Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática

https://doi.org/10.34179/revisem.v7i1.16202

NÚMEROS DE BALL GENERALIZADOS

Eudes Antonio Costa
Matemática/Arraias/UFT
eudes@uft.edu.br
Ronaldo Antonio dos Santos
IME/UFG
rasantos@ufg.br

Resumo

Um estudo sobre os números *mágicos de Ball* na base 10 e algumas propriedades são apresentadas em Costa [4] e em Costa e Mesquita [5]. Neste último os autores mostraram que todo número *mágico de Ball* é múltiplo de 99, enquanto que em [4] é mostrada a relação entre a quantidade de números *mágicos de Ball* e a sequência de Fibonacci. Neste trabalho estendemos o conceito de número *mágico de Ball* para qualquer base numérica $b > 2$, números *mágicos de Ball generalizados*. Exibimos algumas propriedades e mostramos que para qualquer base $b > 2$, o número *mágico de Ball generalizado* é múltiplo de $(aa)_b$, em que $a = b - 1$. Além disso, seguindo Webster [10] e Costa [4], apresentamos uma relação entre os números *mágicos de Ball generalizados* e a sequência de Fibonacci.
Palavras-chave: Números de Ball, Sequência de Fibonacci , Números Mágicos de Ball.

Abstract

A study on *Ball's magic numbers* in base 10 and some properties are considered in Costa [4] and Costa and Mesquita [5]. In the first the authors proved that every *Ball's magic numbers* are multiple of 99, while in [4] a relationship between the quantity of *Ball's magic numbers* and the Fibonacci sequence is showned. In this work we extend the concept of *Ball's magic number* for any base $b > 2$, *generalized Ball's magic number*. We show some properties and prove that, for any base $b > 2$, the *generalized Ball's magic number* is a multiple of $(aa)_b$, where $a = b - 1$. Furthermore, following Webster [10] and Costa [4], we present a relationship between the *generalized Ball's magic numbers* and the Fibonacci sequence.
Keywords: Ball Numbers, Fibonacci Sequence, Magic Ball Numbers.

1 Introdução

Recordamos que nosso sistema de numeração usual é o sistema decimal posicional. Esse sistema nos permite representar os números inteiros utilizando o conjunto de algarismos $D = \{0, 1, \ldots, 9\}$. Um número escrito da forma 238 significa 8 unidades, 3 dezenas e 2 centenas. O agrupamento de dez unidades em uma dezena, ou dez dezenas em uma centena e sucessivamente, bem como as operações elementares, são vivenciados no início de nossa vida escolar.

Dado um número inteiro positivo x_n, no sistema decimal, constituído de n algarismos, isto é, um número do tipo $x_n = a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_2a_1a_0$, para todo i temos $a_i \in D$ com $n \geq 2$ e $a_{n-1} \neq 0$ é representado por

$$x_n = a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \cdots a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \ .$$

Assim nestas notas, x_n representa um número inteiro positivo qualquer composto por n algarismos, com $n \geq 2$ e $a_{n-1} \neq 0$. Para $n \geq 2$, o número de n algarismos obtido pela inversão da posição dos algarismos de x_n é chamado de número reverso de x_n e é indicado por x'_n, logo $x'_n = a_0 \ldots a_{n-1}$. Consideremos o seguinte algoritmo:

Algoritmo 1.1. : **O Número de Ball B.**

1. Considere um número x_n;
2. Escreva o número reverso x'_n;
3. Encontre o valor absoluto da diferença entre estes números, representado por $y_n = |x_n - x'_n| = b_{n-1}b_{n-2}\cdots b_2b_1b_0$ (O qual deve-se considerar como um número de n algarismos, mesmo quando o algarismo b_{n-1} for zero.);
4. Escreva o número reverso y'_n;
5. Escreva o número $B = y_n + y'_n$.

Exemplo 1.2. Para $n = 2$, considere $x_2 = 71$ e $x'_2 = 17$, assim $y_2 = 54$ e $y'_2 = 45$. Donde obtemos que $B = 54 + 45 = 99$.
Para $n = 3$, tomemos $x_3 = 843$, assim temos $x'_3 = 348$, donde obtemos $y_3 = 843 - 348 = 495$. Finalmente, temos que $B = 495 + 594 = 1089$.

