

UNA NOTA SOBRE EL PRE-PRINT: *ON THE GROBMAN-HARTMAN  
THEOREM IN  $\alpha$ -HÖLDER CLASS FOR BANACH SPACES*

José Vidarte

Universidade Federal de Itajubá- UNIFEI

[vidarte@unifei.edu.br](mailto:vidarte@unifei.edu.br)

Nancy Chachapoyas

Universidade Federal de Itajubá- UNIFEI

[nancy@unifei.edu.br](mailto:nancy@unifei.edu.br)

## Resumén

Un teorema bien conocido en dinámica no lineal discreta debido a Grobman [5] y Hartman [6] nos dice que un difeomorfismo de clase  $C^1$ ,  $F : E \rightarrow E$ , con  $E$  espacio de Banach y  $p$  un punto fijo hiperbólico, puede ser topológicamente conjugado para un difeomorfismo lineal  $\Lambda = DF(p)$  (en una vecindad de  $p$ ). Este trabajo tiene como objetivo llenar todos los vacíos y completar las pruebas encontradas en el pre-print de Belinskii-Rayskin [2], donde da la existencia de una conjugación Hölder continua del Teorema de Grobman-Hartman. Finalmente, daremos un ejemplo que ilustra el resultado.<sup>1</sup>

**Palabras-Claves:** Sistema dinámicos discretos, Conjugación Hölder, Linealización Hölder.

## Abstract

A well-known theorem in discrete nonlinear dynamics due to Grobman [5] and Hartman [6] tells us that a diffeomorphism of class  $C^1$ ,  $F : E \rightarrow E$ , with  $E$  Banach space and  $p$  a hyperbolic fixed point, can be topologically conjugated to a linear diffeomorphism  $\Lambda = DF(p)$  (in a neighborhood of  $p$ ). This work aims to fill in all the gaps and complete the proofs found in the pre-print [2] by Belinskii- Rayskin, that gives the existence of a conjugation Hölder continuous of the Grobman-Hartman theorem. Finally, we will give an example to illustrate the result.<sup>2</sup>

**Keywords:** Discrete dynamical systems, Hölder Conjugation, Hölder Linearization.

<sup>1</sup>Parte de este trabajo es basado en la tesis de licenciatura del primer autor. J.V [10].

<sup>2</sup>Part of this work is based on the undergraduate thesis of the first author. J.V [10].

# 1 Introducción

Un resultado conocido en sistemas dinámicos no lineales, es que, si  $E$  es un espacio de Banach,  $\Lambda : E \rightarrow E$  un operador lineal hiperbólico y  $f : E \rightarrow E$  una función acotada con constante de Lipschitz suficientemente pequeña, entonces existe un homeomorfismo  $h : E \rightarrow E$  que conjugua  $(\Lambda + f)$  y  $\Lambda$ , esto es,  $(\Lambda + f) \circ h(x) = h \circ \Lambda(x), x \in E$ . Como consecuencia de este resultado, tenemos el Teorema de Grobman-Hartman, que nos dice que si  $F$  es un difeomorfismo de clase  $C^1$  y  $p$  es un punto fijo hiperbólico de  $F$ , entonces existe una vecindad  $U, p \in U$  y un homeomorfismo  $h : U \rightarrow h(U)$  que conjugua  $F$  e  $DF(p)$ , esto es  $F \circ h(x) = h \circ (DF(p))(x), x \in U$ . Estos resultados fueron probados independientemente; para el caso de  $\mathbb{R}^n$  por Grobman [5] y Hartman [6] y para el caso general en espacios de Banach por Palis [8] y Pugh [9]. En otras palabras, el Teorema de Grobman-Hartman para difeomorfismos, nos dice que el comportamiento dinámico alrededor de un punto fijo hiperbólico es cualitativamente, al menos de homeomorfismos, el mismo que el comportamiento de su linealización cerca de este punto de equilibrio, donde la hiperbolicidad significa que ningún autovalor de la linealización tiene norma igual a uno. Por lo tanto, cuando se trata de este tipo de sistemas dinámicos se puede utilizar la linealización, que es más simple de ser tratada, para analizar su comportamiento en torno de puntos fijos hiperbólicos.

Sin embargo, si una conjugación es solo un homeomorfismo, aún puede ser bastante rústico. Por ejemplo, dos difeomorfismos lineales en  $\mathbb{R}^2$  ambos siendo contracciones hiperbólicas (autovalores con norma menor que uno), uno de los cuales es un espiral (autovalores complejos conjugados) y de otro es un nudo atractor (autovalores reales), se conjugan topológicamente. Por lo tanto, la clasificación hasta la conjugación topológica puede ser demasiado tosca para hacer correspondencias entre las dinámicas de estos difeomorfismos. Por el contrario, una conjugación diferenciable conserva gran parte de esta estructura. Una de la herramientas de dinámica no lineal alrededor de puntos fijos hiperbólicos son las conjugaciones y lo que se busca es su regularidad pero, desafortunadamente, conseguir conjugaciones diferenciables ni siempre es posible [3], pues se necesitan condiciones de no resonancia sobre los autovalores.

Una pregunta natural es, si podemos conseguir una conjugación un poco mejor que la continua sin modificar las hipótesis del Teorema de Grobman-Hartman. Respondiendo a esta pregunta, el objetivo principal de este trabajo es llenar todos los vacíos y completar las pruebas, que en su mayoría sólo están esbozadas, encontradas en el pre-print de Belinskii-Rayskin [2]. En dicho trabajo lo que se intenta probar es que si  $\Lambda$  es una aplicación lineal hiperbólica y  $f : E \rightarrow E$  una función acotada y con constante de Lipschitz suficientemente pequeña, entonces existe un homeomorfismo  $h : E \rightarrow E$ , con  $h(x) = x + \varphi(x)$ , donde  $\varphi$  es una función  $\alpha$ -Hölder que conjugua  $(\Lambda + f)$  y

$\Lambda$ , esto es,  $(\Lambda + f) \circ h(x) = h \circ \Lambda(x), x \in E$ . Como consecuencia de este resultado, tenemos la conjugación del Teorema de Grobman-Hartman  $\alpha$ -Hölder, esto es, si  $f$  es un difeomorfismo de clase  $C^1$  y  $p$  es un punto fijo hiperbólico de  $F$ , entonces existe una vecindad,  $U, p \in U$  y homeomorfismo  $\alpha$ -Hölder  $h : U \rightarrow h(U)$  que conjugua  $F$  e  $DF(p)$ , lo que significa que  $F \circ h(x) = h \circ (DF(p))(x), x \in U$ . Además, en la parte final presentamos un ejemplo de aplicación.

Finalmente, queremos destacar que una de las metas primordiales de este trabajo es que pueda ser leído y entendido tanto por estudiantes de graduación, pos-graduación e investigadores que tengan interés en esta parte de los sistemas no lineales que es la Teoría de Linealización.

## 2 Resultados Principales

En esta sección vamos a realizar el objetivo principal de este trabajo que es llenar todos los vacíos y completar la prueba de la Proposición 1 del pre-print de Belinskii-Rayskin [2, p. 4] donde se prueba la regularidad Hölder global para perturbaciones de aplicaciones lineales hiperbólicas acotadas e invertibles y la regularidad Hölder alrededor de puntos fijos hiperbólicos, esto es, vamos a probar que:

1. Si  $\Lambda$  es una aplicación lineal hiperbólica, entonces existe una única función  $\Phi(x) = x + \phi(x)$ , donde  $\phi(x)$  una función continua y acotada, además  $\alpha$ -Hölder, que conjugua  $\Lambda$  y  $(\Lambda + f)$ , donde  $f$  es una función acotada y Lipchitz con  $\|f\| \leq \delta$  y  $Lip(f) \leq \delta$  para un  $\delta$  suficientemente pequeño.
2. Si 0 es un punto fijo hiperbólico de una función  $F$  de clase  $C^1$ , entonces existe un homeomorfismo local,  $\alpha$ -Hölder,  $h : (U, 0) \rightarrow (h(U), 0)$  que conjugua  $F(z)$  y  $\Lambda = DF(0), z \in U$

Estos Teoremas mejoran las conjugaciones de los Teoremas clásicos de Grobman-Hartman [5, 6, 8, 9], que muestran que estas son simplemente continuas.

A continuación, enunciaremos los resultados a ser probados en este trabajo. Antes de eso precisamos introducir algunas notaciones.

- El conjunto  $E$  denotará un espacio de Banach.
- $L(E)$  denota el conjunto de toda las aplicaciones lineales  $T : E \rightarrow E$  acotadas.
- $GL(E)$  denota el conjunto de todos los elementos en  $L(E)$  que son invertibles.
- El conjunto  $\sigma(T)$  denota el espectro de  $T$ .

**Definición 2.1 (Isomorfismos Hiperbólicos).** Sea  $E$  un espacio de Banach. Decimos que  $A \in GL(E)$  es hiperbólico si  $\sigma(A) \cap \mathbb{S}^1 = \emptyset$ , donde  $\mathbb{S}^1 = \{z \in K : |z| = 1\}$ .

