REVISEM

Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática

https://doi.org/10.34179/revisem.v7i1.15409

NÚMEROS PARENTES

Thiago Rodrigues Cavalcante
Universidade Federal do Tocantins
thiago.cavalcante@mail.uft.edu.br
Rafael Pimenta Alves
Universidade Federal do Tocantins
rafaelpa62@gmail.com
Renata Rodrigues de Sousa
Universidade Federal do Tocantins
rodriguesrenata2908@gmail.com

Resumo

Este trabalho é motivado por uma questão da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas-OBMEP. Nesta, nos deparamos com a definição de *Números Parentes* e a relação destes com divisibilidade, que era tema dos nossos estudos. Além de resolver a questão em si, demonstramos resultados interessantes sobre esta classe de números, fizemos uma contagem dos elementos destes e propomos uma generalização desta definição. Não foi encontrado na teoria, além da questão, nada que envolvia estes números, isso nos fez aprofundar ainda mais em nossos resultados. Por fim deixamos ao leitor, algumas curiosidades e temas para possíveis trabalhos futuros.

Abstract

This work is motivated by a question from the Brazilian Olympiad of Mathematics of Public Schools-OBMEP. In this, we are faced with the definition of *Relative Numbers* and their relationship with divisibility, which was the subject of our studies. In addition to solving the question itself, we have shown interesting results on this class of numbers, we have counted their elements and we propose a generalization of this definition. In theory, besides the question, nothing involving these numbers was found, which made us go even deeper in our results. Finally, we leave the reader with some curiosities and themes for possible future works.

1 Introdução

Analisando várias questões de olimpíadas de matemáticas nacionais e internacionais, nos deparamos com alguns números interessantes; dentre estes, os *Números Parentes* nos chamou bastante atenção. Além de sua definição abstrata e devido a falta de teoria sobre o assunto, concluímos que existe muita coisa a ser estudada, generalizada e aprofundada sobre estes números.

Na teoria encontramos outros números curiosos, dos quais podemos citar os Números Misticos [2], Perfeitos [3] e Amigos [4, 6]. Não foram encontrados nada sobre essa interessante classe de números, os *Números Parentes*.

Seria interessante que o leitor tenha alguma fluência com certos conceitos e propriedades de divisibilidade e sistemas de numeração, caso precise consultar [5, 7].

Na prova da olimpíada de matemática OBMEP-2020 [1], mais precisamente na Questão 30 do nível 3, conforme podemos ver abaixo, encontramos estes *Números Parentes*, o que motivou este trabalho e uma parte de uma dissertação de mestrado.

Seja $\overline{ab}$ um número inteiro de dois dígitos. Um inteiro positivo n é um parente de $\overline{ab}$ se:

i) O dígito das unidades de n também é b.

ii) Os outros dígitos de n são distintos de zero e somam a.

Por Exemplo, os parentes de 31 são $31, 211, 121$ e 1111. Encontre todos os números de dois dígitos que dividem todos os seus parentes.

Ao analisarmos a questão, após resolvermos a mesma, nos deparamos com algumas observações sobre os números parentes de um inteiro de dois dígitos. Antes de citarmos tais observações, fazer uma contagem geral destes números, resolver esta questão e deduzirmos resultados novos sobre essa classe de números, generalizamos a definição de números parentes dada na questão da OBMEP, da seguinte forma:

Definição 1.1. Seja $ab \in \mathbb{Z}$. Um número $x \in \mathbb{Z}$ escrito na base 10 é dito um parente de ab se:

i) $x = y_r y_{r-1} \dots y_1 b$, para algum $r \in \mathbb{N}$ e $y_i \neq 0$, para todo $1 \leq i \leq r$;

ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} y_i = a$.

Note que a *Definição 1.1* é equivalente a dada na questão, diferindo apenas que no primeiro item escrevemos o número $x \in \mathbb{Z}$ na base 10 e destacamos que o algarismo da unidade sempre deve ser o b. Esta definição nos fez pensar em alguns exemplos de parentes de um inteiro de dois dígitos, dos quais citamos:

Exemplo 1.1. Seja $ab = 87 \in \mathbb{Z}$. Então, *alguns* dos parentes de 87, são:

$$87, 627, 5217, 42117, 111111117, \dots.$$

Claramente, no *Exemplo 1.1*, não estão listados todos os parentes de 87, número 447 é parente de 87 e não está listado. Quantos seriam e quem seriam todos os parentes de 87? E se pensássemos no número $78 \in \mathbb{Z}$? Claramente, não teríamos os mesmos parentes de 87 pois o algarismo da unidade é diferente, mas será que teriam a mesma quantidade de parentes? Além destas, nos deparamos com as seguintes questões sobre os *Números Parentes*:

(01) Os parentes de um número inteiro arbitrário ab formam um conjunto infinito?

