos algumas definições, enunciaremos e/ou provaremos alguns resultados auxiliares, que nos ajudarão na demonstração da Proposição 4.4.

Definição 4.6 (Isomorfismos Hiperbólicos). Dizemos que $A \in GL(\mathbb{R}^n)$ é um isomorfismo hiperbólico se $\sigma(A) \cap \mathbb{S}^1 = \emptyset$, onde $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : \|z\| = 1\}$.

Definição 4.7. Sejam V uma vizinhança do ponto $0 \in \mathbb{R}^n$ e $F : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um difeomorfismo sobre sua imagem. Dizemos que z é um ponto fixo hiperbólico de F se e somente se

$$F(z) = z, \quad DF(z) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ é hiperbólica.}$$

O teorema a seguir, garante Linearização Hölder mais a identidade para perturbações de aplicações lineares hiperbólicas.

Teorema 4.8. Seja $\Lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um isomorfismo hiperbólico. Então, existe um número $\tau > 0$ tal que para qualquer função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ com $Lip(f) \leq \tau$, $f(0) = 0$ existe uma única função $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua, limitada e α -Hölder, para algum $0 < \alpha < 1$, tal que

$$\Psi \circ \Lambda(z) = (\Lambda + f) \circ \Psi(z), \quad \text{para } z \in \mathbb{R}^n,$$

onde $F(x) = \Lambda(x) + f(x)$ e $\Psi(x) = x + \varphi(x)$. Além disso, $\Psi : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ ($\Psi(0) = 0$) é inversível, com inversa $\Psi^{-1}(x) = \Phi(x) = x + \phi(x)$, onde $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua, limitada e α -Hölder.

Demonstração: A prova deste teorema pode-se encontrar no artigo de Barreira-Valls [1, Teorema 1].

Observação 4.9. O Teorema 4.8 é essencial para demonstrar a Proposição 4.4.

Observação 4.10. O Teorema 4.8 é caso particular do resultado de Barreira-Valls [1]. Na realidade, no artigo, num espaço de Banach X , é provado o resultado para o caso de sequências de isomorfismos hiperbólicos, que corresponde a uma dinâmica não autônoma com tempo discreto. Isto é, sob certas condições, se a sequência $(A_m)_{m \in \mathbb{Z}}$ é hiperbólica e a sequência de aplicações $(f_m)_{m \in \mathbb{Z}}$ com $Lip(f) \leq \delta$, onde δ é suficientemente pequeno, então existem homeomorfismos $h_m : X \rightarrow X$ para $m \in \mathbb{Z}$ satisfazendo

$$h_m \circ \Lambda_m(x) = (\Lambda_m + f_m) \circ h_m(x), \quad \text{para } x \in X,$$

que são únicos entre aqueles tais que $h_m - Id$ e $h_m^{-1} - Id$ são limitados para cada $m \in \mathbb{Z}$. Além disso, para δ suficientemente pequeno, existem um $0 < \alpha < 1$ e um $K := K(\alpha, \delta)$ tal que

$$\|h_m(x) - h_m(y)\| \leq K\|x - y\|^\alpha \quad \text{e} \quad \|h_m^{-1}(x) - h_m^{-1}(y)\| \leq K\|x - y\|^\alpha$$

para cada $m \in \mathbb{Z}$ e cada $x, y \in X$ com $\|x - y\| < 1$.

A proposição a seguir nos dá a dependência contínua entre as soluções, de uma equação diferencial com campo Lipschitziano, em relação às condições iniciais.

Proposição 4.11. *Seja $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função Lipschitziana, com constante de Lipschitz C , então as soluções maximais da equação diferencial $x' = F(x)$ estão definidas em toda a reta \mathbb{R} . Além disso,*

$$\|\varphi(t, x_0) - \varphi(t, y_0)\| \leq e^{C|t-t_0|} \|x_0 - y_0\|,$$

para quaisquer $t, t_0 \in \mathbb{R}$ e $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n$, onde $\varphi(t, x_0)$ e $\varphi(t, y_0)$ são soluções maximais com condições iniciais $\varphi(t_0, x_0) = x_0$ e $\varphi(t_0, y_0) = y_0$, respectivamente.

Demonstração: A prova deste teorema pode-se encontrar no livro de Sotomayor [13, p. 38].

A seguir, enunciaremos e provaremos um resultado, que nos fornece uma fórmula para as soluções maximais para perturbações Lipschitziana de campos lineares.

