Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática

https://doi.org/10.34179/revisem.v7i1.15768

MODELAGEM MATEMÁTICA NA PRODUÇÃO DE REDES DE DORMIR

Mateus Alves de Oliveira
Universidade Estadual da Paraíba
mateus.alves@aluno.uepb.edu.br
Sally Andria
Universidade Estadual da Paraíba
sally.andrya@gmail.com

Resumo

A Modelagem Matemática nos permite modelar situações decorrentes da necessidade de compreender e resolver problemas do cotidiano, utilizando problemas inteiramente matemáticos. O presente trabalho tem como objetivo utilizar a modelagem matemática para resolver o problema da produção de redes de dormir mescladas, produzidas por uma nova máquina de tear duplo existente na industria têxtil de produção de redes. As redes mescladas são consideradas perdas, pois dificilmente se consegue vendê-las, e assim precisam ser transformadas em tapetes. A questão ao se utilizar este tear é que a única unidade de medida para calcular a quantidade de fio que é colocada em cada carretel, é o número de voltas que o carretel dará enquanto o fio é enrolado. Neste sentido, utilizamos a modelagem matemática para encontrar equações que fornecem o número de voltas necessárias, em cada carretel, para que se produza uma certa quantidade de redes no tear duplo.

Palavras-chave: Modelagem Matemática, Produção de Redes de Dormir, Tear Duplo.

Abstract

Mathematical Modeling allows us to model situations, arising from the necessity in to understand and solve daily problems. This work has the goal to apply Mathematical Modeling, to solve the problem concerning in the productions of dapple hammocks, produced by a new double-loom machine existing in the textile hammocks production industry. The dapple hammocks are considered wasted, since they are unlikely to be sold, and must be transformed into carpets. The question on using this double-loom machine, is that the only way to compute how many thread will be putted in the spool, is the number of turns that the spool will give while the thread is being puted. In this sense, we applied Mathematical Modeling to find equations which provide the exact number of turns, in each spool, to produce a certain amount of hammocks in this double-loom machine.

Keywords: Mathematical Modeling, Production of hammocks, double-loom machine.

1 Introdução

A modelagem matemática pode surgir em qualquer lugar, sempre da necessidade do homem em compreender e resolver problemas reais. Estuda a simulação de sistemas reais buscando prever o comportamento destes, sendo empregada em diversos campos de estudo, tais como física, química, biologia, economia, engenharias, além da própria matemática, [1], [3] [4], [5],[6], [7], [8]. Consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real. A compreensão de Modelagem é apresentada em termos do processo de construção do modelo matemático, traduzido em esquemas explicativos, um modelo matemático é quase sempre um sistema de equações ou inequações algébricas, diferenciais, integrais, etc., obtido através de relações estabelecidas entre as variáveis consideradas essenciais ao fenômeno estudado. Recomendamos [2] para uma introdução ao estudo da modelagem matemática.

O problema ao qual foi aplicada a modelagem matemática se deu em uma das etapas da produção de tecidos para redes de dormir nas indústrias têxteis, localizadas na cidade de São Bento na Paraíba. A cidade é um polo industrial têxtil, sendo conhecida como a capital mundial das redes, produzindo cerca de 12 milhões de redes por ano. Em [10] pode-se encontrar um pouco da história dessas indústrias.

Até então, as fábricas existentes na cidade possuíam apenas máquinas que produziam redes feitas com fios de algodão, e que teciam um pano de rede por vez. Em 2020 Surgiu um tear mecânico capaz de produzir dois tecidos de rede por vez e esta rede tem como matéria prima o nylon. As redes de nylon tem sido muito procuradas pois elas são apropriadas para um descanso após um banho de piscina, de rio ou de mar, uma vez que o nylon não tem aderência a líquidos, sua higienização e durabilidade são maiores que as redes de algodão, portanto, estas redes são muito bem aplicadas em hotéis, pousadas, bares e restaurante à beira mar ou rio.

O processo de produção de uma rede de dormir tem basicamente 3 etapas:

- Urdidura: preparação do(s) carretel(éis) com os fios nas cores desejadas;
- Tecelagem: produção do pano da rede;
- Acabamento: execução dos detalhes finais que compõem a rede como costuras, franjas/varandas, punhos/argolas e acabamento, variando dependendo do modelo da rede.

A etapa da urdidura deste novo tear é realizada por meio mecânico, e a máquina que realiza esse processo possui uma única unidade de medida para saber a quantidade de fio que será colocado em cada carretel, que é o número de voltas que o carretel dará durante o processo. Foi aqui onde a modelagem matemática foi aplicada, pois como as voltas nem sempre possuem os mesmos tamanhos foi necessário relacionar o número de voltas com a quantidade de fio que é colocado nos carretéis.