**Definición 2.2.** Sean  $E$  un espacio de Banach,  $V$  una vecindad del punto  $0 \in E$  y  $F : V \rightarrow E$  un difeomorfismo sobre su imagen. Decimos que  $z$  es un punto fijo hiperbólico de  $F$  si y solamente si:

$$F(z) = z, \quad DF(z) : E \rightarrow E \text{ es hiperbólica.}$$

Considere los espacios de Banach  $E_1$  y  $E_2$ . Ahora definamos los siguiente conjunto:

$$C_b^0(E_1, E_2) = \{v : E_1 \rightarrow E_2 \mid v \text{ es una función continua y acotada}\}.$$

En  $C_b^0(E_1, E_2)$  definimos una norma

$$\|v\| = \sup_{x \in E_1} \|v(x)\|_{E_2}, \quad \text{para } v \in C_b^0(E_1, E_2).$$

Se puede verificar que  $(C_b^0(E_1, E_2), \|\cdot\|)$  es un espacio de Banach.

Si  $E_1 = E_2 = E$  usamos la notación  $C_b^0(E) := C_b^0(E, E)$ .

Sea  $E$  un espacio de Banach. Un homeomorfismo local  $\Phi : (E, 0) \rightarrow (E, 0)$  es llamado  $\alpha$ -Hölder si

$$\|\Phi(x') - \Phi(x'')\| \leq C \|x' - x''\|^\alpha \quad \text{y} \quad \|\Phi^{-1}(x') - \Phi^{-1}(x'')\| \leq C \|x' - x''\|^\alpha,$$

en una vecindad del origen.

**Lema 2.3.** Sea  $\Lambda : E \rightarrow E$  una aplicación lineal hiperbólica. Entonces, existe una norma equivalente,  $\|\cdot\|_2$ , sobre  $E$  y una descomposición directa de  $E$  satisfaciendo

$$(1) \quad E = E_- \oplus E_+, \quad \Lambda(E_-) = E_- \quad \text{y} \quad \Lambda(E_+) = E_+.$$

(2) Sean  $\Lambda_- := \Lambda|_{E_-} : E_- \rightarrow E_-$  y  $\Lambda_+ := \Lambda|_{E_+} : E_+ \rightarrow E_+$ . Entonces se tiene que  $\Lambda_-$  es una contracción  $\|\Lambda_-\|_2 = \lambda < 1$  y  $v \in E_-$  implica  $\|\Lambda(v)\|_2 \leq \lambda \|v\|_2$ . También se tiene que  $\Lambda_+$  es una expansión  $\|\Lambda_+\|_2 = \frac{1}{\lambda} > 1$  y  $v \in E_+$  implica  $\|\Lambda(v)\|_2 \geq \frac{1}{\lambda} \|v\|_2$ .

**Demostración:** Esta prueba puede encontrarse en el artículo [8] o en el libro [7].  $\square$

Vamos a denotar por  $r(\Lambda)$  el radio espectral de la aplicación  $\Lambda$ . Además denotamos

$$\alpha_0(\Lambda) := \min \left( -\frac{\ln r(\Lambda_-)}{\ln r(\Lambda^{-1})}, -\frac{\ln r(\Lambda_+^{-1})}{\ln r(\Lambda)} \right). \quad (2.1)$$

Vamos asumir

$$\alpha_0(\Lambda) := -\frac{\ln r(\Lambda)}{\ln r(\Lambda^{-1})}. \quad (2.2)$$

Si  $\Lambda$  es una contracción, esto es  $E_- = E$ , y

$$\alpha_0(\Lambda) := -\frac{\ln r(\Lambda^{-1})}{\ln r(\Lambda)}. \quad (2.3)$$

Si  $\Lambda$  es una expansión, esto es  $E_+ = E$ . En cualquier caso  $\alpha_0(\Lambda) \in (0, 1]$ .

Recordemos que una función  $\Gamma : E \rightarrow E$  es llamada Lipschitziana o simplemente Lipschitz, si existe  $C \geq 0$ , de modo que  $\|\Gamma(x_1) - \Gamma(x_2)\| \leq C\|x_1 - x_2\|$  para todo  $x_1, x_2 \in E$ . Llamamos  $C$  de constante de Lipschitz de la función  $F$ . El ínfimo de las constantes de Lipschitz de  $F$  será denotado por  $Lip(\Gamma)$ , el cual es una constante de Lipschitz.

A continuación, enunciaremos el Teorema de Grobman-Hartman para difeomorfismos.

**Teorema 2.4 (Linealización Hölder para perturbaciones de aplicaciones lineales hiperbólicas).** *Sea  $\Lambda : E \rightarrow E$  un isomorfismo hiperbólico. Entonces existe un número  $\delta > 0$  tal que para cualquier función  $f : E \rightarrow E$  acotada y Lipschitz con  $\|f\| \leq \delta$  y  $Lip(f) \leq \delta$ ,  $f(0) = 0$  y para cualquier  $\alpha < \alpha_0(\Lambda)$ , existe una única función  $\varphi : E \rightarrow E$  continua, acotada y que además es  $\alpha$ -Hölder, tal que*

$$\Psi \circ \Lambda(z) = (\Lambda + f) \circ \Psi(z), \quad \text{para } z \in E,$$

donde  $F = \Lambda + f$  e  $\Psi = x + \varphi(x)$ . Además,  $\Psi : (E, 0) \rightarrow (E, 0)$  es invertible, con inversa  $\Psi^{-1}(x) = \Phi(x) = x + \phi(x)$ , donde  $\phi : E \rightarrow E$  es continua, acotada que además es  $\alpha$ -Hölder.

*Observación 2.5.* Note que  $\Psi$  y  $\Phi$  son funciones  $\alpha$ -Hölder, si  $\|x - y\| \leq c$  para alguna constante  $c > 0$ .

El siguiente resultado es una consecuencia del teorema anterior.

**Teorema 2.6 (Linealización Hölder para el Teorema de Grobman-Hartman).**

*Consideremos un difeomorfismo  $F(x) = \Lambda x + f(x)$ , local en  $E$  tal que  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 0$  con punto fijo hiperbólico en el punto cero. Entonces, para cualquier  $\alpha < \alpha_0(\Lambda)$ , existe un homeomorfismo local  $h : (U, 0) \rightarrow (h(U), 0)$   $\alpha$ -Hölder, tal que*

$$h \circ \Lambda(z) = F \circ h(z), \quad \text{para } z \in U.$$

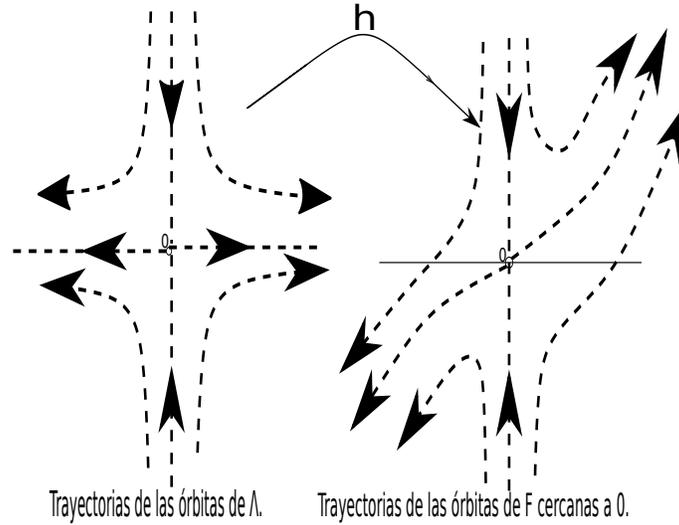


Figura 1: Posible interpretación geométrica del Teoremas 2.16.

*Observación 2.7.* Aunque las ideas para la demostración de la Proposición 2.16 fueron tomadas del pre-print [2, Págs. 4-5], desafortunadamente, el estilo de presentación de la prueba difícilmente puede ser reconocido como completamente satisfactorio. Puesto que todas los pasos sólo están esbozados y para su realización se necesita, de hecho, alguna experiencia y conocimiento previo en sistemas dinámicos y análisis funcional para comprender y terminar los detalles de tales pasos, que son bastante técnicos en la visión de los autores.

*Observación 2.8.* El Teorema de Linealización Global (Teorema 2.16) difiere del tratado en [2, Teorema 1], debido que pretendemos usar dicho Teorema para obtener resultado similares de conjugaciones Hölder para campos vectoriales.

## 2.1 Proposición Principal

A continuación probamos un Teorema de contracción del Punto Fijo debido a Belitski-Rayskin [2].