Lema 4.12 (Fórmula de variação de constantes). *Sejam A uma matriz $n \times n$ e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função Lipschitziana, com constante de Lipschitz δ , então as soluções maximais $\varphi(t, x_0)$, $\varphi(t_0) = x_0$, da equação diferencial $x' = Ax + f(x)$ estão definidas em toda a reta \mathbb{R} . Além disso:*

$$(i) \text{ Temos a igualdade } \varphi(t, x_0) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}f(\varphi(s, x_0))ds.$$

(ii) *A função $g(x) = \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}f(\varphi(s, x_0))ds$ é Lipschitziana, com constante de Lipschitz, $e^{2\|A\|+\delta}|t-t_0|\delta$. Ademais, se f é uma função limitada ($\|f\| \leq d$), então $g(x)$ também é uma função limitada, com*

$$\|g(x)\| \leq |t - t_0|e^{\|A\||t-t_0|}d.$$

Demonstração: Como a função f tem constante de Lipschitz δ , então a função $F(x) = Ax + f(x)$ tem constante de Lipschitz $(\|A\| + \delta)$. De fato,

$$\begin{aligned} F(x) - F(y) &= Ax + f(x) - (Ay + f(y)) \\ &= A(x - y) + f(x) - f(y). \end{aligned}$$

Assim, tomando norma em ambos os lados e usando o fato que A é uma função Lipschitz, com constante de Lipschitz $\|A\|$ e f tem constante de Lipschitz δ , obtemos

$$\begin{aligned} \|F(x) - F(y)\| &\leq \|A(x - y)\| + \|f(x) - f(y)\| \\ &\leq \|A\|\|x - y\| + \delta\|x - y\| \\ &= (\|A\| + \delta)\|x - y\|. \end{aligned}$$

Portanto, pela Proposição 4.11 temos que as soluções maximais, $\varphi(t, x_0)$, da equação diferencial $x' = Ax + f(x)$ estão definidas em toda a reta \mathbb{R} .

(i) Derivando a função $e^{-tA}\varphi(t, x_0)$ em relação a t , aplicando a regra do produto e Proposição 3.6, obtemos

$$\frac{d}{dt} (e^{-tA}\varphi(t, x_0)) = -Ae^{-At}\varphi(t, x_0) + e^{-At}\frac{d}{dt}\varphi(t, x_0).$$

Assim, dado que $\varphi(t, x_0)$ é solução da equação diferencial $x' = Ax + f(x)$, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (e^{-tA}\varphi(t, x_0)) &= -Ae^{-At}\varphi(t, x_0) + e^{-At}(A\varphi(t, x_0) + f(\varphi(t, x_0))) \\ &= -Ae^{-At}\varphi(t, x_0) + e^{-At}A\varphi(t, x_0) + e^{-At}f(\varphi(t, x_0)). \end{aligned}$$

Como, $Ae^{-At} = e^{-At}A$ (ver Propiedades (3.6)), obtemos

$$\frac{d}{dt} (e^{-tA}\varphi(t, x_0)) = e^{-At}f(\varphi(t, x_0)).$$

Logo, integrando ambos os lados desta igualdade e aplicamos no lado esquerdo o Teorema Fundamental do Cálculo, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \frac{d}{ds} (e^{-sA}\varphi(s, x_0)) ds &= \int_{t_0}^t e^{-As}f(\varphi(s, x_0))ds \\ e^{-tA}\varphi(t, x_0) - e^{-t_0A}\varphi(t_0, x_0) &= \int_{t_0}^t e^{-As}f(\varphi(s, x_0))ds \\ e^{-tA}\varphi(t, x_0) - e^{-t_0A}x_0 &= \int_{t_0}^t e^{-As}f(\varphi(s, x_0))ds. \end{aligned}$$

Portanto, multiplicando ambos os lados desta igualdade por e^{tA} e usando a Eq. (3.6), obtemos

$$\varphi(t, x_0) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}f(\varphi(s, x_0))ds.$$

Assim, concluímos a demonstração.

(ii) Usando a definição de $g(x) := \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}f(\varphi(s, x))ds$, obtemos

$$\begin{aligned} g(x) - g(y) &= \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}f(\varphi(s, x))ds - \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}f(\varphi(s, y))ds \\ &= \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}(f(\varphi(s, x)) - f(\varphi(s, y)))ds. \end{aligned}$$

Assim, como $f(x)$ é uma função Lipschitziana com constante de Lipschitz δ , temos

$$\begin{aligned} \|g(x) - g(y)\| &\leq e^{\|A\||t-t_0|} \int_{t_0}^t \|f(\varphi(s, x)) - f(\varphi(s, y))\|ds \\ &\leq e^{\|A\||t-t_0|} \delta \int_{t_0}^t \|\varphi(s, x) - \varphi(s, y)\|ds. \end{aligned}$$

Portanto, como $\varphi(s, x)$ é solução da Eq. $x' = F(x) := Ax + f(x)$ e $F(x)$ é uma função Lipschitziana com constante de Lipschitz $(\|A\| + \delta)$, pela Proposição 4.11,

obtemos

$$\begin{aligned}\|g(x) - g(y)\| &\leq e^{\|A\||t-t_0|} \delta \int_{t_0}^t e^{(\|A\|+\delta)|s-t_0|} \|x - y\| ds \\ &= e^{\|A\||t-t_0|} (e^{(\|A\|+\delta)|t-t_0|}) \delta \|x - y\| \\ &= e^{(2\|A\|+\delta)|t-t_0|} \delta \|x - y\|.\end{aligned}$$

Além disso, como $\|e^A\| \leq e^{\|A\|}$, temos

$$\begin{aligned}\|g(x)\| &= \left\| \int_{t_0}^t e^{A(t-s)} f(\varphi(s, x)) ds \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^t \|e^{A(t-s)} f(\varphi(s, x))\| ds \\ &= |t - t_0| e^{\|A\||t-t_0|} d.\end{aligned}$$

Assim, concluímos a demonstração. □

Definição 4.13 (Campo vetorial linear hiperbólico). Dizemos que $A \in L(\mathbb{R}^n)$ é um campo linear hiperbólico se $\sigma(A) \cap \mathbb{S} = \emptyset$, onde $\mathbb{S} = \{ix \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{R}\}$.