Após a modelagem do problema, foi desenvolvida uma fórmula que relaciona o número de panos P produzidas pelo tear duplo, com a quantidade de voltas necessárias nos carretéis dianteiros e nos carretéis traseiros, respectivamente, para produzi-las:

$$v_f(P) = \sqrt{\frac{459048,25P}{4\pi} + 3.285.156,25} - 1812,5 \tag{1.1}$$

$$v_t(P) = \sqrt{\frac{663642P}{9,47\pi} + 3612774,53} - 1900,73 \tag{1.2}$$

O artigo está dividido da seguinte forma: na Seção 2 explicamos com mais detalhes o funcionamento da máquina de tear e qual o real problema na produção das redes; na Seção 3 mostramos a solução para o problema do tear duplo, na Seção 4 aplicamos as equações encontradas na seção 3 em alguns problemas e encontramos uma solução geral para saber qual é a quantidade mínima de trocas de carretéis necessárias para produzir uma certa quantidade de redes; na Seção 5 explicitamos a eficácia da modelagem feita.

2 O problema da máquina de tear duplo

Este tear duplo utiliza 12 carretéis ao todo, sendo 6 carretéis a frente da máquina e 6 carretéis atrás (ver Figura 1). A trama do tecido é diferente do tear de redes de algodão, e percebeu-se que para produzir um pano nesta máquina, se utiliza mais fio de nylon dos carretéis da frente do que dos carretéis de trás. Logo, não seria possível colocar a mesma quantidade de fio de nylon em todos os carretéis, pois os da frente acabariam primeiro e seriam trocados por carretéis de cores diferentes, em seguida produzindo panos mesclados. Estes tecidos mesclados não são a preferência dos clientes, e a fábrica obtinha prejuízos.

Observe que o problema não era tão simples de ser resolvido. Não seria viável ter mais carretéis da mesma cor dos panos que estavam sendo tecidos no momento, pois desta forma a produção de redes não seria variada. Além do fato da troca de carretéis ser um processo trabalhoso realizado por no mínimo 4 pessoas, pois a cada troca é necessário amarrar fio a fio. Cada carretel dianteiro (respectivamente, traseiro) possui de 180 fios (respectivamente, 170) organizados e enrolados de tal maneira que cada fio fica sobreposto sobre si mesmo (veja a Figura 2). Ou seja, a cada troca de carretéis é necessário amarrar mais de 1000 fios, assim a troca de carretéis leva um tempo considerável, e o adequado é fazer o mínimo de trocas possível. O ideal é ajustar os carretéis dianteiros e traseiros com a quantidade necessária de fio de nylon para que todos os carretéis finalizem juntos.

Figura 1: Tear duplo.

Figura 2: Processo de urdidura.

A quantidade de fio colocada nos carretéis da frente foi fixada como sendo a maior possível (2900 voltas de fio de nylon em torno do eixo central) e desejava-se encontrar a quantidade de fios nos carretéis traseiros para que todos os carretéis acabassem ao mesmo tempo. O tecedor decidiu colocar quantidades aleatórias de fio nos carretéis, mas isto não funcionou, pois a cada troca de carretéis a quantidade de redes mescladas que o tear tecia era cada vez maior.

Analisando a produção da máquina durante 4 trocas de cores de carretéis, construímos a tabela 2, detalhando a quantidade de panos tecidos e se a cor era a desejada ou mesclada.

Pela tabela 2, analisando a última coluna, percebe-se que dentre os 1294 panos produzidos, 336 são mesclados o que equivale a 25,96% da produção em questão. Além disso, a quantidade de panos mesclados estava crescendo a cada troca de carretéis.

Analisando os momentos seguintes, temos:

- No momento 5: os carretéis da frente tinham nylon suficiente para ser tecido 518 panos de rede da cor 3, mas os carretéis de trás tinham nylon suficiente para serem tecidos apenas 258 panos de rede da cor 3.

Momento	**Quantidade de panos que podem ser tecidos com os carretéis dianteiros**	**Quantidade de panos que podem ser tecidos com os carretéis traseiros**	**Total de panos tecidos**
1	cor 1 - 518(2900 voltas)	cor 1 - 384	384 de cor 1
2	cor 1 - 134	cor 2 - 450(1800 voltas)	134 mesclados
3	cor 2 - 518(2900 voltas)	cor 2 - 316	316 de cor 2
4	cor 2 - 202	cor 3 - 460(1850 voltas)	202 mesclados
5	cor 3 - 518(2900 voltas)	cor 3 - 258	258 de cor 3
6	cor 3 260	cor 4 - Quantidade de voltas a decidir	-

Tabela 1: Produção de panos entre 4 trocas de carretéis.

- No momento 6: Após os 258 panos de cor 3 serem tecidos, o nylon dos carretéis de trás acabou, porém ainda resta nylon suficiente nos carretéis da frente para que seja tecido 260 panos de rede da cor 3.

É fácil notar que serão tecidos 260 panos de rede mesclado, uma vez que resta nylon da cor 3 no carretel dianteiro e serão colocados carretéis da cor 4 atrás do tear. Para que nesta troca os carretéis finalizem juntos, é necessário colocar nos carretéis de trás a quantidade de nylon para serem tecidos 778 panos (a soma dos 260 panos mesclados com os 518 panos da cor 4). Ainda será preciso saber quantas voltas de fio de nylon são necessárias para que os carretéis traseiros sejam capazes de tecer 518 redes. E a partir daí, todas as trocas dos carretéis, com suas devidas quantidades de nylon, deverão acabar juntas (veja a tabela 2).