Sea  $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_n$  una descomposición en suma directa. Considere el sistema de ecuaciones

$$\varphi_i(x) = \Lambda_i \varphi_i(G_i(x)) + h_i(x, \varphi(H_i x)), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.4)$$

Donde  $\Lambda_i : E_i \rightarrow E_i$  es una transformación lineal, mientras que  $G_i, H_i : E \rightarrow E$

son funciones satisfaciendo las condiciones de Lipschitz

$$\left\|G_i(x') - G_i(x'')\right\| \leq L_i \left\|x' - x''\right\|, \quad y \quad \left\|H_i(x') - H_i(x'')\right\| \leq L \left\|x' - x''\right\|. \quad (2.5)$$

También, vamos a considerar que las funciones  $h_i$  son “pequeñas” en el siguiente sentido

$$\sup_i \|h_i(u)\| \leq \delta, \quad \|h_i(u') - h_i(u'')\| \leq \delta \|u' - u''\|, \quad u, u', u'' \in E \times E \quad (2.6)$$

Vamos considerar la Ec.(2.4) como un sistema con respecto a las aplicaciones

$$\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n), \quad \varphi_i : E \mapsto E_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

**Lema 2.9.** *El conjunto  $K(M)$  de las aplicaciones continuas  $\varphi \in \mathcal{F}(E, E)$  satisfaciendo  $\|\varphi(x') - \varphi(x'')\| \leq M\|x' - x''\|^\alpha$  es cerrado.*

**Demostración:** De hecho, sea  $\varphi_n \in K(M)$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi$ . Por definición tenemos que

$$\|\varphi_n(x') - \varphi_n(x'')\| \leq M\|x' - x''\|^\alpha.$$

Entonces, tomando límites en ambos lados, obtenemos  $\|\varphi(x') - \varphi(x'')\| \leq M\|x' - x''\|^\alpha$ . Así,  $\varphi \in K(M)$ , lo que prueba que  $\overline{K(M)} = K(M)$ .

**Teorema 2.10 (Punto fijo de Banach-Cacciopoli).** *Considere un espacio métrico completo  $(X, d)$  y sea  $T : X \rightarrow X$  una contracción. Entonces, existe un único punto fijo  $x_0 \in X$ , esto es,  $T(x_0) = x_0$ . Además, si  $x_1 \in X$ , entonces  $T^n(x_1) \rightarrow x_0$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ .*

A continuación daremos la prueba detallada del Lema 2 del pre-print [2, p. 3], pues en dicho trabajo solamente es dado un esbozo de la prueba. En este trabajo tal lema será llamado de **Proposición Principal**.

**Proposición 2.11 (Proposición Principal).** *Asumamos que*

$$\max_i \|\Lambda_i\| + \delta < 1 \quad (2.7)$$

y

$$\max_i \|\Lambda_i\| L_i^\alpha + \delta L^\alpha < 1. \quad (2.8)$$

Entonces la Ec. (2.4) tiene una única solución  $\phi : E \mapsto E$  continua y acotada. Esta solución es  $\alpha$ -Hölder.

**Demostración:** Considere la función  $T : C_b^0(E) \mapsto C_b^0(E)$ , definido como en Ec. (2.4), esto es

$$(T\varphi)_i = \Lambda_i\varphi_i(G_i(x)) + h_i(x, \varphi(H_i x)) \quad , i = 1, \dots, n.$$

Recordemos que  $C_b^0(E)$  esta unida a la norma

$$\|\varphi\| = \sup_x \|\varphi(x)\|. \quad (2.9)$$

A continuación, verificaremos que

$$\|T(\varphi) - T(\psi)\| \leq (\max_i \|\Lambda_i\| + \delta)\|\varphi - \psi\|. \quad (2.10)$$

Para probar está afirmación, note que,

$$\begin{aligned} T(\varphi) &= (\Lambda_1\varphi_1(G_1x) + h_1(x, \varphi(H_1x)), \dots, \Lambda_n(G_nx) + h_n(x, \varphi(H_nx))) \\ T(\psi) &= (\Lambda_1\psi_1(G_1x) + h_1(x, \psi(H_1x)), \dots, \Lambda_n(G_nx) + h_n(x, \psi(H_nx))). \end{aligned}$$

De ahí, y usando la linealidad de las aplicaciones  $\Lambda_i$  resulta

$$\begin{aligned} T(\varphi) - T(\psi) &= (\Lambda_1(\varphi_1(G_1x) - \psi_1(G_1x)), \dots, \Lambda_n(\varphi_n(G_nx) - \psi_n(G_nx))) \\ &\quad + (h_1(x, \varphi(H_1x)) - h_1(x, \psi(H_1x)), \dots, h_n(x, \varphi(H_nx)) - h_n(x, \psi(H_nx))). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Ahora, utilizando la Ec. (2.11) y la desigualdad triangular, obtenemos

$$\begin{aligned} \|T(\varphi)(x) - T(\psi)(x)\| &\leq \|(\Lambda_1(\varphi_1(G_1x) - \psi_1(G_1x)), \dots, \Lambda_n(\varphi_n(G_nx) - \psi_n(G_nx)))\| + \\ &\quad \|(h_1(x, \varphi(H_1x)) - h_1(x, \psi(H_1x)), \dots, h_n(x, \varphi(H_nx)) - h_n(x, \psi(H_nx)))\|. \end{aligned}$$

De aquí, y usando definición de norma en el espacio  $E$ ,

$$\begin{aligned} \|T(\varphi)(x) - T(\psi)(x)\| &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \|\Lambda_i(\varphi_i(G_i x) - \psi_i(G_i x))\| + \\ &\quad \max_{1 \leq i \leq n} \|(h_i(x, \varphi(H_i x)) - h_i(x, \psi(H_i x)))\|, \end{aligned}$$

luego, usando la propiedad de la norma de las aplicaciones lineales y las condiciones (2.6) obtenemos

$$\begin{aligned} \|T(\varphi)(x) - T(\psi)(x)\| &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \|\Lambda_i\| \|\varphi_i(G_i x) - \psi_i(G_i x)\| + \max_{1 \leq i \leq n} \delta \|\varphi(H_i x) - \psi(H_i x)\| \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \|\Lambda_i\| \|\varphi - \psi\| + \max_{1 \leq i \leq n} \delta \|\varphi - \psi\|. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} \|T(\varphi)(x) - T(\psi)(x)\| &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \|\Lambda_i\| \|\varphi(G_i x) - \psi(G_i x)\| + \max_{1 \leq i \leq n} \delta \|\varphi(H_i x) - \psi(H_i x)\| \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \|\Lambda_i\| \|\varphi - \psi\| + \max_{1 \leq i \leq n} \delta \|\varphi - \psi\|. \end{aligned}$$

Por lo tanto, probamos la afirmación

$$\|T(\varphi) - T(\psi)\| \leq (\max_i \|\Lambda_i\| + \delta) \|\varphi - \psi\|. \quad (2.12)$$

Por consiguiente, teniendo en cuenta la condición (2.7) tenemos que  $T$  es una contracción en  $C_b^0(E)$ , entonces por el Teorema 2.10, tenemos que la Ec. (2.4) tiene una única solución  $\phi \in C_b^0(E)$ .

A continuación, vamos a probar que  $\phi$  es  $\alpha$ -Hölder. Por el Lema 2.9, tenemos que  $K(M)$  es un subconjunto cerrado de las aplicaciones  $\varphi \in C_b^0(E)$ , satisfaciendo

$$\|\varphi(x') - \varphi(x'')\| \leq M \|x' - x''\|^\alpha, \quad (2.13)$$

donde

$$M > \underbrace{\frac{2\delta}{1 - \delta L^\alpha - \max_{1 \leq i \leq n} \|\Lambda_i L_i^\alpha\|}}_{>0 \text{ por Ec.(2.8)}}. \quad (2.14)$$

Ahora, vamos a verificar que  $K(M)$  es invariante por la aplicación  $T$ .

En efecto, de forma análoga a los cálculos anteriores obtenemos,

$$\begin{aligned} \|T(\varphi)(x') - T(\varphi)(x'')\| &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \|\Lambda_i\| \|\varphi(G_i(x')) - \varphi(G_i(x''))\| \\ &\quad + \max_{1 \leq i \leq n} \|h_i(x', \varphi(H_i x')) - h_i(x'', \varphi(H_i x''))\|. \end{aligned}$$

De donde, dado que  $\varphi$  es  $\alpha$ -Hölder (2.13) y  $h_i$  satisfaz (2.6), resulta que

$$\begin{aligned} \|T(\varphi)(x') - T(\varphi)(x'')\| &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \|\Lambda_i\| M \|G_i(x') - G_i(x'')\|^\alpha \\ &\quad + \max_{1 \leq i \leq n} \|h_i(x', \varphi(H_i x')) - h_i(x'', \varphi(H_i x''))\|. \end{aligned}$$

Desde que las funciones  $G_i$  son Lipschitzianas (Condición (2.5)), tenemos

$$\begin{aligned} \|T(\varphi)(x') - T(\varphi)(x'')\| &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \|\Lambda_i\| M L_i^\alpha \|x' - x''\|^\alpha \\ &\quad + \max_{1 \leq i \leq n} \|h_i(x', \varphi(H_i x')) - h_i(x'', \varphi(H_i x''))\|. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Si asumimos  $\|x' - x''\| \geq 1$ , entonces usamos la desigualdad triangular, de la condición (2.6) y la Ec. (2.15) deducimos que

$$\|T(\varphi)(x') - T(\varphi)(x'')\| \leq \max_{1 \leq i \leq n} (\|\Lambda_i\| L_i^\alpha M + 2\delta) \|x' - x''\|^\alpha.$$