O seguinte lema nos dá uma relação entre o espectro da matriz A e o espectro da exponencial e^A .

Lema 4.14. *Seja A uma matriz, então temos que $\sigma(A)$ não tem autovalores com parte real zero se e somente se $\sigma(e^{tA})$ ($t \neq 0$) não tem autovalores com norma 1. Em outras palavras, um campo vetorial linear A é hiperbólico se e somente se, para algum (e, portanto, todos) t real diferente de zero, e^{tA} é um automorfismo hiperbólico*

Demonstração: Aplicando o Teorema do Mapeamento Espectral de Dunford (cf. [7, Teorema 4.55]) para a função analítica $f(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{z^r}{r!}$, temos que $\sigma(e^{tA}) = e^{t\sigma(A)}$. Logo, $\sigma(A)$ não tem autovalores com parte real zero se e somente se $\sigma(e^{tA})$ ($t \neq 0$) não tem autovalores com norma 1.

Lema 4.15. *Considere as funções $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que f seja uma função limitada. Então, a função $w = f \circ g \circ h$ também é limitada.*

Demonstração: Como f é limitada, então existe um número k_f tal que

$$\|f(x)\| \leq k_f, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n. \quad (4.3)$$

Seja $x \in \mathbb{R}^n$ um ponto arbitrário. Dado que $w(x) = f(g(h(x)))$, então $\|w(x)\| = \|f(g(h(x)))\|$. Assim, por Eq. (4.3), temos

$$\|w(x)\| \leq k_f, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

Logo, a função w é uma função limitada.

Lema 4.16. *Considere as funções $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que f seja função contínua e g função limitada. Então, a função $w = f \circ g \circ h$ também é limitada.*

Demonstração: Como g é limitada, então existe um número k_g tal que

$$\|g(x)\| \leq k_g, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n. \quad (4.4)$$

Seja $x \in \mathbb{R}^n$ um ponto arbitrário. Dado que $g \circ h(x) = g(h(x))$, então da Eq. (4.4), temos

$$\|g \circ h(x)\| = \|g(h(x))\| \leq k_g, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n. \quad (4.5)$$

Seja a bola $B[k_g, 0] = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq k_g\}$ fechada. Sabemos que $B[k_g, 0]$ é um conjunto compacto, então como f é uma função contínua temos que $Y = f(B[k_g, 0])$ é um conjunto compacto, em particular Y é um conjunto limitado. Assim, existe um número k_Y de modo que

$$\|y\| \leq k_Y, \quad \text{para todo } y \in Y. \quad (4.6)$$

Dado que $w(x) = f(g(h(x)))$, então $\|w(x)\| = \|f(g(h(x)))\|$. Por Eq. (4.5) temos que $g(h(x)) \in B[k_g, 0]$. Assim, $w(x) \in Y$. Logo, por Eq. (4.6), temos

$$\|w(x)\| \leq k_Y, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

Portanto, a função w é uma função limitada.

4.2.2 Demonstração da Proposição 4.4.

A seguir, com ajuda dos resultados auxiliares anteriores, provaremos a Proposição 4.4, que é o resultado principal deste trabalho.

Demonstração: Pela fórmula de variação de constantes (Lema 4.12) temos que as soluções maximais $\phi(t, x_0)$ da equação diferencial $x' = Ax$ estão definidas em toda a

reta \mathbb{R} . Além disso, $\phi(t, x_0) = e^{tA}x_0$. Por outro lado, temos que as soluções maximais $\varphi(t, x_0)$ da equação diferencial $x' = Ax + f(x)$ estão definidas em toda a reta \mathbb{R} . Além disso,

$$\varphi_t(x_0) := \varphi(t, x_0) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}f(\varphi(s, x_0))ds. \quad (4.7)$$

Logo, se fixamos um número real $q \neq 0$, temos que

$$\varphi_q(x) := \varphi(q, x) = e^{Aq}x + \int_0^q e^{A(q-s)}f(\varphi(s, x))ds := e^{Aq}x + \tilde{g}_q(x),$$

onde $\tilde{g}_q(0) = 0$ e $\tilde{g}_q(x)$ é uma função Lipschitziana com constante de Lipschitz

$$\tau = e^{(2\|A\|+\delta)|q|}\delta.$$

Como A é um campo linear hiperbólico, segue-se do Lema 4.14 que $\phi(q, x) := e^{Aq}x$ é um isomorfismo hiperbólico, ou seja, a função $\varphi_q(x)$ é uma perturbação do isomorfismo hiperbólico $\phi(q, x)$ por uma função Lipschitziana. Assim, pelo Teorema de Linearização Hölder para perturbações de aplicações lineares hiperbólicas (Teorema 4.8), temos que existe uma única função $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $h = x + v(x)$, onde v é limitada e α -Hölder, tal que

$$h \circ \phi_q = \varphi_q \circ h.$$

Além disso, h é inversível onde, $h^{-1}(x) = x + w(x)$, com w limitada e α -Hölder.