Momento	**Quantidade de panos que podem ser tecidos com os carretéis dianteiros**	**Quantidade de panos que podem ser tecidos com os carretéis traseiros**	**Total de panos tecidos**
7	cor 3 - 260	cor 4 - 778	260 mesclados
8	cor 4 - 518	cor 4 - 518	518 de cor 4
9	cor 5 - 518	cor 5 - 518	518 de cor 5

Tabela 2: Próximas trocas de carretéis do tear desejadas.

3 Resolvendo o problema

Antes de iniciar a solução do problema, é preciso deixar claro que as contas precisam ser feitas separadamente para os carretéis dianteiros e para os carretéis de trás, pois, apesar de possuírem o mesmo tamanho, nos carretéis dianteiros são colocados 180 fios de nylon enquanto que nos carretéis de trás são colocados em média 170 fios. Além disso, para que os cálculos sejam precisos, é necessário que a máquina que faz a urdidura esteja completamente regulada.

Veja alguns pontos importantes:

I. O pano tem 300 centímetros de comprimento, e o tecido é feito em zigue-zague. É necessário descobrir quantos centímetros de nylon em cada carretel é necessário para tecer um pano.

II. Quanto às medidas do carretel, veja a figura 3. O raio (segmento vermelho) é 27 cm, porém 10 cm constituem a parte interna (segmento verde) e o fio é colocado nos 17 cm restantes (segmento amarelo).

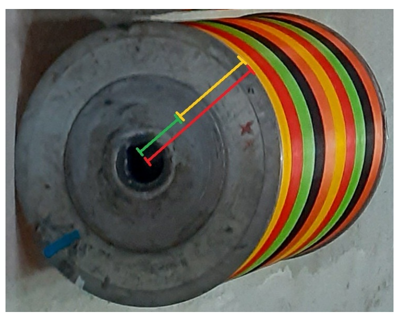

Figura 3: Carretel com medidas destacadas.

III. O número de voltas de fio de nylon nos carretéis dianteiros é fixo e igual a 2900 voltas. Quanto aos carretéis de trás, é possível ser colocado no máximo 3040 voltas, ocupando 16 cm dos 17 cm disponíveis.

IV. Como a máquina tece dois panos por vez, vamos considerar metade da produção para podermos encontrar os comprimentos de nylon desejados em cada carretel. Assim, analisando a metade da produção da máquina, percebemos que os carretéis da frente (com 2900 voltas preenchendo 16cm do raio) produzem 259 panos e os carretéis de trás (com 1800 voltas preenchendo 9.47cm do raio) produzem 226 panos.

V. Em nossos cálculos iremos desprezar a espessura do fio de nylon, pois no momento em que a máquina de urdidura enrola os fios nos carretéis há uma variação desta espessura. Além disso, por se tratar de um valor muito pequeno, isso não fará muita diferença no resultado final.

Para chegar na solução do problema faremos o seguinte caminho:

(i) Vamos encontrar a quantidade de fio nos carretéis para produzir um pano.
(ii) Encontrar o comprimento do nylon em função do raio preenchido do carretel.
(iii) Escrever o comprimento do nylon em função do número de voltas.
(iv) Encontrar uma função que fornece o número de voltas de fio de nylon em função da quantidade de panos desejada.

Passo 1

Para encontrar a quantidade de fio necessária para produzir um pano, utilizaremos os dados nos itens **II** e **IV**. Comecemos pelos carretéis da frente.

A ideia que seguiremos é encontrar o valor do comprimento de cada uma das 2900 voltas colocadas no carretel dianteiro, somá-las e dividir pela quantidade de panos produzidos. Mais precisamente, dos 27cm de raio do carretel, vimos no item **II** que apenas 16cm correspondem a parte que pode ser preenchida com nylon; dividiremos esses 16cm em n partes iguais gerando a sequência[1] de raios:

$$R_0 = 10\text{cm},\ R_1 = 10 + \frac{16}{n}\text{cm},\ R_2 = 10 + 2\frac{16}{n}\text{cm},\ \dots,\ R_n = 10 + n\frac{16}{n} = 26cm.$$

Desta maneira, obtemos $\frac{2900}{n}$ voltas entre cada intervalo $[R_i, R_{i+1}]$, $i = 0, \dots, n$ de comprimento $\frac{16}{n}$cm.