Desde que, por Eq. (2.8) tenemos que

$$M > \max_{1 \leq i \leq n} \|\Lambda_i\| L_i^\alpha M + 2\delta + \delta L^\alpha > \max_{1 \leq i \leq n} \|\Lambda_i\| L_i^\alpha M + 2\delta.$$

Así, tenemos que

$$\|T(\varphi)(x') - T(\varphi)(x'')\| \leq M \|x' - x''\|^\alpha. \quad (2.16)$$

Ahora, vamos asumir que  $\|x' - x''\| \leq 1$ . Primero note que si usamos la condición (2.35) y Ec. (2.15), se obtiene

$$\begin{aligned} \|T(\varphi)(x') - T(\varphi)(x'')\| &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \|\Lambda_i\| M L_i^\alpha \|x' - x''\|^\alpha + \\ &\quad \max_{1 \leq i \leq n} \delta \|(x' - x'', \varphi(H_i x') - \varphi(H_i x''))\|. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} \|T(\varphi)(x') - T(\varphi)(x'')\| &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \|\Lambda_i\| M L_i^\alpha \|x' - x''\|^\alpha + \\ &\quad \delta \|x' - x''\| + \max_{1 \leq i \leq n} \delta \|\varphi(H_i x') - \varphi(H_i x'')\|. \end{aligned}$$

Luego, usando el hecho que  $\varphi$  es  $\alpha$ -Hölder y la condición, (2.5), se tiene que

$$\begin{aligned} \|T(\varphi)(x') - T(\varphi)(x'')\| &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \|\Lambda_i\| M L_i^\alpha \|x' - x''\|^\alpha \\ &\quad + \delta \|x' - x''\| + \max_{1 \leq i \leq n} \delta M \|H_i(x') - H_i(x'')\|^\alpha. \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \|\Lambda_i\| M L_i^\alpha \|x' - x''\|^\alpha \\ &\quad + \|x' - x''\| + \delta M L^\alpha \|x' - x''\|^\alpha. \end{aligned}$$

De ahí y usando el hecho que  $\|x' - x''\| \leq 1$  implica que  $\|x' - x''\| \leq \|x' - x''\|^\alpha$ , obtenemos que

$$\|T(\varphi)(x') - T(\varphi)(x'')\| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \|\Lambda_i\| M L_i^\alpha \|x' - x''\|^\alpha + \delta \|x' - x''\|^\alpha + \delta M L^\alpha \|x' - x''\|^\alpha.$$

Luego,

$$\|T(\varphi)(x') - T(\varphi)(x'')\| \leq \left( \max_{1 \leq i \leq n} \|\Lambda_i\| M L_i^\alpha + \delta + \delta M L^\alpha \right) \|x' - x''\|^\alpha.$$

Desde que, por Eq. (2.8) tenemos que

$$M > \max_{1 \leq i \leq n} \|\Lambda_i\| L_i^\alpha M + 2\delta + M\delta L^\alpha > \max_{1 \leq i \leq n} \|\Lambda_i\| L_i^\alpha M + \delta + M\delta L^\alpha.$$

Así, tenemos que

$$\|T(\varphi)(x') - T(\varphi)(x'')\| \leq M \|x' - x''\|^\alpha. \quad (2.17)$$

Consecuentemente, por Ecs. (2.16) y (2.17), se tiene que

$$\varphi \in K(M) \Rightarrow T(\varphi) \in K(M) \quad (2.18)$$

Por último, vamos a verificar que la única solución de la Ec. (2.4)  $\phi$  es  $\alpha$ -Hölder, esto es, vamos a probar que  $\phi \in K(M)$ .

Para esto, sea  $\varphi \in K(M)$ , entonces  $T^n(\varphi) \in K(M)$ . Luego, por el teorema del punto fijo para contracciones tenemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(\varphi)$  converge para el punto fijo  $\phi$ , esto es,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(\varphi) = \phi. \quad (2.19)$$

Esto quiere decir que  $\phi \in \overline{K(M)}$ . Esto implica que  $\phi \in K(M)$ , puesto que por Lema 2.9 tenemos que  $K(M)$  es cerrado ( $\overline{K(M)} = K(M)$ ). Lo que termina la prueba de la Proposición principal.

## 2.2 Linealización Hölder para perturbaciones de aplicaciones lineales hiperbólicas

En esta sección daremos la prueba del Teorema Principal 2.16. Pero antes, necesitamos de los siguientes resultados.

**Lema 2.12.** *Considere  $L : E \rightarrow E$  una transformación lineal acotada invertible. Si  $\varphi : E \rightarrow E$  es una función Lipschitz con*

$$\text{Lip}(\varphi) < \|L^{-1}\|^{-1},$$

*entonces  $L + \varphi$  es invertible, con inversa Lipschitz, y*

$$\text{Lip}[(L + \varphi)^{-1}] \leq \frac{\|L^{-1}\|}{-\text{Lip}(\varphi)\|L^{-1}\| + 1}.$$

**Demostración:** Esta prueba puede encontrarse en los trabajos [8, 7].

**Lema 2.13.** *Sea  $X$  un espacio de Banach, tal que  $X = X_1 \oplus X_2$  es la suma directa de dos espacios cerrados, y sea  $A \in L(X)$  tal que*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

con respecto a la descomposición arriba. Entonces,

(a)  $r(A) = \max\{r(A_1), r(A_2)\}$ ,  $r(A^{-1}) = \max\{r(A_1^{-1}), r(A_2^{-1})\}$ .

(b)  $A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & A_1^{-1}BA_2^{-1} \\ 0 & A_2^{-1} \end{pmatrix}$ .

(c) *Asuma que  $A_1$  y  $A_2$  son invertibles. Entonces, para cualquier  $\epsilon > 0$ , existe una norma  $\|\cdot\|_\epsilon$  en  $X$  equivalente a la norma original tal que*

$$\begin{aligned} \|A_1\|_\epsilon &\leq r(A_1) + \epsilon, & \|A_1^{-1}\|_\epsilon &\leq r(A_1^{-1}) + \epsilon, \\ \|A_2\|_\epsilon &\leq r(A_2) + \epsilon, & \|A_2^{-1}\|_\epsilon &\leq r(A_2^{-1}) + \epsilon, \\ \|A\|_\epsilon &\leq r(A) + \epsilon & \|A^{-1}\|_\epsilon &\leq r(A^{-1}) + \epsilon, \end{aligned}$$

$$\|B\|_\epsilon \leq \epsilon.$$

**Demostración:** Esta prueba puede encontrarse en [4].

A continuación enunciamos y probamos un resultado importante para demostrar la Proposición 2.16.

**Proposición 2.14.** *Sea  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $\alpha < \alpha_0(\Lambda)$ , entonces existe una norma  $\|\cdot\|$  en  $E$  equivalente a la norma original, tal que*

$$\max\{\|\Lambda_- \|\cdot\| \Lambda^{-1}\|^\alpha, \|\Lambda_+^- \|\cdot\| \Lambda\|^\alpha\} < 1.$$

**Demostración:** Desde que  $\alpha_0(\Lambda) = \min\left(-\frac{\ln r(\Lambda_-)}{\ln r(\Lambda^{-1})}, -\frac{\ln r(\Lambda_+^-)}{\ln r(\Lambda)}\right)$ . Entonces,

$$\alpha < -\frac{\ln r(\Lambda_-)}{\ln r(\Lambda^{-1})} \quad \text{y} \quad \alpha < -\frac{\ln r(\Lambda_+^-)}{\ln r(\Lambda)}.$$

De aquí, y aplicando la propiedades de logaritmo obtenemos que

$$r(\Lambda^{-1})^\alpha r(\Lambda_-) < 1 \quad \text{y} \quad r(\Lambda)^\alpha r(\Lambda_+^{-1}) < 1$$

De aquí, podemos encontrar un  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño tal que

$$(r(\Lambda^{-1}) + \epsilon)^\alpha (r(\Lambda_-) + \epsilon) < 1 \quad \text{y} \quad (r(\Lambda) + \epsilon)^\alpha (r(\Lambda_+^{-1}) + \epsilon) < 1. \quad (2.20)$$

Combinando los Lemas 2.3 y 2.13, obtenemos para el  $\epsilon > 0$  arriba y para  $\Lambda, E = E_- \oplus E_+$ ,  $\Lambda_- : E_- \rightarrow E_-$  y  $\Lambda_+ : E_+ \rightarrow E_+$ , existe una norma adaptada  $\|\cdot\|_\epsilon$  tal que

$$\begin{aligned} \|\Lambda_-\|_\epsilon &\leq r(\Lambda_-) + \epsilon, & \|\Lambda_-^{-1}\|_\epsilon &\leq r(\Lambda_-^{-1}) + \epsilon, \\ \|\Lambda_+\|_\epsilon &\leq r(\Lambda_+) + \epsilon, & \|\Lambda_+^{-1}\|_\epsilon &\leq r(\Lambda_+^{-1}) + \epsilon, \\ \|\Lambda\|_\epsilon &\leq r(\Lambda) + \epsilon, & \|\Lambda^{-1}\|_\epsilon &\leq r(\Lambda^{-1}) + \epsilon. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Si hacemos  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\epsilon$ , entonces de las Ecs. (2.20) y (2.21) obtenemos

$$\max\{\|\Lambda_-\| \|\Lambda^{-1}\|^\alpha, \|\Lambda_+^{-1}\| \|\Lambda\|^\alpha\} < 1.$$

*Observación 2.15.* En la visión de los autores, uno de los vacíos más difíciles de contornar, que aparece en medio de la prueba (línea 18) del teorema principal [2, Teorema 1], fue justificar la existencia de una norma con las características de la Proposición 2.14.