A seguir, mostraremos que esta mesma função h também conjuga os outros tempos, isto é,

$$h \circ \phi(t, x) = \varphi(t, h(x))$$

para $t \in \mathbb{R}$ e para $x \in \mathbb{R}^n$.

Com efeito, seja $t \in \mathbb{R}$ um ponto arbitrário. Definimos a função

$$\tilde{h}(x) = \varphi_t \circ h \circ \phi_{-t}(x).$$

Afirmção 1. Temos que $h = \tilde{h}$.

Afirmção 1.1 A função \tilde{h} conjuga os isomorfismos $\phi(q, x) = e^{qA}x$ e $\varphi_q(x)$. De fato, usando a definição de \tilde{h} e as propriedades de fluxo (ver Observação 2.7),

$$\begin{aligned} \tilde{h}(\phi_q(x)) &= \varphi_t \circ h \circ \phi_{-t} \circ \phi_q(x) = \varphi_t \circ (h \circ \phi_q) \circ \phi_{-t}(x) \\ &= \varphi_t \circ (\varphi_q \circ h) \circ \phi_{-t}(x) \\ &= \varphi_q \circ (\varphi_t \circ h \circ \phi_{-t})(x) \\ &= \varphi_q \circ \tilde{h}(x). \end{aligned}$$

Afirmção 1.2. Seja $I(x) := x$, temos que $\tilde{h} - I = (\varphi_t - \phi_t) \circ h \circ \phi_{-t} + \phi_t \circ (h - I) \circ \phi_{-t}$. De fato, usando a definição de \tilde{h} e as propriedades de fluxo

$$\begin{aligned}\tilde{h} - I &= \varphi_t \circ h \circ \phi_{-t} - \phi_t \circ h \circ \phi_{-t} - \phi_t \circ \phi_{-t} + \phi_t \circ h \circ \phi_{-t} \\ &= (\varphi_t - \phi_t) \circ h \circ \phi_{-t} + \phi_t \circ (h - I) \circ \phi_{-t}.\end{aligned}$$

Afirmção 1.3. A função $\tilde{h} - I$ é limitada.

Pelo Lema 4.12 temos que $(\varphi_t - \phi_t)$ é uma função limitada. Assim, pelo Lema 4.15, a função $(\varphi_t - \phi_t) \circ h \circ \phi_{-t}$ também é limitada. Por outro lado, pelo Teorema 4.8 temos que a função $(h - I)$ é limitada, então como ϕ_t é uma função contínua, pelo Lema 4.16, temos que a função $\phi_t \circ (h - I) \circ \phi_{-t}$ é limitada. Logo, segue da Afirmção 1.2, que a função $\tilde{h} - I$ é limitada.

Com as Afirmções 1.1, 1.2 e 1.3, concluiremos a Afirmção 1. De fato, como $\tilde{h} = I + \tilde{h} - I := I + \tilde{v}$, segue da Afirmção 1.3 que a função \tilde{v} é contínua e limitada e pela Afirmção 1.1 conjuga $\phi(q, x) = e^{qA}x$ e $g(x) := \varphi_q(x)$. Assim, pela unicidade do Teorema 4.8 temos que $h = \tilde{h}$. Isto completa a prova da Afirmção 1.

Afirmção 2. A função h conjuga ϕ_t e φ_t , para todo $t \in \mathbb{R}$, isto é,

$$h \circ \phi(t, x) = \varphi(t, h(x))$$

De fato, seja $t \in \mathbb{R}$ um ponto fixo arbitrário, tem-se

$$\tilde{h} \circ \phi_t(x) = \varphi_t \circ h \circ \phi_{-t} \circ \phi_t(x) = \varphi_t \circ h(x).$$

Como $h = \tilde{h}$, segue a Afirmção 2. Isto completa a prova da proposição. \square

4.3 Prova do Teorema 4.5

Nesta subseção provaremos o Teorema 4.5.

4.3.1 Resultados Auxiliares

A seguir, introduziremos algumas definições, enunciaremos e/ou provaremos alguns resultados auxiliares, que nos ajudarão na demonstração do Teorema 4.5.