(02) Fixando $b \in \mathbb{N}$ um natural de um algarismo e variando $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, o conjunto formado pelos parentes de ab, para cada a, possui quantos elementos?

(03) Tomando $a_1, a_2 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, o conjunto formado pelos parentes de a_1b e a_2b possuem alguma relação?

(04) Os parentes de ab se relacionam com o número ab? Se sim, como? Quais seriam estas relações?

(05) Poderíamos generalizar a definição de um parente de $ab \in \mathbb{Z}$, para parentes de abc? e para um inteiro de n algarismos $a_n a_{n-1} \dots a_1 \in \mathbb{Z}$? Como seriam tais definições? Será que para estas, ainda valem as mesmas propriedades e resultados obtidas com a *Definição* 1.1?

Procuramos referências sobre *Números Parentes de* $\overline{ab} \in \mathbb{Z}$ e, além da questão precitada, não encontramos em nenhuma bibliografia algo sobre esta classe de números. Este fato, a curiosa definição, os questionamentos feitos e as possíveis generalizações, motivaram este trabalho.

Iniciamos nossa análise destes números, fixando um algarismo da unidade $b \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e variando, inicialmente, $a \in \{1, 2, 3, 4\}$. Deste modo, observamos que:

Observação 1.1. Um número inteiro de dois dígitos ab sempre será *parente* dele mesmo. Além disso, como a soma dos algarismos diferentes de zero de um parente de ab é sempre a, então o número $111 \dots 1b$, onde a quantidade de 1 é a, é também uma parente de ab. Durante este texto, estes recebem o nome de *Parentes Triviais de ab*.

Observação 1.2. O conjunto formado pelos parentes de ab, a medida que o algarismo a cresce, possuem cardinalidade crescente. Denotando por $NP(ab)$ - *Números de Parentes* *de ab e por $P(ab)$ - O conjunto dos parentes de ab*, temos:

$$\begin{aligned} \text{Se } P(1b) &= \{1b\}, \text{ então } NP(1b) = 1. \\ \text{Se } P(2b) &= \{2b; 11b\}, \text{ então } NP(2b) = 2. \\ \text{Se } P(3b) &= \{3b; 21b; 12b; 111b\}, \text{ então } NP(3b) = 4. \\ \text{Se } P(4b) &= \{4b; 31b; 13b; 22b; 211b; 121b; 112b; 1111b\}, \text{ então } NP(4b) = 8. \end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$NP(1b) = 2^0 < NP(2b) = 2^1 < NP(3b) = 2^2 < NP(4b) = 2^3 < \dots,$$

estas quantidades serão muito importantes na próxima sessão, onde faremos a contagem de $NP(ab)$.

Observação 1.3. Analisando os parentes de ab, verificamos sem muita dificuldade que, independente de quem seja o algarismo a, os *Parentes Triviais* de ab sempre possuem dois algarismos, sendo este ele mesmo ab e $(a+1)$ algarismos, onde este é formado por uma quantidade a de números 1 e, o último algarismo como sendo o b.

Neste momento, vamos à parte que demandou mais tempo e dedicação na realização deste trabalho, que foi realizar a contagem destes números.

2 Contagem dos Números Parentes

No intuito de fazermos uma contagem dos números parentes de um inteiro ab, para o algarismo b fixado e $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, listaremos os elementos de alguns dos conjuntos $P(ab)$ e, posteriormente mostraremos um padrão.

De forma a determinar um padrão para a contagem dos elementos de $P(ab)$, para um dígito a arbitrário, em cada um dos itens listados abaixo, realizaremos um estudo para cada um dos conjuntos descritos, denotando a qualquer, da seguinte maneira:

i) **Para** $a = 1$

$$P(1b) = \{1b\}.$$

Se $a = 1$, no conjunto anterior, então:

$$P(ab) = \{ab\},$$

onde obtemos apenas 1 parente com 2 algarismos, o qual será denotado no texto por $(2A)$ e este é o parente trivial. Portanto, neste caso, temos:

$$1(2A),$$

onde 1 denota a quantidade de parentes.

ii) **Para** $a = 2$

$$P(2b) = \{2b, 11b\}.$$

Sendo $a = 2$, em $P(2b)$, segue que

$$P(ab) = \{ab, \underbrace{a - (a-1)}_{\text{a-algarismos}} b\}.$$

Note que, $P(1b) \subset P(2b)$ e, do conjunto $P(1b)$ para $P(2b)$, aumentam-se apenas 1 elemento, no caso, $a - (a-1)b$.