A seguir probaremos el Teorema Principal 2.16, cuyo enunciado es el siguiente.

**Teorema 2.16.** *Sea  $\Lambda : E \rightarrow E$  un isomorfismo hiperbólico. Entonces, existe un número  $\delta > 0$  tal que para cualquier función  $f : E \rightarrow E$  acotada y Lipchitz con  $\|f(x)\| \leq \delta$  y  $Lip(f) \leq \delta$ ,  $f(0) = 0$  y para cualquier  $\alpha < \alpha_0(\Lambda)$ , existe una única función  $\varphi : E \rightarrow E$  continua, acotada y que además es  $\alpha$ -Holder, tal que*

$$\Psi \circ \Lambda(z) = (\Lambda + f) \circ \Psi(z), \quad \text{para } z \in E,$$

donde  $F = \Lambda + f$  e  $\Psi = I + \varphi$ . Además,  $\Psi : (E, 0) \rightarrow (E, 0)$  es invertible, con inversa  $\Psi^{-1} = \Phi = x + \phi(x)$ , donde  $\phi : E \rightarrow E$  es continua, acotada y  $\alpha$ -Holder.

**Demostración:**

Queremos encontrar una conjugación  $\Phi(x) = x + \varphi(x)$  entre  $F$  y  $\Lambda$  que sea un homeomorfismo, de modo que  $\varphi(x)$  es continua, acotada que además es  $\alpha$ -Hölder. Para este fin, comenzaremos probando la siguiente afirmación.

**Afirmación 1:** Existe una única aplicación  $\Phi(x) = x + \varphi(x)$ , de modo que  $\varphi(x)$  es continua y acotada que además es  $\alpha$ -Hölder, y satisface

$$\begin{aligned}\Lambda \circ \Phi(x) &= \Phi \circ F(x) \\ \Lambda(x) + \Lambda \circ \varphi(x) &= F(x) + \varphi \circ F(x).\end{aligned}\tag{2.22}$$

De donde, deducimos que Ec. (2.22) es equivalente a,

$$\varphi(Fx) = \Lambda\varphi(x) - f(x).\tag{2.23}$$

Luego, teniendo en cuenta que la función  $F = \Lambda + f$  es invertible para un  $\delta > 0$  suficientemente pequeño, la descomposición  $E = E_- \oplus E_+$  y la invariancia de las aplicaciones lineales  $\Lambda_{\mp} = \Lambda|_{E_{\mp}}$ , se deduce que

$$\varphi_+(Fx) + \varphi_-(Fx) = \Lambda\varphi_+(x) + \Lambda\varphi_-(x) - f_-(x) - f_+(x)$$

de donde resulta que

$$\varphi_-(Fx) = \Lambda_-\varphi_-(x) - f_-(x) \quad y \quad \varphi_+(Fx) = \Lambda_+\varphi_+(x) - f_+(x).$$

Lo que implica que la Ec. (2.23) es equivalente al sistema

$$\varphi_-(x) = \underbrace{\Lambda_-}_{\Lambda_1} \varphi_-(F^{-1}x) - f_-(F^{-1}x) \quad y \quad \varphi_+(x) = \underbrace{\Lambda_+^{-1}}_{\Lambda_2} \varphi_+(Fx) + \Lambda_+^{-1} f_+(x)\tag{2.24}$$

Aquí  $f_{\mp} : E \rightarrow E_{\mp}$ ,  $f = (f_-, f_+)$  y  $\varphi_{\mp} : E \rightarrow E_{\mp}$ . Así, buscamos una solución  $\varphi = (\varphi_-, \varphi_+)$ .

**Afirmación 1.1:** El sistema de Ecs (2.24) tiene una única solución  $\varphi$  continua, acotada que además es  $\alpha$ -Hölder. Para probar esta afirmación vamos hacer uso de la Proposición 2.11, considerando para esto las siguientes funciones

$$G_1(x) = F^{-1}(x); G_2(x) = F(x); h_1(x, y) = f_-(F^{-1}(x)); h_2(x, y) = \Lambda_+^{-1} f_+(x),$$

$$H_1(x, y) = H_2(x, y) = 0.$$

Ahora vamos a verificar que estas funciones satisfacen las condiciones de la Proposición 2.11. En efecto, por la Proposición 2.14 podemos tomar una norma en  $E$  la cual es equivalente a la norma original, tal que

$$\max\{\|\Lambda_-\| \cdot \|\Lambda^{-1}\|^\alpha, \|\Lambda_+^{-1}\| \cdot \|\Lambda\|^\alpha\} < 1.\tag{2.25}$$

Además, tenemos que

$$Lip(f) \leq \delta. \quad (2.26)$$

Así

$$Lip(F) \leq (\|\Lambda\| + \delta).$$

Esto quiere decir que para un  $\delta > 0$  suficientemente pequeño tenemos que

$$Lip(F) \approx \|\Lambda\|. \quad (2.27)$$

Por el Lema 2.12, para un  $\delta > 0$  suficientemente pequeño tenemos que

$$Lip(F^{-1}) < \left( \frac{\|\Lambda^{-1}\|}{1 - \delta\|\Lambda^{-1}\|} \right).$$

Así, si tomamos un  $\delta > 0$  suficientemente pequeño, tenemos que

$$Lip(F^{-1}) \approx \|\Lambda^{-1}\|. \quad (2.28)$$

Luego, por la Ec. (2.28) obtenemos que

$$\|G_1(x) - G_1(x')\| \leq \|F^{-1}(x) - F^{-1}(x')\| \leq \underbrace{\|\Lambda^{-1}\|}_{L_1} \|x - x'\|.$$

Ahora, por la Ec. (2.27) se tiene que

$$\|G_2(x) - G_2(x')\| \leq \|F(x) - F(x')\| \leq \underbrace{\|\Lambda\|}_{L_2} \|x - x'\|.$$

En seguida, por Ec. (2.26) y Ec. (2.28) obtenemos

$$\begin{aligned} \|h_1(x, y) - h_1(x', y')\| &= \|f_-(F^{-1}(x)) - f_-(F^{-1}(x'))\| \leq \delta \|F^{-1}(x) - F^{-1}(x')\| \\ &\leq \delta \|\Lambda^{-1}\| \|x - x'\| \leq \delta \|\Lambda^{-1}\| \|(x - x', y - y')\|. \end{aligned}$$

También tenemos, por Ec. (2.26) y Ec. (2.28) lo siguiente

$$\begin{aligned} \|h_2(x, y) - h_2(x', y')\| &= \|\Lambda_+^{-1} f_+(x) - \Lambda_+^{-1} f_+(x')\| \leq \|\Lambda_+^{-1}\| \|f_+(x) - f_+(x')\| \\ &\leq \delta \|\Lambda_+^{-1}\| \|x - x'\| \leq \delta \|\Lambda_+^{-1}\| \|(x - x', y - y')\|. \end{aligned}$$

Desde que  $\|f(x)\| \leq \delta$ , tenemos que

$$\sup \|h_1(x, y)\| \leq \delta \quad y \quad \sup \|h_2(x, y)\| \leq \delta \|\Lambda_+^{-1}\| \leq \delta.$$

Luego, combinando las ecuaciones anteriores, para un  $\delta > 0$  suficientemente pequeño, tenemos que

$$\max\{\|\Lambda_1\|, \|\Lambda_2\|\} + \delta < 1, \quad y \quad \max\{\|\Lambda_1\|L_1^\alpha, \|\Lambda_2\|L_2^\alpha\} + \delta L^\alpha < 1.$$

Por lo tanto, por la Proposición 2.11, el sistema (2.24) tiene una única solución  $\varphi$  continua y acotada que es  $\alpha$ -Hölder. Lo que prueba la Afirmación 1.1.

Con esto probamos la Afirmación 1. Esto quiere decir que encontramos una función  $\Phi(x) = x + \varphi(x)$ , donde  $\varphi(x)$  es continua, acotada y además  $\alpha$ -Hölder y satisface  $\Phi(Fx) = \Lambda\Phi(x)$ .