Inspirados por Rouse Ball [2, 1926] e Ball [1, 2005, pág. 48], que exibem 1089 como o número resultante para $n = 3$, como no Exemplo 1.2, definimos:

Definição 1.3. *Para qualquer $B \neq 0$, chamamos B de número **mágico de Ball**, ou simplesmente de número de Ball, se ele for o resultado do Algoritmo 1.1 .*

Quando $x_n > x'_n$, de forma simplificada obtemos o número de *Ball* fazendo $B = (x_n - x'_n) + (x_n - x'_n)'$.

Para qualquer $x_3 = a_2a_1a_0$, com $a_2 \neq a_0$, como no Exemplo (1.2), o resultado final sempre será o número 1089. O mesmo fato ocorre quando temos um número inicial $x_2 = a_1a_0$ com $a_1 \neq a_0$, sempre obteremos o número 99 no final. Portanto, 99 e 1089 são exemplos de números mágicos de *Ball*. Em Rouse Ball[2], ou Ball[1], os autores exibem 1089 como o número resultante para todo o número x_3, como no Exemplo 1.2.

Em Rouse Ball[2] o autor apresenta uma justificativa para o Algoritmo (1.1) retornar o número 1089 quando $n = 3$, e independentemente em Costa [3]. Na verdade, em [2] observa-se que o Algoritmo (1.1) resulta em 9×11^2, ou seja, 1089. Enquanto em [5, 10] propõem o Algoritmo (1.1) para todo número inteiro positivo x_n para quaisquer $n \geq 2$, e não apenas para $n = 3$ como em Ball[1].

Ainda em Costa e Mesquita [5], os autores apresentam algumas propriedades dos números de *Ball*. Dentre as quais destacamos:

Proposição 1.4. *[5, Afirmação 1] Considere $x_n = a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1a_0$ para n par, ou seja,*

$$x_n = a_{2k-1}a_{2k-2}\cdots a_{k+1}a_ka_{k-1}a_{k-2}\cdots a_1a_0.$$

O número mágico B existe (é distinto de zero) desde que uma das condições ocorra:

$$a_{2k-1} \neq a_0 \text{ ou } a_{2k-2} \neq a_1 \text{ ou } \cdots \text{ ou } a_{k+1} \neq a_{k-2} \text{ ou } a_k \neq a_{k-1}.$$

Proposição 1.5. *[5, Afirmação 2] Considere $x_n = a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1a_0$ para n ímpar, ou seja,*

$$x_n = a_{2k}a_{2k-1}\cdots a_{k+2}a_{k+1}a_ka_{k-1}a_{k-2}\cdots a_1a_0.$$

O número mágico B existe (é distinto de zero) desde que uma das condições ocorra:

$$a_{2k} \neq a_0 \text{ ou } a_{2k-1} \neq a_1 \text{ ou } \cdots \text{ ou } a_{k+2} \neq a_{k-2} \text{ ou } a_{k+1} \neq a_{k-1}.$$

Proposição 1.6. *[5, Afirmação 3] Todo número de Ball B é múltiplo não nulo de* 99.

Outro resultado interessante é sobre a quantidade de números de *Ball* associado ao número x_n com $n = 2k$ algarismos (ou $n = 2k + 1$ algarismos), visto no trabalho de Webster[10] (ou Costa[4]), tal resultado expressa $B(k)$ como a soma de termos (de índice par) da sequência de Fibonacci,

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144, \ldots \tag{1.1}$$

isto é, a sequência F_j dada pela recorrência $F_{j+2} = F_{j+1} + F_j$ para todo $j \geq 1$, veja [9].

Proposição 1.7. *[10], [4, Teorema 2.2] Para um número natural x_{2k} com $2k$ algarismos, para todo $k \geq 1$, a quantidade de números de Ball $B(k)$ é $F_{2k} + F_{2(k-1)} + \cdots + F_2$, em que F_j é o termo de posição j da sequência de Fibonacci (7.1).*

Na sequência do trabalho, procuramos explorar propriedades aritméticas dos números de *Ball B* em outra base numérica b, além da decimal. Aqui faremos uso constante de operações em bases não decimais. Para um leitor menos familiarizado recomendamos Domingues[6], Fomin [7] ou Silva[8].