Lema 4.17 (Lema de extensão). *Seja $f : N \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^k , $k \geq 1$ definida no aberto N tal que $0 \in N$, com $f(0) = 0$. Denote por $A = Df(0)$. Então, dado $\epsilon > 0$ existe uma vizinhança $U = U(0)$ e uma função $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ limitada, com $\|\phi\| \leq \epsilon$ e $Lip(\phi) \leq \epsilon$ tal que $(A + \phi) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é a extensão de $f|_U$, isto é, $f|_U = (A + \phi)|_U$.*

Demonstração: A prova pode-se encontrar no livro de Sotomayor [13, p. 294].

Lema 4.18. *Seja f uma função de classe C^1 e $p \in \mathbb{R}^n$ um ponto qualquer. As equações $x' = f(x)$ e $y' = F(y) := f(y + p)$ são conjugadas pelo difeomorfismo $h(x) := x + p$ de classe C^∞ .*

Demonstração: Notemos que, se $\phi(t, y)$ é uma solução da equação $y' = F(y) := f(y + p)$, $y(0) = y$, então a função $\varphi(t, x + p) = \phi(t, x) + p$ é solução da equação diferencial $x' = f(x)$, $x(0) = h(x)$. Com efeito, derivando em relação a t , temos que $\varphi'(t, x + p) = \phi'(t, x) = f(\phi(t, x) + p) = f(\varphi(t, x))$ e $\varphi(0, x + p) = \phi(0, x) + p = x + p$. Em outras palavras, temos provado que,

$$h \circ \phi(t, x) = \phi(t, x) + p = \varphi(t, x + p) = \varphi(t, h(x)),$$

o que nos mostra que as equações $x' = f(x)$ e $y' = F(y) := f(y + p)$ são conjugadas pelo difeomorfismo $h(x) = x + p$ de classe C^∞ .

4.3.2 Demonstração do Teorema 4.5.

A seguir, com ajuda dos resultados auxiliares anteriores, provaremos o Teorema 4.5 (Teorema de Grobman-Hartman para Campos), que é o principal teorema deste trabalho.

Demonstração: Sem perda de generalidade, vamos supor que $p = 0$, pois, do contrário, podemos fazer a mudança de coordenadas $y = x - p$, e usar o Lema 4.18 e o fato que a conjugação é uma relação de equivalência, portanto transitiva.

Note que, o campo X pode ser reescrito da seguinte forma,

$$X(x) = Ax + f(x),$$

onde $A = DX(0)$ e $f(x) = X(x) - Ax$. Como a A é uma matriz linear e $f(x)$ é uma função de classe C^1 tal que $f(0) = 0$, segue do Lema 4.17 que, dado $\epsilon > 0$ existe uma vizinhança $V = V(0)$ e uma função $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ limitada, com $\|\tilde{f}\| \leq \epsilon$ e $Lip(\tilde{f}) \leq \epsilon$ tal que $(A + \tilde{f}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma extensão de $X|_V$, isto é, $X|_V = (A + \tilde{f})|_V$. Assim, para um $\epsilon > 0$, suficientemente pequeno, temos pela Proposição 4.4 que existe uma

única função $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $h = x + v(x)$, onde $v(x)$ é contínua, limitada e α -Hölder, tal que

$$h \circ \phi_t = \tilde{\varphi}_t \circ h,$$

onde $\tilde{\varphi}(t, z)$ e $\phi(t, z)$ são respectivamente, as soluções dos problemas de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + \tilde{f}(x), \\ x(0) &= z \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \dot{y} &= A(y), \\ y(0) &= z, \end{cases} \quad (4.8)$$

Além disso, h é inversível onde, $h^{-1}(x) = x + \varpi(x)$, com $\varpi(x)$ função contínua, limitada e α -Hölder. Mas como $\tilde{f}|_V = f|_V$, temos que $\tilde{\varphi}_t(z) = \varphi_t(z)$ sempre que $z \in V$ e $\varphi_t(z) \in V$. Também note que, como $h(x) = x + v(x)$, onde $v(x)$ contínua, limitada e α -Hölder e o fato que a função $I(x) := x$ é localmente α -Hölder, então h é um homeomorfismo local α -Hölder. Analogamente, h^{-1} também é um homeomorfismo local α -Hölder. Isto completa a prova do teorema.

5 Exemplos

Nesta seção daremos exemplos para ilustrar o Teorema de Grobman-Hartman para campos (Teorema 4.5).

5.1 Sistema de Hartman ([6, p. 238])

Exemplo 5.1. Considere os seguintes campos vetoriais $X(x, y, z) = (2x, y + xz, -z)$ e $A(a, b, c) = (2a, b, -c)$ e seus respectivos sistemas de equações diferenciais

$$\begin{cases} (x, y, z)' &= X(x, y, z), \\ x(0) &= w \end{cases} \quad (5.1)$$

$$\begin{cases} (a, b, c)' &= A(a, b, c), \\ y(0) &= w. \end{cases} \quad (5.2)$$

Então, temos que os sistemas (5.1) e (5.2) são localmente conjugados por um homeomorfismo α -Hölder, para um α suficientemente pequeno, $h : V \rightarrow U$, onde V e U são vizinhanças de $(0, 0, 0)$ tal que $h(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$ e

$$h(\phi_t(z)) = \varphi_t(h(z)),$$

sempre que $z, \phi_t(z) \in V$, onde $\varphi(t, z)$ e $\phi(t, z)$ são as soluções dos problemas de valor inicial dos sistemas (5.1) e (5.2), respectivamente.