**Afirmación 2:** La función  $\Phi$  es un homeomorfismo, con  $\Phi^{-1} = \Psi$ , donde  $\Psi = x + \psi(x)$ , con  $\psi$  función continua y acotada que además es  $\alpha$ -Hölder. Para este fin, vamos a encontrar una aplicación  $\Psi(x) = x + \psi(x)$  que satisfaga

$$F(\Psi(x)) = \Psi(\Lambda x). \tag{2.29}$$

De aquí y desde que  $\Psi(x) = x + \psi(x)$  y  $F = (\Lambda + f)$ , obtenemos

$$f(x + \psi(x)) + \Lambda(x + \psi(x)) = \Lambda(x) + \psi(\Lambda x).$$

Lo que nos lleva a

$$\psi_+(\Lambda x) = f_+(x + \psi(x)) + \Lambda_+(\psi_+(x)), \quad y \quad \psi_-(\Lambda x) = f_-(x + \psi(x)) + \Lambda_-(\psi_-(x)). \tag{2.30}$$

Así, das Ecs. (2.30) tenemos

$$\begin{aligned} \psi_+(x) &= \underbrace{\Lambda_+^{-1}(\psi_+(x))}_{\Lambda_1} - \Lambda_+^{-1}f_+(x + \psi(x)), \\ \psi_-(x) &= \underbrace{\Lambda_-^{-1}(\psi_-(\Lambda^{-1}x))}_{\Lambda_2} + f_-(\Lambda^{-1}x + \psi(\Lambda^{-1}(x))). \end{aligned} \tag{2.31}$$

**Afirmación 2.1:** Existe una única función continua y acotada  $\psi$  que además es  $\alpha$ -Hölder que satisface el sistema de Ecs. (2.31). Para probar esta afirmación vamos hacer uso de la Proposición 2.11, considerando para esto las siguientes funciones

$$\begin{aligned} G_1(x) = x; G_2(x) = \Lambda^{-1}(x); \quad h_1(x, y) = -\Lambda_+^{-1}f_+(x + y); \\ h_2(x, y) = f_-(\Lambda^{-1}x + y); \quad H_1(x) = x; H_2(x) = \Lambda^{-1}(x). \end{aligned}$$

Ahora vamos a verificar que estas funciones satisfacen las condiciones de la Proposición 2.11. En efecto, por la Proposición 2.14 podemos tomar una norma en  $E$  tal que

$$\max\{\|\Lambda_-\| \cdot \|\Lambda^{-1}\|^\alpha, \|\Lambda_+\| \cdot \|\Lambda\|^\alpha\} < 1 \quad (2.32)$$

Por definición, tenemos que

$$\begin{aligned} \|G_1(x) - G_1(x')\| &\leq \underbrace{1}_{L_1} \|x - x'\|, \\ \|G_2(x) - G_2(x')\| &\leq \|\Lambda^{-1}(x - x')\| \leq \underbrace{\|\Lambda^{-1}\|}_{L_2} \|x - x'\|. \end{aligned}$$

Por hipótesis, tenemos que  $Lip(f) \leq \delta$  de donde obtenemos

$$\begin{aligned} \|h_1(x, y) - h_1(x', y')\| &= \|-\Lambda_+^{-1}f_+(x + y) - (-\Lambda_+^{-1}f_+(x' + y'))\| \\ &\leq \delta \|\Lambda_+^{-1}\| \|(x - x', y - y')\| \leq \delta \|(x - x', y - y')\|. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|h_2(x, y) - h_2(x', y')\| &= \|\Lambda_+^{-1}f_+(x) - \Lambda_+^{-1}f_+(x')\| \\ &\leq \delta \|\Lambda_+^{-1}\| \|(x - x', y - y')\| \leq \delta \|(x - x', y - y')\|. \end{aligned}$$

$$\sup \|h_1(x, y)\| \leq \delta \quad y \quad \sup \|h_2(x, y)\| \leq \delta \|\Lambda_+^{-1}\| \leq \delta.$$

También se tiene que

$$\|H_1(x) - H_1(x')\| \leq \|x - x'\| \leq \underbrace{\|\Lambda^{-1}\|}_L \|x - x'\|, \quad \|H_2(x) - H_2(x')\| \leq \underbrace{\|\Lambda^{-1}\|}_L \|x - x'\|.$$

Luego, combinando las ecuaciones anteriores, para un  $\delta > 0$  suficientemente pequeño tenemos que,

$$\max\{\|\Lambda_1\|, \|\Lambda_2\|\} + \delta < 1, \quad \max\{\|\Lambda_1\|L_1^\alpha, \|\Lambda_2\|L_2^\alpha\} + \delta L^\alpha < 1.$$

Por lo tanto, por la Proposición 2.11, el sistema (2.24) tiene una única solución continua y acotada  $\psi = (\psi_-, \psi_+)$  que además es  $\alpha$ -Hölder. Lo que prueba la Afirmación 2.1.

**Afirmación 2.2:** La aplicación  $\Psi(x)$  es la inversa de la función  $\Phi$ . Esta afirmación será verificada en dos partes, en la primera parte vamos a probar que  $\Phi \circ \Psi(x) = x$  y en la segunda parte vamos a probar que  $\Psi \circ \Phi(x) = x$ .

**Afirmación 2.2.1:** La función  $\Psi$  es una inversa por derecha de  $\Phi$ , esto es,  $\Phi \circ \Psi(x) = x$ .

Desde que  $\Psi(x) = x + \psi(x)$  tenemos que  $H(x) = \Phi(\Psi(x)) = x + \psi(x) + \varphi(x + \phi(x)) = x + h(x)$ . Además,  $\psi$  y  $\varphi$  son continuas y acotadas, entonces  $h(x) = \psi(x) + \varphi(x + \phi(x))$  es continua y acotada. En seguida vamos a verificar que  $h = 0$ . Para ver esto primero note que  $h(\Lambda x) = \Lambda h(x)$ . De hecho, de las Ecs. (2.22) y (2.29) tenemos que

$$\begin{aligned}\Phi(\Psi(\Lambda(x))) &= \Lambda\Phi(\Psi(x)) \\ \Lambda x + h(\Lambda x) &= \Lambda x + \Lambda h(x).\end{aligned}$$

De donde, obtenemos que

$$h(\Lambda x) = \Lambda h(x). \quad (2.33)$$

Usando la Afirmación 1, con  $f(x) = 0$  tenemos que Eq. (2.33) tiene una única solución continua y acotada que además es  $\alpha$ -Hölder. Desde que  $h$  es continua, acotada y satisface la Eq. (2.33) y como consecuencia es  $\alpha$ -Hölder. Además note que la función  $0(x) = 0$  es continua, acotada y también satisface la Eq. (2.33), entonces por la unicidad, debemos tener que  $h = 0$ . Lo que prueba la Afirmación 2.2.1.

**Afirmación 2.2.2:** La función  $\Psi$  es inversa por izquierda de  $\Phi$ , esto es,  $\Psi \circ \Phi(x) = x$ .

Similarmente a los pasos anteriores, tenemos que  $\tilde{H}(x) := \Psi(\Phi(x)) = x + \tilde{h}(x)$ , donde  $\tilde{h}(x)$  es continua y acotada. A continuación vamos a verificar que  $\tilde{h} = 0$ . De hecho, de las Ecs. (2.29) y (2.22) obtenemos que  $F(\Psi(\Phi(x))) = \Psi\Phi(Fx)$ . De esta igualdad y de la definición de  $\tilde{h}$  obtenemos

$$F(x + \tilde{h}(x)) = F(x) + \tilde{h}(F(x)). \quad (2.34)$$

$$f(x + \tilde{h}(x)) + \Lambda x + \Lambda \tilde{h}(x) = f(x) + \Lambda x + \tilde{h}(F(x)). \quad (2.35)$$

De donde, tenemos que

$$\begin{aligned}f_+(x + \tilde{h}(x)) + \Lambda \tilde{h}_+(x) &= f_+(x) + \tilde{h}_+(F(x)), \\ f_-(x + \tilde{h}(x)) + \Lambda \tilde{h}_-(x) &= f_-(x) + \tilde{h}_-(F(x)).\end{aligned}$$

Lo que nos lleva a,

$$\tilde{h}_+(x) = \Lambda_+^{-1} \tilde{h}_+(Fx) - \Lambda_+^{-1} f_+(x + \tilde{h}(x)) + \Lambda_+^{-1} f_+(x), \quad (2.36)$$

$$\tilde{h}_-(x) = -\Lambda_- \tilde{h}_-(F^{-1}(x)) + f_-(F^{-1}x + \tilde{h}(F^{-1}x)) - f_-(F^{-1}x). \quad (2.37)$$

**Afirmación 2.2.2.1:** El sistema de Ecs (2.36) y (2.37) tiene una única solución que es continua, acotada y que además es  $\alpha$ -Hölder.