Logo o comprimento C_f total do nylon no carretel da frente será dado por:

$$C_f = \frac{2900}{n} \sum_{k=1}^{n} 2\pi \cdot R_k$$
$$C_f = \frac{2900}{n} \cdot 2\pi \sum_{k=1}^{n} \left(10 + \frac{16k}{n}\right) \tag{3.1}$$

Note que o último somatório é a soma dos n termos da P.A. formada pelos raios R_k. $10 + \frac{16k}{n}$ é o k-ésimo termo da P.A. cuja razão é $\frac{16}{n}$ e cujo primeiro termo é $10 + \frac{16}{n}$. Portanto esta é a soma dos n primeiros termos da P.A. Sendo assim, como o n-ésimo termo é $10 + n \cdot \frac{16}{n} = 26$ temos:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(10 + \frac{16k}{n}\right) = \frac{\left(10 + \frac{16}{n} + 26\right)}{2} \cdot n = \frac{(36n + 16)}{2} \tag{3.2}$$

[1] A partição do raio nos dá uma sequência que é uma P.A. com razão $\frac{16}{n}$ e termo inicial $R_0 = 10$.

Substituindo o valor da soma (3.2) em (3.1), o comprimento total do nylon nos carretéis dianteiros preenchidos com 2900 voltas e ocupando o espaço de 16cm é

$$\begin{aligned} C_f &\approx \frac{2900}{n} \cdot 2\pi \cdot \frac{(36 \cdot n + 16)}{2} \\ C_f &\approx 2900\pi \cdot \frac{(36 \cdot n + 16)}{n} \\ C_f &\approx 2900\pi \left(36 + \frac{16}{n}\right) \end{aligned}$$

Observe que quanto maior o n maior será a aproximação. Então, para ter a aproximação mais precisa, fazemos $n \to \infty$ e obtemos o seguinte valor para o comprimento C_f:

$$\begin{aligned} C_f &\approx 2900\pi \lim_{n \to +\infty} \left(36 + \frac{16}{n}\right) \\ &= 2900\pi \cdot \left(\lim_{n \to +\infty} 36 + \lim_{n \to +\infty} \frac{16}{n}\right) \\ &= 2900\pi \cdot (36 + 0) \\ &= 104400\pi \\ \therefore\ C_f &\approx 327982\text{cm} \end{aligned}$$

Em conclusão, o carretel dianteiro com 2900 voltas contém 327982cm de fio e produz 259 panos. Portanto são necessários $\frac{327982}{259} = 1266,34$cm de nylon em cada carretel dianteiro para tecer um pano.

Analogamente, para os carretéis traseiros divide-se os $9,47$cm em n partes iguais, e cada parte de raio $R_k = 10 + k \cdot \frac{9,47}{n}$, $k = 1, \ldots, n$ irá conter $\frac{1800}{n}$ voltas.Logo comprimento total do nylon é aproximadamente

$$\begin{aligned} C_t &\approx \frac{1800}{n} \sum_{k=1}^{n} 2\pi \cdot R_k \\ &= \frac{1800}{n} \cdot 2\pi \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(10 + \frac{9,47k}{n}\right) \end{aligned} \tag{3.3}$$

Novamente temos a soma dos n primeiros termos da P.A. cuja razão é $\frac{9,47}{n}$ e o primeiro termo é $10 + \frac{9,47}{n}$. Como o n-ésimo termo da P.A é $19,47cm$ temos

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left(10 + \frac{9,47 \cdot k}{n}\right) &= \frac{\left(10 + \frac{9,47}{n} + 19,47\right)}{2} \cdot n \\ &= \frac{(29,47n + 9,47)}{2}\end{aligned}$$

Substituindo o valor da soma na equação (3.3) obtemos:

$$\begin{aligned}C_t &= \frac{1800}{n} \cdot 2\pi \cdot \frac{(29,47n + 9,47)}{2} \\ C_t &= 1800 \cdot \pi \cdot \frac{(29,47 \cdot n + 9,47)}{n}\end{aligned}$$

Novamente, precisamos tomar o limite quando $n \to \infty$ para encontrarmos a aproximação mais precisa possível.

$$\begin{aligned}C &\approx \lim_{n\to+\infty} 1800\pi \cdot \frac{(99,47n + 9,47)}{n} \\ &= 1800\pi \cdot \lim_{n\to+\infty}\left(29,47 + \frac{9,47}{n}\right) \\ &= 1800\pi \cdot \left(\lim_{n\to+\infty} 29,47 + \lim_{n\to+\infty}\frac{9,47}{n}\right) \\ &= 1800\pi \cdot (29,47 + 0) \\ &= 53046\pi \\ \therefore\ C &\approx 166648,92cm\end{aligned}$$

Deste modo, o carretel traseiro com 1800 voltas tem 166648,92cm e faz 226 panos, portanto são necessários $\frac{166648,92}{226} = 737,38$cm de nylon em cada carretel traseiros para tecer um pano.

Passo 2

Queremos encontrar a quantidade de fio necessária para preencher apenas uma parte do carretel. Para isto, fixamos um número $c \in \mathbb{R}$ tal que $0 < c \leq 16$, e observamos que é possível encontrar o número de voltas necessárias para preencher o carretel até c centímetros através de uma regra de três simples.