2 Números Mágicos de *Ball* na base b

De agora em diante fixemos (um inteiro) $b > 2$ outro sistema de base numérica e n é um inteiro positivo na base decimal. Denotemos por $(x_n)_b$ um número inteiro positivo com n algarismos na base b, ou seja, $(x_n)_b = (a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1a_0)_b$, com $n \geq 2$ e $a_{n-1} \neq 0$. Portanto, $(x_n)_b$ indica

$$(x_n)_b = a_{n-1} \cdot b^{n-1} + a_{n-2} \cdot b^{n-2} + \cdots + a_2 \cdot b^2 + a_1 \cdot b^1 + a_0 \ .$$

De igual modo, para $n \geq 2$, o número de n algarismos obtido pela inversão da posição dos algarismos de $(x_n)_b$ é chamado de número reverso (na base b) de $(x_n)_b$ e é indicado por $(x'_n)_b$, logo $(x'_n)_b = (a_0 \ldots a_{n-1})_b$. Agora consideremos o seguinte algoritmo:

Algoritmo 2.1. : **O Número de Ball Generalizado B_b.**

1. Considere um número $(x_n)_b$;
2. Escreva o número reverso $(x'_n)_b$;
3. Encontre o número (positivo) $(y_n)_b = |(x_n)_b - (x'_n)_b|$ (O qual deve sempre ser considerado como um número de n algarismos);
4. Escreva o número reverso $(y'_n)_b$;
5. Obtenha o número $B_b = (y_n)_b + (y'_n)_b$.

Definição 2.2. *Para qualquer $B_b \neq 0$, chamamos B_b de número **mágico de Ball generalizado**, ou simplesmente, número de Ball generalizado, se ele for o resultado do Algoritmo 2.1 .*

Quando $(x_n)_b > (x'_n)_b$, de forma simplificada obtemos o número de *Ball* generalizado fazendo $B_b = (x_n - x'_n)_b + (x_n - x'_n)'_b$.

Exemplo 2.3. Consideremos a base $b = 7$ e $n = 2$, assim temos um número inicial $(x_2)_7 = (a_1a_0)_7$, com $a_1 \neq a_0$, assim $(x_2')_7 = (a_0a_1)_7$. Para obtermos $(y_2)_7$ façamos

$$\begin{aligned}(y_2)_7 &= (x_2)_7 - (x_2')_7 \\ &= [a_1 \cdot 7 + a_0] - [a_0 \cdot 7 + a_1] \\ &= [(a_1 - 1) \cdot 7 + (a_0 + 7)] - [a_0 \cdot 7 + a_1] \\ &= (a_1 - 1 - a_0) \cdot 7 + (a_0 + 7 - a_1)\ .\end{aligned}$$

Obtemos que $(y_2')_7 = (a_0 + 7 - a_1) \cdot 7 + (a_1 - 1 - a_0)$. Agora

$$\begin{aligned}(B)_7 &= (y_2)_7 + (y_2')_7 \\ &= [(a_1 - 1 - a_0) \cdot 7 + (a_0 + 7 - a_1)] + [(a_0 + 7 - a_1)7 + (a_1 - 1 - a_0)] \\ &= 6 \cdot 7 + 6\ .\end{aligned}$$

Segue da Definição 2.2 que $(B)_7 = (66)_7$ é um número *de Ball* na base 7.

Exemplo 2.4. Para a base $b = 12$ e $n = 3$, teremos um número inicial $(x_3)_{12} = (a_2a_1a_0)_{12}$. Se tivermos $a_2 \neq a_0$, obteremos que $(10\alpha\beta)_{12}$ é o número de *Ball* na base 12 (Verifique!), considerando $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \alpha, \beta\}$ o conjunto de algarismos para a base 12.

Nosso objetivo nestas notas é mostrar os seguintes resultados. Correlatos aos obtidos em [4, 5, 10].

Proposição 2.5. *Considere $(x_n)_b$ com n natural par, ou seja,*

$$(x_n)_b = (a_{2k-1}a_{2k-2} \cdots a_{k+1}a_ka_{k-1}a_{k-2} \cdots a_1a_0)_b.$$

O número mágico B_b existe (é distinto de zero) desde que uma das condições ocorra:

$$a_{2k-1} \neq a_0 \text{ ou } a_{2k-2} \neq a_1 \text{ ou } \cdots \text{ ou } a_{k+1} \neq a_{k-2} \text{ ou } a_k \neq a_{k-1}.$$

Proposição 2.6. *Considere $(x_n)_b$ com n natural ímpar, ou seja,*

$$(x_n)_b = (a_{2k}a_{2k-1} \cdots a_{k+2}a_{k+1}a_ka_{k-1}a_{k-2} \cdots a_1a_0)_b.$$