De fato, encontrando as singularidade do campo X , $X(x, y, z) = (2x, y + xz, -z) = (0, 0, 0)$, obtemos que $(0, 0, 0)$ é a única singularidade do campo X . Assim, $X(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$. A seguir, mostraremos que essa singularidade é hiperbólica. Se $X(x, y, z) = (2x, y + xz, -z)$, vamos usar a notação, $X_1(x, y, z) = 2x$, $X_2(x, y, z) = y + xz$, $X_3(x, y, z) = -z$. Assim,

$$DX(x, y, z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1(x,y,z)}{\partial x} & \frac{\partial X_1(x,y,z)}{\partial y} & \frac{\partial X_1(x,y,z)}{\partial z} \\ \frac{\partial X_2(x,y,z)}{\partial x} & \frac{\partial X_2(x,y,z)}{\partial y} & \frac{\partial X_2(x,y,z)}{\partial z} \\ \frac{\partial X_3(x,y,z)}{\partial x} & \frac{\partial X_3(x,y,z)}{\partial y} & \frac{\partial X_3(x,y,z)}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 0 & 0 \\ z & 1 & x \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Donde,

$$A = DX(0, 0, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Como A é diagonal, temos que seus autovalores são $\{2, 1, -1\}$. Logo, temos que $(0, 0, 0)$ é uma singularidade hiperbólica. Portanto, pelo Teorema de Grobman-Hartman (4.5) segue o resultado, o que conclui o exemplo.

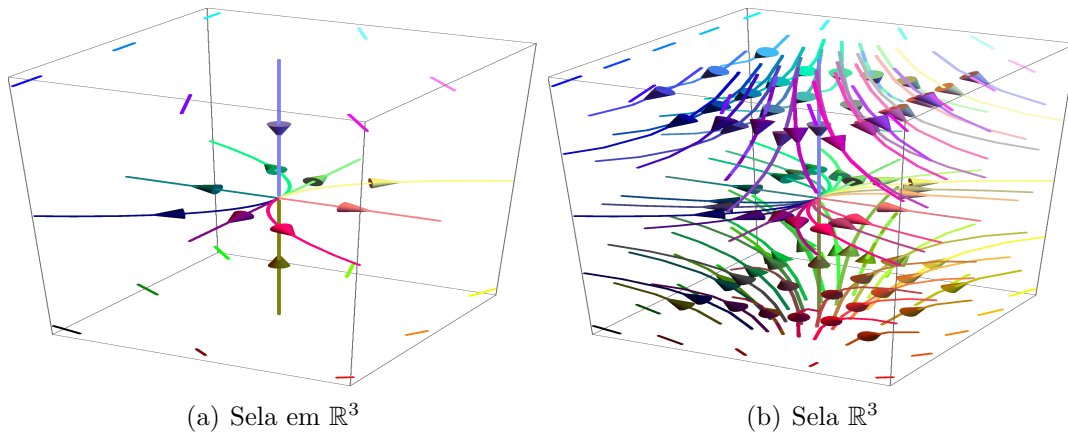


Figura 8: Comportamento das soluções da Eq. (5.2).

Observação 5.2. Uma interpretação geométrica do Teorema de Grobman-Hartman (TGH), para o exemplo anterior, é ver que as soluções da Eq. (5.1) tem um comportamento parecido às soluções da Eq. (5.2), cujo gráfico está descrito na Figura 8. Com este

fato, queremos destacar a importância e a utilidade do TGH, pois sem a necessidade de resolver a Eq. (5.1) podemos prever o comportamento de suas soluções ao redor do ponto $(0, 0, 0)$, a partir do comportamento das soluções da Eq. (5.2) (cujas soluções são mais simples de serem tratadas). Efetivamente, se encontramos as soluções da Eq. (5.1) com algumas condições iniciais (Ver Figuras 9 e 10) podemos verificar que o Teorema de Grobman-Hartman nos forneceu uma boa ideia de como se comportam as soluções da Eq. 5.1 ao redor de sua singularidade $(0, 0, 0)$. Justamente, esta segurança deve-se, à regularidade α -Hölder da conjugação do TGH (Teorema 4.5). Pois, se só temos a regularidade contínua na conjugação poderíamos ter que as soluções dos campos conjugados não tenham um comportamento geométrico parecido, como nos mostra o Exemplo 3.11.