Para os carretéis dianteiros:

$$\frac{2900 \text{ voltas}}{v \text{ voltas}} = \frac{16 \text{ cm}}{c \text{ cm}} \to v = \frac{2900c}{16} = \frac{725c}{4} \tag{3.4}$$

Para os carretéis traseiros:

$$\frac{1800 \text{ voltas}}{v \text{ voltas}} = \frac{9,47\text{cm}}{c \text{ cm}} \to v = \frac{1800c}{9,47} \tag{3.5}$$

Para os carretéis dianteiros dividimos os c centímetros em n partes iguais, e cada parte de raio $R_k = 10 + k\frac{c}{n}$, para $k = 1, \ldots, n$, conterá $\frac{\frac{725c}{4}}{n}$ voltas. Logo o comprimento do nylon será aproximadamente de

$$\begin{aligned} C_f &= \frac{\frac{725c}{4}}{n} \sum_{k=1}^{n} 2\pi \cdot R_k \\ &= \frac{\frac{725c}{4}}{n} \cdot 2\pi \sum_{k=1}^{n} \left(10 + \frac{kc}{n}\right) \\ &= \frac{\frac{725c}{4}}{n} \cdot 2\pi \cdot \left(\frac{(10 + \frac{c}{n} + 10 + c)}{2} \cdot n\right) \\ &= \frac{725\pi c}{4} \cdot \left(20 + c + \frac{c}{n}\right) \end{aligned}$$

Para ter uma aproximação mais precisa, tomamos $n \to \infty$

$$\begin{aligned} C_f &= \lim_{n \to +\infty} \frac{725c}{4} \cdot \pi \cdot \left(20 + c + \frac{c}{n}\right) \\ &= \frac{725\pi c}{4} \cdot (20 + c) \end{aligned} \tag{3.6}$$

Para os carretéis traseiros dividimos os c centímetros em n partes iguais, e cada parte de raio $R_k = 10 + k\frac{c}{n}$, para $k = 1, \ldots, n$, conterá $\frac{\frac{1800c}{9,47}}{n}$ voltas. Logo o comprimento do nylon será aproximadamente de

$$
\begin{aligned}
C_t &= \frac{\frac{1800c}{9{,}47}}{n} \sum_{k=1}^{n} 2\pi \cdot R_k \\
&= \frac{\frac{1800c}{9{,}47}}{n} \cdot 2\pi \sum_{k=1}^{n} \left(10 + \frac{kc}{n}\right) \\
&= \frac{\frac{1800c}{9{,}47}}{n} \cdot 2\pi \cdot \left(\frac{(10 + \frac{c}{n} + 10 + c)}{2} \cdot n\right) \\
&= \frac{1800\pi c}{9,47} \cdot \left(20 + c + \frac{c}{n}\right)
\end{aligned}
$$

Para ter uma aproximação mais precisa, fazemos $n \to \infty$

$$
\begin{aligned}
C_t &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1800c}{9,47} \cdot \pi \cdot \left(20 + c + \frac{c}{n}\right) \\
&= \frac{1800\pi c}{9,47} \cdot (20 + c)
\end{aligned} \tag{3.7}
$$

Passo 3

Agora queremos escrever o comprimento do nylon em função do número de voltas. Para isto, vamos utilizar as relações 3.4 e 3.5, isto é

$$
c = \frac{4v}{725} \qquad \text{e} \qquad c = \frac{9,47v}{1800}
$$

Substituindo nas equações dos comprimentos 3.6 e 3.7 obtemos:
Para os carretéis dianteiros

$$
\begin{aligned}
C_f(v) &= \frac{725\pi c}{4} \cdot (20 + c) \\
&= \frac{725\pi}{4} \cdot \frac{4v}{725} \left(20 + \frac{4v}{725}\right) \\
&= \pi v \cdot \left(20 + \frac{4v}{725}\right)
\end{aligned} \tag{3.8}
$$

Para os carretéis traseiros

$$\begin{aligned} C_t(v) &= \frac{1800\pi c}{9,47} \cdot (20 + c) \\ &= \frac{1800\pi}{9,47} \cdot \frac{9,47v}{1800} \left(20 + \frac{9,47v}{1800}\right) \\ &= \pi v \cdot \left(20 + \frac{9,47v}{1800}\right) \end{aligned} \tag{3.9}$$

Passo 4

Para concluir a solução do problema, só precisamos encontrar a função inversa de C_f e C_t. Observe que isto é possível, uma vez que essas funções são bijeções do conjunto do número de voltas $n \in \mathbb{N}$ no conjunto de comprimentos $C \in \mathbb{R}$.