Logo, obtemos 1 parente com $(2A)$ e 1 com $(3A)$, no caso apenas os parentes triviais:

$$1(2A) \;\; 1(3A)$$

iii) **Para** $a = 3$

$$P(3b) = \{3b, 21b, 12b, 111b\}.$$

Se atribuirmos, para buscar um padrão, $a = 3$ em $P(3b)$, teremos que:

$$P(ab) = \{ab, \underbrace{(a-1)1b}_{2\text{x}}, \underbrace{(a - (a-1))}_{\text{a-algarismos}} b\}.$$

Observe que, utilizamos apenas a permutação de $(a-1)$ e 1 no segundo e terceiro parente de $(3b)$, este último omitido. Gerando portanto 2 elementos de $(3A)$ e o último parente é o trivial $a - (a-1)b$, com $(4A)$.

Além disso, $P(2b) \subset P(3b)$ e, do conjunto $P(2b)$ para $P(3b)$, foram adicionados 2 elementos, no caso, $(a-1)1b$ e $1(a-1)b$.

Adicionalmente, neste caso temos, além dos parentes triviais de $(2A)$ e $(a+1)A$, temos 2 parentes não triviais de $(3A)$:

$$1(2A) \; 2(3A) \; 1((a+1)A).$$

iv) **Para** $a = 4$

$$P(4b) = \{4b, 31b, 13b, 22b, 211b, 121b, 112b, 1111b\}.$$

Utilizando o mesmo raciocínio do item anterior, ou seja, atribuindo $a = 4$ em $P(4b)$, temos que:

$$P(ab) = \{ab, \underbrace{(a-1)1b}_{2\text{x}}, \underbrace{(a-2)2b}_{1\text{x}}, \underbrace{(a-2)11b}_{3\text{x}} \underbrace{(a - (a-1))}_{\text{a-algarismos}} b\}.$$

Aqui, além dos elementos do conjunto formado pelos parentes de $(3b)$, obtivemos os termos da forma $(a-2)2b$, o qual é tomado apenas uma vez por conta de que $2(a-2)b$, para $a=4$, é o mesmo número. Paralelamente a este termo, temos $(a-2)11b$ e estes foram obtidos através da reescrita do algarismo da unidade 2, pelos seus fatores e formam o conjunto de parentes de $4b$, com $(4A)$.

É interessante notar que, novamente temos que o conjunto $P(3b) \subset P(4b)$. Neste último conjunto, foi adicionado os termos $(a-2)2b$ e, por consequência, o conjunto de termos formado pelos fatores de 2, $(a-2)11b$ e suas permutações. No geral, do conjunto $P(3b)$ para $P(4b)$, aumentaram-se 4 elementos.

Neste caso, além dos triviais de $(2A)$ e de $(a+1)A$, temos 3 parentes não triviais de $(3A)$ e 3 de $(4A)$:

$$1(2A)\ 3(3A)\ 3(4A)\ 1((a+1)A)$$

Antes de partirmos para o caso em que $a=5$, que será o último antes de obtermos o padrão e fazermos a contagem dos números parentes, vamos justificar o fato de estarmos destacando alguns termos em vermelho no texto. O padrão surge destes elementos, do encaixe dos conjuntos e é bastante curioso que, ao olharmos para os parentes e seus algarismos, formamos um triângulo de pascal de $a=1$ até $a=9$ e por consequência deste fato, a contagem segue somando as linhas do triângulo.

Para finalizarmos faremos o caso em que $a=5$. A listagem e contagem dos números parentes deste é bem trabalhosa, mas não se compara ao caso em que $a=7,8$ e $a=9$. Caberia certamente na sessão de resultados principais, entretanto preferimos colocar a contagem em destaque nesta sessão.

v) **Para** $a=5$

$$\begin{aligned} P(5b) &= \{5b, 41b, 14b, 32b, 23b, , 311b, 131b, 113b, \\ &\quad 221b, 212b, 122b, 2111b, 1211b, 1121b, 1112b, 11111b\} \end{aligned}$$

Como feito anteriormente, para $a=5$, temos que:

$$P(ab) = \{ab, \underbrace{(a-1)1b}_{\text{2x}}, \underbrace{(a-2)2b}_{\text{2x}}, \underbrace{(a-2)11b}_{\text{3x}}, \underbrace{(a-3)21b}_{\text{3x}}, \underbrace{(a-3)111b}_{\text{4x}}, \underbrace{(a-(a-1))}_{\text{a-algarismos}}b\}.$$

Subtraindo-se os elementos do conjunto $P(4b)$ deste conjunto listado, ou seja, de $P(5b)$, sobram-se os termos $(a-3)21b$, suas permutações e o $(a-3)111b$, que é a reescrita daquele com os fatores de 2. Utilizando uma técnica de combinatória, mais precisamente a permutação dos elementos, concluímos que $P(4b) \subset P(5b)$, onde aumentaram-se neste último, 8 elementos.

Fazendo uma analise dos elementos de $P(5b)$, verifica-se que existem:

$$1(2A)\ 4(3A)\ 6(4A)\ 4(5A)\ 1((a+1)A).$$

Como foi visto, neste caso, ja se torna cansativa a contagem dos $NP(5b)$.