Para probar esta afirmación vamos hacer uso nuevamente de la Proposición 2.11, considerando para esto las siguientes funciones

$$\begin{aligned} G_1(x) &= F(x); G_2(x) = F^{-1}(x); & h_1(x, y) &= -\Lambda_+^{-1}f_+(x + y) + \Lambda_+^{-1}f_+(x); \\ h_2(x, y) &= f_-(F^{-1}(x) + y); & H_1(x) &= x; H_2(x) = F^{-1}(x). \end{aligned}$$

Ahora vamos a verificar que estas funciones satisfacen las condiciones de la Proposición 2.11. En efecto, por la Proposición 2.14 podemos tomar una norma en  $E$  tal que

$$\max\{\|\Lambda_-\|\cdot\|\Lambda^{-1}\|^\alpha, \|\Lambda_+\|\cdot\|\Lambda\|^\alpha\} < 1. \quad (2.38)$$

Usando las definiciones, tenemos que

$$\begin{aligned} \|G_1(x) - G_1(x')\| &\leq \underbrace{\|\Lambda\|}_{L_1} \|x - x'\|, \\ \|G_2(x) - G_2(x')\| &\leq \|F^{-1}(x - x')\| \leq \underbrace{\|\Lambda^{-1}\|}_{L_2} \|x - x'\|. \end{aligned}$$

En seguida, usando que  $Lip(f) \leq \delta$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \|h_1(x, y) - h_1(x', y')\| &= \|-\Lambda_+^{-1}f_+(x + y) + \Lambda_+^{-1}f_+(x' + y')\| + \\ &\quad \|\Lambda_+^{-1}f_+(x) - \Lambda_+^{-1}f_+(x')\| \\ &\leq 2\delta\|(x - x', y - y')\|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|h_2(x, y) - h_2(x', y')\| &\leq \|f_-(F^{-1}(x) + y) - (f_-(F^{-1}(x') + y'))\| \\ &\quad + \|f_-(F^{-1}(x)) - f_-(F^{-1}(x'))\| \\ &\leq 2\delta\|\Lambda^{-1}\|\|(x - x', y - y')\|. \end{aligned}$$

Desde que  $\|f(x)\| \leq \delta$ , se obtiene

$$\sup\|h_1(x, y)\| \leq \delta \leq 2\delta \quad y \quad \sup\|h_2(x, y)\| \leq 2\delta\|\Lambda_+^{-1}\| \leq 2\delta.$$

También se tiene que

$$\|H_1(x) - H_1(x')\| \leq \underbrace{\|\Lambda^{-1}\|}_L \|x - x'\|, \quad \|H_2(x) - H_2(x')\| \leq \underbrace{\|\Lambda^{-1}\|}_L \|x - x'\|.$$

Luego, combinando las ecuaciones anteriores, para un  $\delta > 0$  bien pequeño tenemos que,

$$\max\{\|\Lambda_1\|, \|\Lambda_2\|\} + \delta < 1 \quad \text{y} \quad \max\{\|\Lambda_1\|L_1^\alpha, \|\Lambda_2\|L_2^\alpha\} + \delta L^\alpha < 1.$$

Por lo tanto, por la Proposición 2.11, el sistema (2.36) y (2.37) tiene una única solución continua y acotada que además es  $\alpha$ -Hölder. Lo que prueba la Afirmación 2.2.2.1.

Para concluir la Afirmación 2.2.2. Desde que  $\tilde{h} = (\tilde{h}_-, \tilde{h}_+)$  es continua, acotada y satisface el sistema (2.36) y (2.37) y como consecuencia es  $\alpha$ -Hölder. Además note que la función  $0(x) = 0$  es continua y acotada también satisface el sistema (2.36) y (2.37), entonces por la unicidad, debemos tener que  $\tilde{h} = 0$ . Lo que concluye la prueba de la Afirmación 2.2.2. existe una única función  $\varphi : E \rightarrow E$  continua, acotada y que además es  $\alpha$ -Hölder, tal que

$$\Psi \circ \Lambda(z) = F \circ \Psi(z), \quad \text{para } z \in E,$$

donde  $F = \Lambda + f$  e  $\Psi = I + \varphi$ . Además,  $\Psi : (E, 0) \rightarrow (E, 0)$  es invertible, con inversa  $\Psi^{-1} = \Phi = x + \phi(x)$ , donde  $\phi : E \rightarrow E$  es continua, acotada y que además es  $\alpha$ -Holder.

Entonces usando las Afirmaciones 1 y 2, nos lleva a mostrar que  $\Phi(x) = x + \phi(x)$  es un homeomorfismo que conjuga  $\Lambda(x)$  y  $(\Lambda + f)(x)$ , donde  $\phi(x)$  es una función continua, acotada y que además es  $\alpha$ -Hölder cuya inversa es la función  $\Psi = x + \psi(x)$ , donde  $\psi(x)$  es una función continua, acotada y que además es  $\alpha$ -Hölder. Lo que concluye la prueba del Teorema.

## 2.3 Linealización Hölder para el Teorema de Grobman-Hartman

El Teorema 2.16 es nuestra herramienta básica para probar el Teorema de Grobman-Hartman. Solamente necesitamos verificar las hipótesis del teorema en nuestra situación. Esto lo hacemos con el siguiente Lema.

**Lema 2.17** (Lema de Extensión). *Sea  $E$  un espacio de Banach y  $f : N \subset E \rightarrow E$  una función  $C^k$ ,  $k \geq 1$  en el abierto  $N$  tal que  $0 \in N$ , con  $f(0) = 0$ . Denote por  $A = Df(0)$ . Entonces, dado  $\epsilon > 0$  existe una vecindad  $U = U(0)$  y una función  $\phi : E \rightarrow E$  con  $\|\phi\| \leq \delta$ ,  $Lip(\phi) \leq \epsilon$  tal que  $(A + \phi) : E \rightarrow E$  es la extensión de  $f|_U$ .*

**Demostración:** Esta prueba puede ser encontrada en el artículo [8, Pág. 2].

*Observación 2.18.* Si  $E$  es un espacio de Hilbert (espacio de Banach cuya norma proviene de un producto interno), entonces la aplicación  $\phi$  es de clase  $C^k$ .

**Teorema 2.19 (Linealización Hölder del Teorema de Grobman-Hartman).** Consideremos un difeomorfismo  $F(x) = \Lambda x + f(x)$ , local en  $E$  tal que  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 0$  con punto fijo hiperbólico en el punto cero. Entonces, para cualquier  $\alpha < \alpha_0(\Lambda)$ , existe un homeomorfismo local  $h : (U, 0) \rightarrow (h(U), 0)$   $\alpha$ -Hölder, tal que  $h \circ \Lambda(z) = F \circ h(z)$ , para  $z \in U$ .

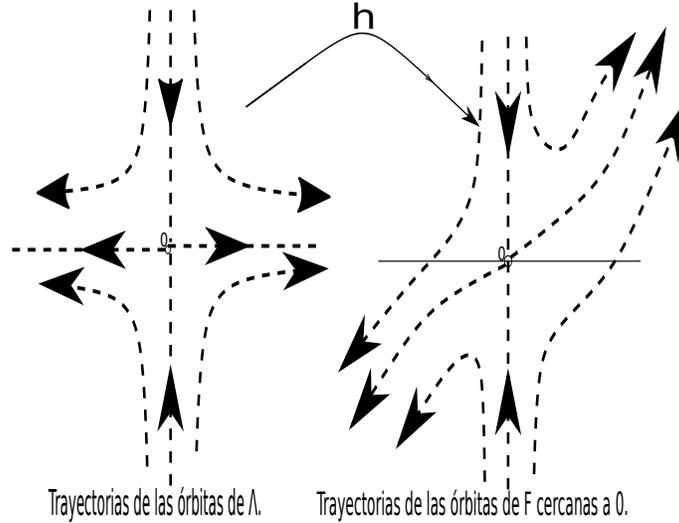


Figura 2: Posible interpretación geométrica del Teorema 2.19.

**Demostración:** Por el Lema 2.17, tenemos que, dado  $\delta > 0$  existe una vecindad  $\tilde{U} = \tilde{U}(0)$ , una función  $f \in C_b^0(E)$ , con  $Lip(f) \leq \delta$  y  $\tilde{F} := (\Lambda + \phi) : E \mapsto E$  tal que  $\tilde{F}|_{\tilde{U}} = F|_{\tilde{U}}$ . Por el Teorema 2.16, para un  $\delta > 0$  suficientemente pequeño, existe un homeomorfismo  $\Phi(x) = x + \phi(x)$ , con  $\phi \in C_b^0(E)$ , que además es  $\alpha$ -Hölder, para  $\alpha < \alpha_0(\Lambda)$ , cuya inversa es  $\Phi^{-1} = \Psi(x) = x + \psi(x)$ , con  $\psi \in C_b^0(E)$ , que además es  $\alpha$ -Hölder, de modo que  $\Phi \circ \Lambda = \tilde{F} \circ \Phi$ . Finalmente, si definimos  $h = \Phi|_U$ , donde  $U = \Phi^{-1}(\tilde{U})$  se tiene que  $h \circ \Lambda = F \circ h$ . Lo cual finaliza la prueba del Teorema.