Para os carretéis da frente, a função é dada por

$$C_f(v) = 20\pi \cdot v + \frac{4\pi}{725} \cdot v^2$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{725}{4\pi} C_f &= \frac{14500}{4} \cdot v + v^2 \\ &= 3625v + v^2 \end{aligned}$$

Completando quadrado, concluímos que

$$\frac{725}{4\pi} C_f = \left(v + \frac{3625}{2}\right)^2 - \left(\frac{3625}{2}\right)^2$$

E portanto a função inversa de C_f é

$$\begin{aligned} v_f(C) &= \sqrt{\frac{725C}{4\pi} + \left(\frac{3625}{2}\right)^2} - \frac{3625}{2} \\ &= \sqrt{\frac{725C}{4\pi} + 3.285.156,25} - 1812,5 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Para os carretéis traseiros temos que

$$C_t(v) = 20\pi \cdot v + \frac{9,47\pi}{1800} \cdot v^2$$

Logo,

$$\frac{1800}{9,47\pi}C_t = \frac{36000}{9,47} \cdot v + v^2$$

Completando quadrado obtemos,

$$\frac{1800}{9,47\pi}C_t = \left(v + \frac{18000}{9,47}\right)^2 - \left(\frac{18000}{9,47}\right)^2$$

Neste caso, a função inversa de C_t é

$$\begin{aligned} v_t(C) &= \sqrt{\frac{1800 \cdot C}{9,47\pi} + \left(\frac{18000}{9,47}\right)^2} - \frac{18000}{9,47} \\ &= \sqrt{\frac{1800 \cdot C}{9,47\pi} + 3612774,53} - 1900,73 \end{aligned} \tag{3.11}$$

As fórmulas 3.10 e 3.11 são suficientes para solucionar nosso problema. Porém, para aplicá-las precisamos sempre encontrar o quanto de fio será necessário para tecer a quantidade de redes desejada. Se conseguíssemos escrever estas equações em termo da quantidade de redes que será produzida, elas ficariam muito mais simples de serem usadas. Mas isto não é difícil de fazer, basta utilizar a seguinte relação entre o número P de redes produzidas pela máquina e o comprimento de fio colocados nos carretéis:

$$P = \frac{2C_f}{1266,34} \qquad \text{e} \qquad P = \frac{2C_t}{737,38} \tag{3.12}$$

onde o fator 2 é inserido, uma vez que a máquina de tear produz o dobro de panos. Ou seja,

$$C_f = \frac{1266,34P}{2} = 633,17P \qquad \text{e} \qquad C_t = \frac{737,38P}{2} = 368,69P$$

Substituindo nas equações 3.10 e 3.11, obtemos

$$\begin{aligned} v_f(P) &= \sqrt{\frac{725 \cdot 633,17P}{4\pi} + 3.285.156,25} - 1812,5 \\ &= \sqrt{\frac{459048,25P}{4\pi} + 3.285.156,25} - 1812,5 \end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned} v_t(P) &= \sqrt{\frac{1800 \cdot 368,69P}{9,47\pi} + 3612774,53} - 1900,73 \\ &= \sqrt{\frac{663642P}{9,47\pi} + 3612774,53} - 1900,73 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Solução do problema da máquina de tear duplo observada

Agora que sabemos calcular a quantidade necessária de fio para tecer o número de panos que desejarmos, vamos resolver o problema da produção dos 778 panos com os carretéis de trás. Com isto, na troca seguinte, todos os carretéis irão começar juntos uma produção sem panos mesclados.

Para isto, basta substituir $P = 778$ na equação (3.14)

$$\begin{aligned} v_t(778) &= \sqrt{\frac{663642 \cdot 778}{9,47\pi} + 3612774,53} - 1900,73 \\ &\approx 2678,28 \end{aligned}$$

Assim, será preciso 2679 voltas nos carretéis traseiros.

Para reiniciar a produção, agora sem produzir panos mesclados, vamos calcular o comprimento de fio necessário para tecer 518 panos com os carretéis traseiros, já que este é o número máximo de panos produzido com 2900 voltas nos carretéis dianteiros. Para isto basta substituir $P = 518$ na equação (3.14)

$$\begin{aligned} v_t(518) &= \sqrt{\frac{663642 \cdot 518}{9,47\pi} + 3612774,53} - 1900,73 \\ &\approx 1993,83 \end{aligned}$$

Logo, para serem produzidos 518 panos, é necessário que sejam colocadas 1994 voltas nos carretéis traseiros.

Com isso, sempre que se quiser usufruir da produção máxima da máquina sem que haja troca de carretéis, é preciso colocar 2900 voltas nos carretéis da frente e 1994 voltas nos carretéis de trás, o que produzirá 518 redes.

4 Aplicações

Na seção anterior, utilizamos as fórmulas encontradas para solucionar o problema específico da máquina observada. Nesta seção vamos exibir mais alguns exemplos de como aplicar as fórmulas.

Exemplo 4.1. Suponha que uma certa fábrica recebeu uma encomenda de 400 redes da mesma cor. Qual a melhor forma de produção de modo que haja a menor quantidade de trocas de carretéis?

Neste caso, como a quantidade de redes desejada é menor que a quantidade máxima de redes que podem ser produzidas sem que haja troca de carretéis (que no caso é 518), basta utilizar as equações 1.1 e 1.2 para encontrar o número de voltas necessário em cada carretel para produzir 400 redes.

$$\begin{aligned} v_f(400) &= \sqrt{\frac{459048,25 \cdot 400}{4\pi} + 3.285.156,25} - 1812,5 \\ &\approx 2417,99 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_t(400) &= \sqrt{\frac{663642 \cdot 400}{9,47\pi} + 3612774,53} - 1900,73 \\ &\approx 1639,81 \end{aligned}$$

Ou seja, para produzir 400 redes, precisa-se colocar 2418 voltas nos carretéis dianteiros e 1640 voltas nos carretéis traseiros.