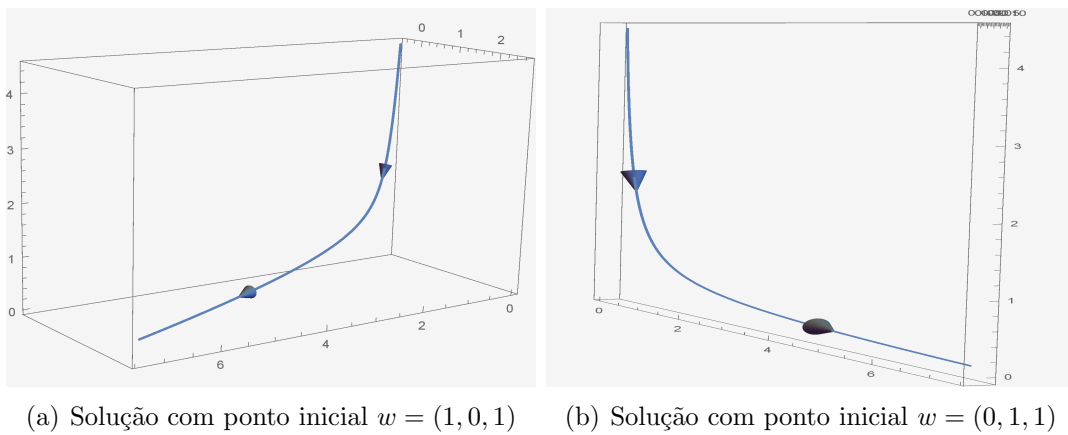


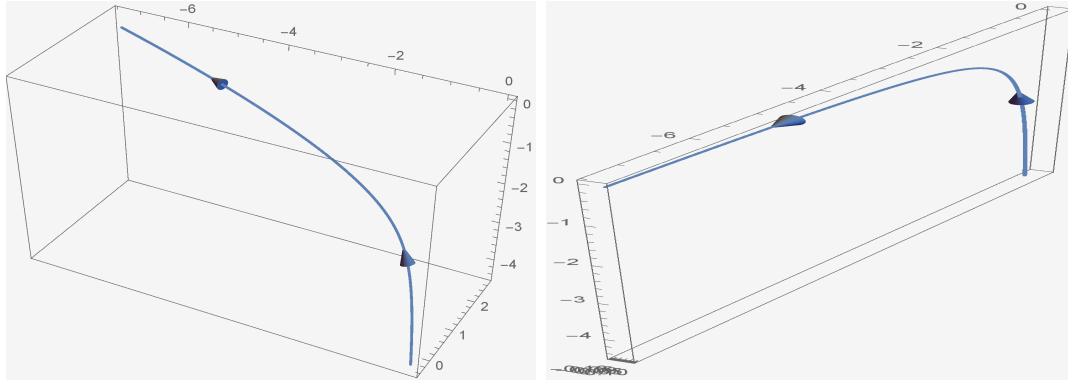
Figura 9: Comportamento de duas soluções da Eq. (5.1).

Observação 5.3. Mesmo sendo $X(x, y, z) = (2x, y + xz, -z)$ um campo analítico, Hartman provou em [6, p. 238] que a conjugação h do exemplo anterior não pode ser de classe C^1 , mais ainda, Irwin [7, p. 127] afirma que esta conjugação nem sequer pode ser Lipschitziana. Esse fato deve-se a que os autovalores da matriz $DX(0, 0, 0)$ são ressonantes.

Observação 5.4. Todas as Figuras, exceto as Figuras 3 e 7, foram elaboradas pelos autores usando o pacote de Gorni [3] que usa o software Mathematica.

5.2 Sistema de Lorenz ([10])

Exemplo 5.5. Seja o campo de Lorenz $X(x, y, z) = (-\alpha x + \alpha y, \rho x - y - xz, xy - \beta z)$, $\alpha > 0, \rho > 1, \beta > 0$, e o campo $A(a, b, c) = (-\alpha a + \alpha b, \rho a - b, -\beta c)$ com seus respectivos



(a) Solução com ponto inicial $w = (-1, 0, -1)$ (b) Solução com ponto inicial $w = (0, -1, -1)$

Figura 10: Comportamento de duas soluções da Eq. (5.1).

sistemas de equações diferenciais

$$\begin{cases} (x, y, z)' = X(x, y, z), \\ x(0) = w \end{cases} \quad (5.3)$$

$$\begin{cases} (a, b, c)' = A(a, b, c), \\ y(0) = w. \end{cases} \quad (5.4)$$

Então, temos que os sistemas (5.3) e (5.4) são localmente conjugados por um homeomorfismo η -Hölder, para um η suficientemente pequeno, $h : V \rightarrow U$, onde V e U são vizinhanças de $(0, 0, 0)$ tal que $h(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$ e

$$h(\phi_t(z)) = \varphi_t(h(z)),$$

sempre que $z, \phi_t(z) \in V$, onde $\varphi(t, z)$ e $\phi(t, z)$ são as soluções dos problemas de valor inicial dos sistemas (5.3) e (5.4), respectivamente .