Analisando a listagem anterior dos elementos do conjunto $P(5b)$, nota-se diretamente que, para o caso em que $a = 6$, teremos:

$$\begin{aligned} P(ab) \;=\; \{ & ab, \underbrace{(a-1)1b}_{2x}, \underbrace{(a-2)2b}_{2x}, \underbrace{(a-2)11b}_{3x}, \underbrace{(a-3)3b}_{1x}, \underbrace{(a-3)21b}_{6x}, \underbrace{(a-3)111b}_{4x}, \\ & \underbrace{(a-4)22b}_{1x}, \underbrace{(a-4)211b}_{6x}, \underbrace{(a-4)1111b}_{5x}, \underbrace{(a-(a-1))}_{\text{a-algarismos}} b\}. \end{aligned}$$

Note que a este conjunto $P(6b)$, além dos elemento de $P(5b)$, adicionamos os elementos $(a-3)3b$ e mais 3 combinações de $(a-3)21b$, já que agora, $(a-3) = 3 \Rightarrow (a-3)21b = 321$ e, consequentemente possui três elementos a mais do que no caso em que $a = 5$, onde neste caso, tínhamos que $(a-3) = 2 \Rightarrow (a-3)21b = 221$, o qual permutando os algarismos, obtivemos 3 elementos a menos, como foi descrito no item v).

Além destes, é adicionado $(a-4)22b$ e, por decorrência deste, vieram os elementos que são fatores dele, isto é, reescrever o 22 como 211 e 1111 e permutar/combinar o algarismo $(a-4)$.

Fazendo a diferença entre $NP(6b)$ e $NP(5b)$, temos um total de 16 elementos. Analisando os elementos de $P(6b)$ e associando estes à quantidade de algarismos, obtemos:

$$1(2A)\ 5(3A)\ 10(4A)\ 10(5A)\ 5(6A)\ 1((a+1)A).$$

Ao analisarmos $a = 7$, temos:

$$1(2A)\ 6(3A)\ 15(4A)\ 20(5A)\ 15(6A)\ 6(7A)\ 1((a+1)A)$$

e teremos um acréscimo, de 32 elementos de $NP(6b)$ para $NP(7b)$.

Realizando o que feito anteriormente para $a = 8$ e $a = 9$, verificamos que os parentes de ab, associados a quantidade de seus algarismos, formam o seguinte triângulo de pascal:

$$1(2A)$$
$$1(2A)\ 1((a+1)A).$$
$$1(2A)\ 2(3A)\ 1((a+1)A).$$
$$1(2A)\ 3(3A)\ 3(4A)\ 1((a+1)A)$$
$$1(2A)\ 4(3A)\ 6(4A)\ 4(5A)\ 1((a+1)A).$$
$$1(2A)\ 5(3A)\ 10(4A)\ 10(5A)\ 5(6A)\ 1((a+1)A).$$
$$1(2A)\ 6(3A)\ 15(4A)\ 20(5A)\ 15(6A)\ 6(7A)\ 1((a+1)A).$$
$$1(2A)\ 7(3A)\ 21(4A)\ 35(5A)\ 35(6A)\ 21(7A)\ 7(8A)\ 1((a+1)A).$$
$$1(2A)\ 8(3A)\ 28(4A)\ 56(5A)\ 70(6A)\ 56(7A)\ 28(8A)\ 8(9A)\ 1((a+1)A).$$

Os elementos em vermelho, como foi citado nos itens anteriores, indicam a quantidade de parentes que o número ab possui, formado com a quantidade de algarismos que esta citada ao lado direito deste número. Cada linha do triângulo, corresponde a um valor de $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, com os quais calculamos a quantidade de parentes com $(2A), (3A), (4A), ..., (10A)$.

O intuito da sessão, e o nosso no começo do trabalho, era de "apenas"calcular a quantidade $NP(ab)$, para um b fixado e $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Como foi visto anteriormente, gerou muito mais do que isso. Mas para nossos propósitos, sabemos que a soma dos elementos da n-ésima linha do triângulo de Pascal é igual a 2^n, onde $n \geq 0$. Entretanto, no nosso caso, começamos com $a = 1$, portanto a soma da n-ésima linha é dada por 2^{a-1}. De onde segue que

$$NP(ab) = 2^{a-1}, \text{ para } b \text{ fixo e } a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Uma pergunta que ficou na introdução e cabe aqui a resposta, é sobre a finitude do conjunto $P(ab)$. No que fora apresentado anteriormente, fica claro que se tratam de conjunto finitos, para b fixo e $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. E se b variar!? Neste caso, como b é o algarismo das unidades do inteiro ab, temos que ele pode assumir 10 valores, que são $b \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Portanto, basta multiplicarmos $NP(ab)$ por 10 que teremos a quantidade geral de números parentes de ab. Este será denotado por $NGP(ab)$ e dado por:

$$NP(ab) = 2^{a-1} \cdot 10 = 2^a \cdot 5, \text{ para } a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \text{ e } b \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

No que segue, vamos responder a questão da OBMEP que motivou o trabalho.