Exemplo 4.2. Suponha que um certa fábrica recebeu uma encomenda de 900 redes da mesma cor. Qual a melhor forma de produção de modo que haja a menor quantidade de trocas de carretéis?

Observe que neste caso não será possível produzir todas as redes sem que haja troca de carretéis, uma vez que a quantidade máxima produzida sem troca é 518.

Para resolver esse problema, vamos primeiro encontrar o número de voltas necessárias para os carretéis traseiros. Para isso, basta usar a equação 3.14

$$\begin{aligned} v_t(900) &= \sqrt{\frac{663642 \cdot 900}{9,47\pi} + 3612774,53} - 1900,73 \\ &\approx 2966,37 \end{aligned}$$

Ou seja, seriam necessárias 2967 voltas nos carretéis de trás. Porém, como observado no início da **Seção** 3, os carretéis de trás suportam até 3040 voltas, neste caso é possível tecer as 900 redes sem que haja troca dos carretéis de trás.

Para os carretéis dianteiros já sabemos que será preciso realizar ao menos uma troca. Neste caso, a solução é usar os carretéis da frente em capacidade máxima, ou seja com 2900 voltas (o que irá produzir 518 redes), e depois trocar os carretéis por carretéis que estejam com fio suficiente para produzir 382 redes. Deste modo, basta usar a equação 3.14 para encontrar esse número de voltas.

$$\begin{aligned} v_f(318) &= \sqrt{\frac{459048,25 \cdot 318}{4\pi} + 3.285.156,25} - 1812,5 \\ &\approx 2047,76 \end{aligned}$$

Dessa maneira para produzir 900 redes é necessário que sejam colocadas 2967 voltas de fio de nylon nos carretéis de trás, e nos carretéis da frente, será preciso fazer uma troca de modo que um grupo de carretéis vai conter 2900 voltas e o outro grupo de carretéis vai conter 2048 voltas.

Observação 4.3. Note que para resolver o problema anterior, não podemos simplesmente fazer $P = 900$ em 1.1 para encontrar o número de voltas necessárias para produzir 900 redes, e depois subtrair 2900 (que é a quantidade necessária para produzir 518 redes). Se fizéssemos isso o que encontraríamos era o seguinte

$$\begin{aligned} v_f(900) &= \sqrt{\frac{459048,25 \cdot 900}{4\pi} + 3.285.156,25} - 1812,5 \\ &\approx 4201,24 \end{aligned}$$

Ou seja, seriam necessárias 4202 voltas nos carretéis dianteiros para produzir 900 redes. Neste caso, como os primeiros carretéis possuiriam 2900 voltas, os próximos carretéis possuiriam apenas 1302 voltas. Agora, pela equação 3.8 temos que o comprimento total de nylon em cada carretel dianteiro, contendo 1302 voltas, é de

$$\begin{aligned} C_f(1302) &= 20\pi \cdot 1302 + \frac{4\pi}{725} \cdot (1302)^2 \\ &\approx 111190 \text{ cm} \end{aligned}$$

Com essa quantidade de fio podemos usar a equação 3.12 para encontrar a quantidade de redes que serão produzidas

$$P = \frac{2 \cdot 111190}{1266,34} \approx 175,6$$

Mas essa quantidade não é suficiente, pois precisariam ser produzidas 318 redes.

Todo esse problema se dá pelo fato das voltas nos carretéis possuírem tamanhos diferentes. Quando fazemos a conta para $v_f(900)$ o que encontramos é número de voltas para se colocar em um mesmo carretel, e neste caso as 1302 voltas finais teriam tamanhos muito maiores. Porém isso não é possível, uma vez que a capacidade máxima dos carretéis da frente é 2900 voltas.

Exemplo 4.4. Qual a maior quantidade de redes da mesma cor que podem ser produzidas com apenas uma troca de carretéis dianteiros?

Pelo exemplo anterior, sabemos que esse número é no mínimo 900. Por outro lado, como a maior quantidade de redes produzidas pelos carretéis dianteiros, com apenas uma troca, é 1036, temos que o valor é no máximo 1036. Para resolver este problema, precisamos então calcular a quantidade de redes produzidas pelos carretéis traseiros em capacidade máxima (3040 voltas). Se esse valor for menor que 1036, ele será a resposta do problema. Caso contrário, a resposta é 1036.