De fato, encontrando as singularidade do campo X ,

$$X(x, y, z) = (-\alpha x + \alpha y, \rho x - y - xz, xy - \beta z) = (0, 0, 0),$$

obtemos que $(0, 0, 0)$ é singularidade do campo X . Assim, $X(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$. A seguir, mostraremos que essa singularidade é hiperbólica. Vamos a usar a notação,

$$X_1(x, y, z) = -\alpha x + \alpha y, X_2(x, y, z) = \rho x - y - xz, X_3(x, y, z) = -\beta z.$$

Assim,

$$DX(x, y, z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1(x, y, z)}{\partial x} & \frac{\partial X_1(x, y, z)}{\partial y} & \frac{\partial X_1(x, y, z)}{\partial z} \\ \frac{\partial X_2(x, y, z)}{\partial x} & \frac{\partial X_2(x, y, z)}{\partial y} & \frac{\partial X_2(x, y, z)}{\partial z} \\ \frac{\partial X_3(x, y, z)}{\partial x} & \frac{\partial X_3(x, y, z)}{\partial y} & \frac{\partial X_3(x, y, z)}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ \rho - z & -1 & -x \\ y & x & -\beta \end{bmatrix}.$$

Donde,

$$A = DX(0, 0, 0) = \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ \rho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{bmatrix}.$$

Assim, os autovalores de A são

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{(\alpha - 1)^2 + 4\alpha\rho} - \alpha - 1 \right), \lambda_2 = \frac{1}{2} \left(-\sqrt{(\alpha - 1)^2 + 4\alpha\rho} - \alpha - 1 \right), \lambda_3 = -\beta.$$

Logo, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ e $\lambda_3 < 0$, temos que $(0, 0, 0)$ é uma singularidade hiperbólica. Portanto, pelo Teorema de Grobman-Hartman (4.5) segue o resultado, o que conclui o exemplo. Para ver o comportamento local do sistema (5.3), veja a Figura 7.

6 Considerações finais

Os resultados principais deste trabalho (Proposição 4.4 e Teorema 4.5) melhoram os resultados clássicos da Teoria de Linearização de Grobman e Hartman (regularidade Hölder contínua da conjugação), para perturbações de campos lineares hiperbólicos e para campos vetoriais, sem a necessidade de hipóteses adicionais. Destacamos através dos exemplos anteriores a importância de ter pelo menos uma regularidade Hölder no lugar da regularidade contínua (um estudo detalhado de conjugação Hölder e Lipschitz para campos lineares encontra-se no artigo de Patrick et al. [11]). Além disso, como já foi apontado por Hartman [6], mesmo o campo vetorial sendo analítico, a conjugação pode não ser suave. A obstrução na maioria dos casos é devido à ressonância dos autovalores da parte linear.

7 Agradecimentos

Os autores agradecem aos revisores anônimos e ao editor geral da área de matemática pela leitura minuciosa e pelas sugestões que contribuiriam para enriquecer este trabalho.

Referências

- [1] Barreira, Luis.; Valls, Claudia.: Hölder Grobman-Hartman linearization. *Discrete Contin. Dyn. Syst.* **18** (2007), no. 1, 187–197.
- [2] Ciuşdel, C. F.; Coman, S.; Boldişor, Cr.; Kessler, T.; Muradyan, A.; Kovachev, A.; Lehrach, H.; Wierling, C.; Itu, L. M.: Effect of linearization in a wnt signaling model. *Computational and Mathematical Methods in Medicine.* (2019), 1–9.
- [3] Gianluca, Gorni.: *Curvesgraphics6.* (2011). Acesso em: 23 de nov. de 2020.
- [4] Grobman, D. M.: Homeomorphism of systems of differential equations. *Dokl. Akad. Nauk SSSR.* **128** (1959), 880–881.
- [5] Hartman, P.: A lemma in the theory of structural stability of differential equations. *Proc. Amer. Math. Soc.* **11** (1960), 610–620.
- [6] Hartman, P.: On local homeomorphisms of Euclidean spaces. *Bol. Soc. Mat. Mexicana.* **2** (1960), no. 5, 610–620.
- [7] Irwin, Michael Ch. *Smooth dynamical systems*, Michael Charles Irwin. Advanced series in nonlinear dynamics 17. World Scientific, 2001.
- [8] Khairudin, Nur I.; Abdullah, Farah A.; and Hassan, Yahya A.: Creeping solitons and hartman-grobman theorem. *AIP Conference Proceedings* **1605** (2014), 119–124.
- [9] Md Kamrujjaman, .-.; Lima, S. A.; Akter, S.; Eva, T.: Stability analysis and numerical solutions of a competition model with the effects of distribution parameters. *Journal of Bangladesh Academy of Sciences.* **43** (2019), no. 07, 95-106.
- [10] Lorenz, Edward. N.: Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences* 20:130–141, 1963.
- [11] Patrick, D.; McSwiggen.; Meyer, Kenneth R.: Conjugate phase portraits of linear systems. *The American Mathematical Monthly.* **115** (2008), no. 7, 596–614.
- [12] Santos, Reginaldo. J. *Introdução à álgebra linear, volume Único*, Reginaldo J. Santos. Imprensa Universitaria da UFMG, 2013.
- [13] Sotomayor, Jorge. M. T. *Lições de equações diferenciais ordinárias, volume único*, Jorge Manuel Sotomayor T. Projeto Euclides. IMPA, 1979.