3 Análise da Questão da OBMEP

Antes de resolver a questão cabe um comentário sobre o motivo de ter escolhido a mesma. Além dos *Números Parentes*, que por si só já é motivo do estudo, a dissertação de mestrado desenvolvida por nós, tem como tema divisibilidade e que se encaixa na questão pré citada, que é a seguinte:

Seja $\overline{ab}$ um número inteiro de dois dígitos. Um inteiro positivo n é um parente de $\overline{ab}$ se:

i) O dígito das unidades de n também é b.

ii) Os outros dígitos de n são distintos de zero e somam a.

Por Exemplo, os parentes de 31 são $31, 211, 121$ e 1111. Encontre todos os números de dois dígitos que dividem todos os seus parentes.

Solução 3.1. Vamos dividir a solução desse problema considerando três casos:

i) **Se** $a = 1$

Se n é parente de $\overline{ab}$, mais precisamente de $\overline{1b}$, então a única possibilidade para n é o próprio $n = \overline{1b}$, como vimos na sessão anterior.

A questão pede para determinar os números de dois dígitos que dividem todos os seus parentes. Neste caso o número seria $\overline{ab} = \overline{1b}$, cujos parentes são os próprios $\overline{1b}$. Portanto, como $\overline{1b}|\overline{1b}$ para todo inteiro $0 \leq b \leq 9$. Então os números

$$\overline{ab} = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19\}$$

dividem todos os seus parentes.

ii) **Se** $a = 2$

Supondo n um parente de $\overline{2b}$, então $n \in \{\overline{2b}, \overline{11b}\}$. Para que tenhamos solução para o caso $a = 2$, $\overline{2b} \mid n$, para todo n parente de $\overline{2b}$.

Temos que $\overline{2b}|\overline{2b}$, então para $\overline{2b}|n$, para todo n parente de $\overline{2b}$, obrigatoriamente deve-se ter que $\overline{2b}|\overline{11b}$. Mas esse fato implica em $\overline{2b}|\left(\overline{11b} - \overline{2b}\right)$. Neste momento, vamos analisar a diferença $\left(\overline{11b} - \overline{2b}\right)$, mais precisamente vamos reescrever esses números $\overline{11b}$ e $\overline{2b}$ na base 10:

$$\begin{aligned} \left(\overline{11b} - \overline{2b}\right) &= (1 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + b) - (2 \cdot 10 + b) \\ &= 10^2 - 10 \\ &= 90. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Segue de (3.1) que $\overline{2b}$ divide todos os seus parentes, se $\overline{2b}$ é divisor de 90. Temos que os divisores de 90 são $\{1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90\}$. Como $b \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, então

$$20 \leq \overline{2b} \leq 29.$$

Já que não existe divisor de 90 neste intervalo de $\overline{2b}$, então $\overline{2b} \nmid n$, para todo n parente de $\overline{2b}$.

iii) **Se** $a \geq 3$

Na sessão anterior, fizemos a análise dos parentes de $\overline{ab}$, para $a \geq 3$. Em particular temos que, para todo $a \geq 3$, os elementos

$$\overline{(a-3)\,21b} \text{ e } \overline{(a-3)\,12b}$$

são parentes de $\overline{ab}$.

Portanto, $\overline{ab}$, para $a \geq 3$, dividirá todos os seus parentes se dividir, em particular, estes dois. Este fato implica que $\overline{ab}$ divide a diferença $\left[\overline{(a-3)\,21b} - \overline{(a-3)\,12b}\right]$.

Vamos fazer a mesma análise feita em (3.1):

$$\begin{aligned} \overline{(a-3)\,21b} - \overline{(a-3)\,12b} &= [(a-3)\cdot 10^3 + 2\cdot 10^2 + 1\cdot 10 + b] \\ -[(a-3)\cdot 10^3 + 1\cdot 10^2 + 2\cdot 10 + b] & \\ &= (2\cdot 10^2 + 1\cdot 10) - (1\cdot 10^2 + 2\cdot 10) \\ &= 100 - 10 = 90. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Novamente, $\overline{ab}$ divide todos os seus parentes, para $a \geq 3$, se $\overline{ab}$ for divisor de 90. Analisando os divisores de 90 e usando que

$$30 \leq \overline{ab} \leq 99,$$

podemos concluir que $\overline{ab} = \{30, 45, 90\}$.

Pelo que foi feito, temos que 30, 45 e 90 dividem todos os seus parentes. No que segue vamos apenas verificar que isso realmente acontece:

- **Se** n **é parente de** 30**;**

  Temos que n termina em 0 e a soma de seus algarismo é múltiplo de 3. Portanto, n é múltiplo de $10 \cdot 3 = 30$, ou seja, $30 \mid n$, para qualquer n parente de 30.