*Observación 2.20.* Si en el Teorema de Grobman-Hartman consideramos un punto fijo de  $F$  con  $a \neq 0$ , podemos hacer una translación y llevarlo al origen. En efecto, considere  $T : E \rightarrow E$ ,  $T(x) = x + a$  y sea  $g = T^{-1}FT$ , entonces  $g$  satisface las condiciones del Teorema 2.19. Así, si  $k$  es tal que  $k\Lambda = gk$ , localmente, donde  $\Lambda = DF(a)$ . Lo que nos lleva a  $\underbrace{Tk}_h \Lambda = F \underbrace{Tk}_h$ .

*Observación 2.21.* Si  $E$  es un espacio de Banach de dimensión finita, por el principio de la invariancia del dominio, se tendría que  $h(U)$  es abierto.

## 2.4 El Teorema de Grobman-Hartman para un mapa de Hénon

Considere la aplicación de Hénon  $H_{11}(x, y) = (1 + y - x^2, x)$ . Note que las órbitas de la aplicación de Hénon son  $\{(x_{n+1}, y_{n+1})\}$ , donde  $x_{n+1} = 1 + y_n - x_n^2$ ,  $y_{n+1} = x_n$ . Resolviendo el sistema  $H_{11}(x, y) = (x, y)$ , tenemos que  $H_{11}$  tiene dos puntos fijos  $(1, 1)$  y  $(-1, -1)$ . Luego, haciendo los cálculos obtenemos que los espectros  $\sigma(DH_{11}(1, 1))$  y  $\sigma(DH_{11}(-1, -1))$  son respectivamente

$$\lambda_1 = -1 + \sqrt{2} \approx 0,4142, \quad \lambda_2 = -1 - \sqrt{2} \approx -2,4142,$$

$$\lambda_1 = 1 + \sqrt{2} \approx 2,4142, \quad \lambda_2 = 1 - \sqrt{2} \approx -0,4142.$$

Luego, usando el Teorema de Linealización Hölder para el Teorema de Grobman-Hartman 2.19, tenemos que existen conjugaciones  $h_1, h_2$   $\alpha$ -Hölder, de modo que

$$h_1 \circ H_{11} = DH_{11}(1, 1) \circ h_1, \quad y \quad h_2 \circ H_{11} = DH_{11}(-1, -1) \circ h_2.$$

Esto quiere decir que en las vecindades de  $(1, 1)$  y  $(-1, -1)$  el comportamiento de la aplicación  $H_{11}$  son de tipo “silla”. Ver Figura 3.

## 3 Conclusiones

Antes de terminar este trabajo nos gustaría hacer algunas consideraciones finales:

- (i) Los resultados contenidos en este trabajo mejora la regularidad de la conjugación obtenida en los artículos [5], [6] [8] y [9].
- (ii) Aunque varias de las ideas del resultado de este trabajo fueron tomadas del preprint [2], desafortunadamente, el estilo de presentación en ese trabajo difícilmente puede ser reconocido como completamente satisfactorio porque todas las pruebas sólo están esbozadas y para su realización necesita, de hecho, alguna experiencia y conocimiento previo para comprender y terminar los detalles de las pruebas que son bastante técnicas en la visión de los autores.
- (iii) Queremos salientar que todos los artículos que aparecen en linealización son bastante técnicos, por ello son susceptibles a contener errores, muchos de ellos son apuntados en el libro de [3, Págs. 188-192], por esta razón nos propusimos a probar todos los detalles sueltos contenidos en [2].
- (iv) El Teorema de Linealización Global (Teorema 2.16) difiere del trato dado en [2], debido que pretendemos usar dicho Teorema para obtener resultados similares de conjugaciones Hölder para campos vectoriales.

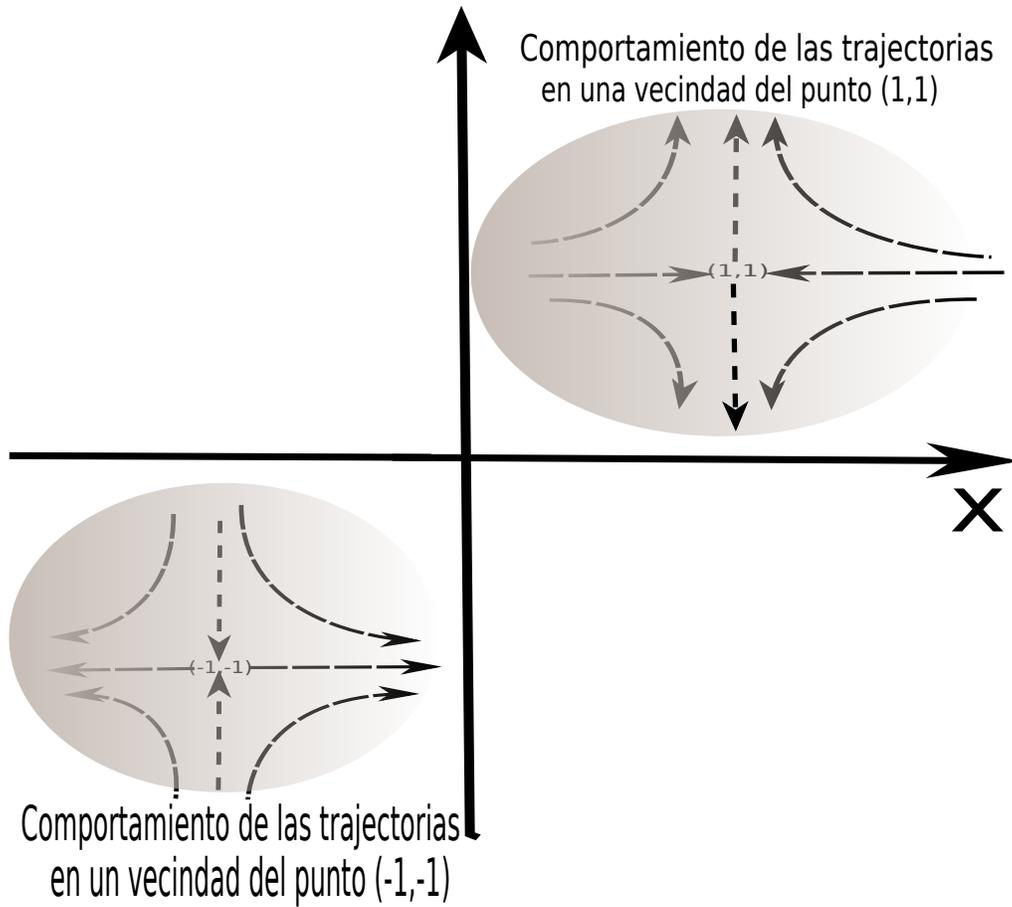


Figura 3: Posibles trayectorias del mapa de Hénon  $H_{11}$  alrededor de sus puntos fijos .

- (v) Usando las ideas de Belinskii-Rayskin [2], Barreira y Vals [1] prueban la existencia de una linealización Hölder Grobman-Hartman para secuencias de mapas.

## Referências

- [1] Barreira, Luis.; Valls, Claudia.: Hölder Grobman-Hartman linearization. *Discrete Contin. Dyn. Syst.* **18** (2007), no. 1, 187–197.
- [2] Belitskii, G.; Rayskin, V.: On Grobman-Hartman theorem in  $\alpha$ -Hölder. (2011). Disponible en: <[https://web.ma.utexas.edu/mp\\_arc/c/11/11-134.pdf](https://web.ma.utexas.edu/mp_arc/c/11/11-134.pdf)>. Acceso el: 05 July. 2021.
- [3] Bronshtein, I. U.; Kopanskii, A. Y. *Smooth Invariant Manifolds and Normal Forms*, Bronshtein, I. U.; Kopanskii, A. Y. World Scientific Series on Nonlinear Science. Series a, Monographs and Treatises, V. 7: World Scientific Pub Co Inc, 1994.
- [4] Cabré, Xavier.; Fontich, Ernest.; de la Llave, Rafael.: The parameterization method for invariant manifolds I: Manifolds associated to non-resonant subspaces. *Indiana University Mathematics Journal.* **52** (2003), no. 2, 283–328.
- [5] Grobman, D. M.: Homeomorphism of systems of differential equations. *Dokl. Akad. Nauk SSSR.* **128** (1959), 880–881.
- [6] Hartman, P.: A lemma in the theory of structural stability of differential equations. *Proc. Amer. Math. Soc.* **11** (1960), 610–620.
- [7] Mello, W. ; Palis, J. J. *Geometric Theory of Dynamical Systems: An Introduction*, Jacob Palis, Jr.; Welington de Melo, Springer-Verlag New York, 1 edition, 1982.
- [8] Palis, J. J.: On the local structure of hyperbolic points in Banach spaces. *An. Acad. Brasil. Ci.* **40** (1968), 263–266.
- [9] Pugh, Charles. C.: On a theorem of P. Hartman. *American Journal of Mathematics.* **91** (1969), no. 2, 363–367.
- [10] Vidarte, José.: Hölder Linealización del Teorema Grobman-Hartman. Tesis de Licenciatura, UNMSM, (2020). Disponible en: <<https://cybertesis.unmsm.edu.pe/handle/20.500.12672/11566?>>.