Para encontrar o número de redes produzidas com os carretéis traseiros preenchidos com 3040 voltas, primeiro vamos utilizar a equação 3.9 para encontrar a quantidade de fio de nylon nos carretéis

$$\begin{aligned} C_t(3040) &= 20\pi \cdot 3040 + \frac{9,47\pi}{1800} \cdot (3040)^2 \\ &\approx 343756,47 \text{ cm} \end{aligned}$$

Agora basta aplicar esse valor na fórmula do número de panos produzidos 3.12

$$P = \frac{2 \cdot 343756,47}{737,38} \approx 932,37.$$

Como a máquina, com os carretéis traseiros em sua capacidade máxima, fabrica 932 redes (que é menor que 1036), concluímos que a quantidade máxima de redes produzidas com apenas uma troca de carretéis é 932 redes.

Observação 4.5. Utilizando a última aplicação, podemos resolver qualquer problema do tipo: "Encontrar a melhor forma de produzir uma quantidade K de redes realizando a quantidade mínima de trocas de carretéis possível". Utilizando o algoritmo da divisão dos inteiros [9, Pág. 5] temos

$$K = q_f \cdot 518 + r_f, \text{ com } 0 \leq r_f < 518,$$

$$K = q_t \cdot 932 + r_t, \text{ com } 0 \leq r_t < 932,$$

para $q_f, q_f, r_f, r_t \in \mathbb{Z}$. Encontrando estes valores, temos a resposta. Pois estas equações nos dizem que para produzir K redes, é preciso utilizar a máquina q_f vezes em capacidade máxima dos carretéis dianteiros (2900 voltas) mais outra vez com os carretéis dianteiros preenchidos com fio suficiente para produzir r_f redes. Com relação aos carretéis de trás, a máquina precisa ser utilizada q_t vezes com os carretéis traseiros em capacidade máxima (3040 voltas) mais uma outra vez com os carretéis traseiros preenchidos com fio suficiente para produzir r_t redes. Neste caso, a quantidade mínima de trocas será $q_f + q_t$.

5 Conclusão

No início da **Seção** 3 ressaltamos que todos os cálculos seriam feitos supondo que a máquina de urdidura estaria completamente regulada. Porém, além da máquina se desregular com o tempo, também há pequenas variações que alteram a produção. O nylon que é colocado nos carretéis através da máquina de urdidura, às vezes fica um pouco mais apertado ou um pouco mais folgado, alterando o número de voltas por centímetro. Mesmo com essas variações, a quantidade de redes fabricadas é bem próxima da quantidade esperada. A tabela 5 a seguir ilustra quatro momentos onde a quantidade de redes produzidas foi diferente da esperada.

Quantidade de voltas	**Quantidade desejada de panos tecidos**	**Quatindade real de panos tecidos**	**Diferença**
2112	560	558	-2
2084	550	552	+2
2039	534	528	-6
1941	500	502	+2

Tabela 3: Aplicação da fórmula na prática

Quando ocorrem essas variações, recomenda-se que na próxima troca dos carretéis traseiros sejam colocados um pouco mais/menos de fio de modo a compensar a quantidade de fio que sobrou/faltou nos carretéis dianteiros. Isso ajudará a não desperdiçar fio e produzir a menor quantidade possível de redes mescladas.

Agradecimentos Agradecemos as ricas contribuições do professor Ageu Freire e as sugestões dos professores Marciel Medeiros e José Elias.

Referências

[1] BARBOSA, J. C. *Modelagem na Educação Matemática: contribuições para debate teórico/In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED*, Rio de Janeiro, 24, 2001.

[2] Bertone, A. M. A.; Bassanezi, R. C.; Jafelice, R. S. da M. *Modelagem Matemática* .Uberlândia, MG : UFU, 2014,187 p.

[3] BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática, Contexto*, São Paulo, 2002.

[4] BIEMBENGUT, M. S. *30 Anos de Modelagem Matemática na Educação Brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais.* **ALEXANDRIA-Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v.2, n.2, p.7-32, jul. 2009

[5] BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. *Modelagem matemática no ensino*, São Paulo, Terceira Edicão, Editora Contexto, 2003.

[6] CAVALCANTI, R. N. it Extração de antocianinas de resíduo de jabuticaba (Myrciaria cauliflora) utilizando líquido pressurizado e fluido supercrítico: caracterização química, avaliação econômica e modelagem matemática. 2013. 197 p. Tese (doutorado), Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia de Alimentos, Campinas, SP. Disponível em: http://www.repositorio.unicamp.br/handle/REPOSIP/254864.

[7] COSTA, H. R. DA. *A Modelagem Matemática Através de Conceitos Científicos.* **Ciências e Cognição**, v. 14, n. 3, p. 114-133, 29 set. 2009.

[8] DAROIT. L.; HAETINGER. C.; DULLIUS. M. M. *O ensino de fenômenos físicos através da modelagem matemática.*

Disponível em:

www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cd_egem/fscommand/RE/RE_35.pdf.

[9] GARCIA, A. ; LEQUAIN, Y. *Elementos de Álgebra.* 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

[10] NOBRE, C. R. *Espaço, inovação e indústria têxtil de redes de dormir em São Bento-PB: do meio natural ao meio técnico-científico-informacional.* **GEOgraphia**, Vol. 16. 2014.