- **Se n é parente de 45;**

  Novamente, o algarismo da unidade de n é 0 e a soma dos seus algarismos é 4. Deste modo, $n = m \cdot 10 + 5$, em que m é um número cuja soma dos dígitos é 4, pelo item ii) da definição de números parentes.

  Temos que o algarismo da unidade de n é 5, pelo item i) da definição de números parentes e, como os outros dígitos somam 4, segue que a soma dos algarismos de n é 9.

  Pelo critério de divisibilidade por 9, como a soma dos algarismos de n é 9, n é múltiplo de 9. Além disso, como n termina em 5, então n também é múltiplo de 5. Portanto, n é múltiplo de $9 \cdot 5 = 45$. Consequentemente $45 \mid n$, para todo n parente de 45.

iii) **Se n é parente de 90;**

  Neste caso, o algarismo da unidade de n é 0 e a soma dos demais algarismos é 9. Logo os números formados pelos dígitos de n, diferentes do 0, são múltiplos de 9. Como n termina em 0 e é múltiplo de 9, segue que n é múltiplo de $9 \cdot 10 = 90$. Portanto $90 \mid n$, para cada n parente de 90.

Logo, os únicos inteiros positivos que dividem todos os seus parentes são:

$$\{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 30, 45, 90\}.$$

Neste momento, vamos aos resultados novos referentes a esta classe curiosa de números. Ao analisarmos os *Números Parentes*, mais precisamente resolvendo a questão motivadora e fazendo a contagem dos mesmos, obtemos alguns resultados particulares, para uma classe de parentes em determinados valores de a. A partir destes, conseguimos generalizar e demonstrar. No que segue, estão listados alguns destes resultados e exemplos.

4 Resultados Principais

Nesta sessão, vamos relacionar os *Números Parentes* com critérios de divisibilidade. Relacionamos dois parentes arbitrários de um inteiro ab e, além disso, estudamos a relação que existe entre um *Número Parente* de ab, com o próprio inteiro ab.

Os três primeiros resultados, relacionam dois parentes arbitrários de um inteiro de dois dígitos ab fixado.

Teorema 1. Seja ab um inteiro de dois dígitos. Então a diferença de quaisquer dois parentes x, y de ab é sempre múltiplo de 90.

Demonstração. Sejam $x = a_r \ldots a_s \ldots a_2 a_1 b$ e $y = b_s \ldots b_2 b_1 b$, onde $0 \leq a_i \leq 9$ e $0 \leq b_j \leq 9$ são algarismos, dois parentes de arbitrários ab, onde supomos, sem perda de generalidade que o índice $r > s$. Então

$$\begin{aligned} x &= a_r + \ldots + a_s + \ldots + a_2 + a_1 \\ y &= b_s + \ldots + b_2 + b_1 \end{aligned}$$

Os números x e y podem ser escritos como

$x = b + a_1 10 + a_2 10^2 + \ldots + a_s 10^s + a_{s+1} 10^{s+1} + \ldots + a_r 10^r$ e $y = b + b_1 10 + b_2 10^2 + \ldots + b_s 10^s$.

Fazendo a diferença de x, y, aplicando o Binômio de Newton nas potências $(9+1)^t$ e utilizando o segundo item da definição de números parentes, temos que

$$\begin{aligned} x - y &= (a_1 - b_1)10 + (a_2 - b_2)10^2 + \ldots + (a_s - b_s)10^s \ldots + a_r 10^r \qquad (4.1) \\ &= (a_1 - b_1)(9+1) + \ldots + (a_s - b_s)(9+1)^s + \ldots + a_r(9+1)^r \\ &= 9M + (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \ldots (a_s - b_s) + a_{s+1} + \ldots + a_r \\ &= 9M + (a_1 + a_2 + \ldots a_s + \ldots + a_r) - (b_1 + b_2 + \ldots + b_s) \\ &= 9M + a - a = 9M. \qquad (4.2) \end{aligned}$$

Note que de (4.1), temos que $x - y$ é múltiplo de 10 e por(4.2), temos que $x - y$ é múltiplo de 9. Portanto $x - y$ é múltiplo de 90. □

Exemplo 4.1. Sejam $x = 11116$ e $y = 316$, dois parentes de 46, então temos que:

$$\begin{aligned} x - y &= 11116 - 316 \\ &= 10800 \\ &= 120 \cdot 90 \end{aligned}$$

Exemplo 4.2. Tome $x = 268$ e $y = 718$, dois parentes de 88. Então:

$$\begin{aligned} x - y &= 268 - 718 \\ &= 450 \\ &= 5 \cdot 90 \end{aligned}$$

Segue direto do **Teorema**1, os seguintes corolários, cujas demonstrações ficam a cargo do leitor:

Corolário 1. A diferença de dois parentes x e y de ab é sempre divisível por 9.

Corolário 2. A diferença de dois parentes x e y de ab é sempre divisível por 10.

Exemplo 4.3. Considere $x = 611$ e $y = 251$, dois parentes de 71, então temos que:

$$\begin{aligned} x - y &= 611 - 251 \\ &= 360 \\ &= 360 = 10 \cdot 36 = 10 \cdot 9 \cdot 4. \end{aligned}$$

O próximo resultado irá estudar o comportamento da soma de dois parentes arbitrários de um inteiro $ab \in \mathbb{Z}$.

Teorema 2. Seja ab um inteiro de dois dígitos. Então a soma de quaisquer dois parentes x, y de ab é sempre par.

Demonstração. Sejam $x = a_n10^n + \cdots + a_210^2 + a_110 + b$ e $y = b_t10^t + \cdots + b_210^2 + b_110 + b$, fazendo $x + y$, temos

$$x + y = a_n10^n + \cdots + (a_t + b_t)10^t + \cdots + (a_2 + b_2)10^2 + (a_1 + b_1)10 + 2b$$

Obviamente, $2|x + y$. □

Exemplo 4.4. Sejam $x = 112$ e $y = 22$ dois parentes de 22, então temos que:

$$\begin{aligned} x + y &= 112 + 22 \\ &= 134 \\ &= 2 \cdot 67 \end{aligned}$$

Exemplo 4.5. Seja $ab = 59$, com $x = 329$ e $y = 419$, dois parentes de 59. Então:

$$\begin{aligned} x + y &= 329 + 419 \\ &= 748 \\ &= 2 \cdot 374 \end{aligned}$$

Teorema 3. Seja ab um inteiro de dois dígitos, x e y dois parentes arbitrários de ab. Então $10 \mid (x + 9y)$ e $10 \mid (x - 11y)$.

Demonstração. Sejam $x = a_n10^n + \cdots + a_210^2 + a_110 + b$ e $y = b_t10^t + \cdots + b_210^2 + b_110 + b$, onde o índice n é, tomado sem perda de generalidade, maior do que t.

Inicialmente, vamos provar que $10 \mid (x + 9y)$. Note que

$$\begin{aligned} x + 9y &= (a_n10^n + \ldots + \ldots + a_210^2 + a_110 + b) + 9(b_t10^t + \ldots + b_210^2 + b_110 + b) \\ &= a_n10^n + \ldots + (a_t + 9b_t)10^t + \ldots + (a_2 + 9b_2)10^2 + (a_1 + 9b_1)10 + 10b (4.3) \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que $10 \mid x + 9y$.

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} x - 11y &= (a_n 10^n + \ldots + a_t + \ldots + a_1 10 + b) - 11(b_t 10^t + \ldots + b_2 10^2 + b_1 10 + b) \\ &= a_n 10^n + \ldots + (a_t - 11b_t)10^t + \ldots + (a_2 + 11b_2)10^2 + (a_1 + 11b_1)10 - (10b), \end{aligned} \tag{4.4}$$

de onde segue que $10 \mid (x - 11y)$ □

Exemplo 4.6. Tome $ab = 31$, e sejam $x = 111$, $y = 121$, dois parentes de 31, então temos que:

$$\begin{aligned} (x + 9y) &= 111 + 9 \cdot 121 \\ &= 111 + 1089 \\ &= 1200, \end{aligned}$$

e $10 \mid 1200$.

Exemplo 4.7. Seja $ab = 63$, com $x = 333$ e $y = 423$, dois parentes de 63. Então:

$$\begin{aligned} (x - 11y) &= 333 - 11 \cdot 423 \\ &= 333 - 4653 \\ &= 4320, \end{aligned}$$

e $10 \mid 4320$.

É importante observar que, os resultados anteriores, e os que seguem, são referente a associações entre *Números Parentes* e divisibilidade. Nada impede que existam resultados, relacionando esses números, em outros tópicos, tais como congruência modulares, sistemas lineares, envolvendo os *Números Parentes*. Cabe ao leitor, que se interessar, investigar sobre e produzir novos trabalhos.

Neste momento, diferentemente do que foi feito com os resultados anteriores, vamos relacionar um número parente de um inteiro de dois dígitos ab, com o próprio número ab.

Teorema 4. *A diferença de um número parente x de ab por ab sempre é divisível por 10.*

Demonstração. Sejam $x = a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + b$ e $ab = a10 + b$, fazendo a diferença $x - ab$, temos

$$\begin{aligned} x - ab &= a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + b - (a10 + b) \\ &= a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + (a_1 - a)10 \\ &= 10[a_n 10^{n-1} + \cdots + a_2 10 + (a_1 - a)] \end{aligned}$$

□

Exemplo 4.8. Seja $x = 119$ um parente de $ab = 29$, então temos que:

$$\begin{aligned}(x - ab) &= 119 - 29 \\ &= 90\end{aligned}$$

e $10 \mid 90$.

Exemplo 4.9. Considere $x = 5317$ um parente de $ab = 97$, então temos que:

$$\begin{aligned}(x - ab) &= 5317 - 97 \\ &= 5320,\end{aligned}$$

e $10 \mid 5320$.

Teorema 5. A soma de um número x parente de ab por ab sempre par.

Demonstração. Sejam $x = a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + b$ e $ab = a10 + b$, fazendo a soma $x + ab$, temos

$$\begin{aligned}x + ab &= a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + b + (a10 + b) \\ &= a_n (2 \cdot 5)^n + \cdots + a_2 (2 \cdot 5)^2 + (a_1 + a)(2 \cdot 5) + 2b \\ &= a_n 2^n \cdot 5^n + \cdots + a_2 2^2 \cdot 5^2 + (a_1 + a)(2 \cdot 5) + 2b \\ &= 2[a_n 2^{n-1} \cdot 5^n + \cdots + a_2 2 \cdot 5^2 + (a_1 + a)5 + b]\end{aligned}$$

□

Exemplo 4.10. Seja $x = 317$ um parente de $ab = 47$, então temos que:

$$\begin{aligned}(x + ab) &= 317 + 47 \\ &= 364\end{aligned}$$

e $2 \mid 364$.

Exemplo 4.11. Considere $x = 335$ um parente de $ab = 65$, então temos que:

$$\begin{aligned}(x + ab) &= 335 + 65 \\ &= 400\end{aligned}$$

e $2 \mid 400$.

Utilizando todos os resultados anteriores, relacionando eles, somos capazes de provar que:

Corolário 3. Sejam x e y dois parentes arbitrários de um inteiro ab, então $10 \mid (x+y) - 2ab$.

Exemplo 4.12. Considere $x = 124$ e $y = 214$ dois parentes de $ab = 34$, então temos que:

$$\begin{aligned} (x+y) - 2ab &= (124 + 214) - 2 \cdot 34 \\ &= 338 - 68 \\ &= 270 \end{aligned}$$

e $10 \mid 270$.

5 Considerações Finais

Nos deparamos com esta questão da OBMEP e consequentemente com os *Números Parentes*, procurando questões que envolviam o tema da dissertação, divisibilidade. Resolvemos a questão e nos aprofundamos muito na definição dessa classe de números, como foi descrito nas sessões anteriores. A parte que demandou mais tempo e trabalho, foi a listagem e contagem dos $NP(ab)$, por ser algo novo, desafiador e muito interessante.

Na introdução deixamos algumas perguntas, as quais foram respondidas durante o trabalho, exceto uma, a que questiona sobre a generalização da definição de parentes de um número inteiro de dois algarismos ab, para um inteiro abc e para um $a_1a_2\ldots a_s \in \mathbb{Z}$. Pensamos bastante em uma generalização que não fugisse ao sentido dos números, fica até a cargo do leitor pensar em uma outra, mas a que pensamos foi a seguinte:

Um número inteiro n é parente de $abc \in Z$ se:

i) O primeiro algarismo é igual a a e o dígito das unidades de n é igual a c

ii) Os demais algarismos de n são diferentes de zero e somam b

Como exemplo, os parentes de $231 \in \mathbb{Z}$ seriam: $231, 2211, 2121, 21111$

Seria bastante interessante realizar um estudo, como o que foi feito neste trabalho, sobre esta nova definição, agora para parentes de um número com três algarismos. Uma outra coisa, que caberia certamente em um trabalho futuro, seria generalizar a definição de *Números Parentes*, para um número com uma quantidade finita de algarismos e com esta, realizar um estudo bem geral, que seria muito original. Será que os resultados obtidos aqui ainda seriam verdadeiros para estas novas definições? A contagem, o que mudaria? Existiriam novos resultados que valem para *Números Parentes* de inteiros com mais de dois algarismos, que não valem para inteiros com dois? Estas e outras e outras questões são deixadas ao leito interessado em aprofundar nos estudos sobre essa classe de números.

Referências

[1] Assis, C.; Feitosa S. *Banco de Questões OBMEP-2020* IMPA-Rio de Janeiro, RJ.

[2] Brito, Frederico R.M. **RPM 58** *Números Místicos.* UNISETE, MG.

[3] Fonseca, Rubens V. **RPM 41** *Números Perfeitos, Amigos Sociáveis.* Belém, PA.

[4] Guelli, O **RPM 18** *Números Amigos.* São Paulo, SP.

[5] HEFEZ, A. *Aritmética.* Sociedade Brasileira de Matemática, 2017.

[6] Magrini, Luciano A. **RPM 78** *Sobre Números Perfeitos.* UNESP-Rio Claro, SP.

[7] RIBEIRO, H. S; TÁBOAS, C. M. G. **RPM 06 - Sobre critério de divisibilidade.** São Carlos, SP.