O número mágico B_b existe (é distinto de zero) desde que uma das condições ocorra:

$$a_{2k} \neq a_0 \text{ ou } a_{2k-1} \neq a_1 \text{ ou } \cdots \text{ ou } a_{k+2} \neq a_{k-2} \text{ ou } a_{k+1} \neq a_{k-1}.$$

Nosso principal resultado é mostrar que

Teorema 2.7. *Todo número de Ball B_b na base b é múltiplo não nulo de $b^2 - 1$.*

Outro fato importante é a quantidade de números de *Ball* generalizados associado a um número $(x_n)_b$ com $n = 2k$ algarismos (ou $n = 2k + 1$ algarismos) é (também) a soma de termos da sequência de Fibonacci, isto é,

Teorema 2.8. *Para um número natural $(x_{2n+1})_b$ com $2n + 1$ algarismos, para todo $n \geq 1$, a quantidade de números de Ball generalizado $B_b(2n+1)$ é $F_{2n}+F_{2(n-1)}+\cdots+F_2$, em que F_j é o termo de posição j da sequência de Fibonacci.*

As duas primeiras afirmações são sobre a existência (condição de existência) do número mágico de *Ball* B_b (não nulo), para um número inicial $(x_n)_b$ com $n \geq 2$. O Teorema 2.7 afirma que B_b é sempre múltiplo de $b^2 - 1$, ou seja, um múltiplo de $b - 1$ e $b + 1$; para este resultado apresentaremos duas demonstrações. Enquanto no Teorema 2.8 temos a surpreendente conexão entre a quantidade de números de *Ball* generalizados e a sequência de Fibonacci, mesmo em uma base $b \neq 10$.

3 Casos Particulares

Nesta seção apresentamos alguns casos particulares, com o intuito de explorar didaticamente um pouco mais do Algoritmo 2.1 e das operações de adição e multiplicação em uma base $b > 2$, pensando em um leitor com menos experiência em outras bases numéricas. Para um leitor mais experiente é possível suprimir a leitura desta seção, evitando que se tornem repetitivas e enfadonhas as demonstrações .

De agora em diante, sem perda de generalidade, admitamos que $(x_n)_b > (x'_n)_b$, e assim temos $(y_n)_b = (x_n)_b - (x'_n)_b > 0$.

Proposição 3.1. *Seja $(x_2)_b = (a_1a_0)_b$, com $a_1 > a_0$, e B_b o número obtido ao executar o Algoritmo 2.1. Então, $B_b = (aa)_b$, em que $a = b - 1$.*

Demonstração. Temos $(x_2)_b = a_1b + a_0$, com $a_1 > a_0$ dessa forma,

$$\begin{aligned}(y_2)_b &= (a_1a_0)_b - (a_0a_1)_b \\ &= a_1b + a_0 - (a_0b + a_1) \\ &= (a_1 - a_0)b + (a_0 - a_1)\ .\end{aligned}$$

Como $a_1 > 0$, façamos

$$\begin{aligned}(y_2)_b &= (a_1 - a_0)b + (a_0 - a_1) \\ &= (a_1 - a_0 - 1)b + (a_0 - a_1 + b)\ .\end{aligned}$$

Somando o número obtido com o seu reverso, temos o número mágico B_b

$$\begin{aligned} B_b &= (a_1 - a_0 - 1)b + (a_0 - a_1 + b) + (a_0 - a_1 + b)b + (a_1 - a_0 - 1) \\ &= (b-1)b + (b-1) \\ &= (aa)_b \; . \end{aligned}$$

$\square$

Exemplo 3.2. Para $b = 3$ e $n = 2$ temos $B_3 = (22)_3$. Enquanto que se tivermos $b = 8$ então $B_8 = (77)_8$.

Proposição 3.3. *Seja $(x_3)_b = (a_2a_1a_0)_b$, com $a_2 > a_0$, e B_b o número obtido ao executar o Algoritmo 2.1. Então $B_b = \big(10ca\big)_b$, em que $a = b-1$ e $c = b-2$.*

Demonstração. Seja $a_2b^2 + a_1b + a_0$, com $a_2 > a_0$ dessa forma,

$$\begin{aligned} (y_3)_b &= (a_2a_1a_0)_b - (a_0a_1a_2)_b \\ &= a_2b^2 + a_1b + a_0 - (a_0b^2 + a_1b + a_2) \\ &= a_2b^2 + (a_1 - 1)b + a_0 + b - a_0b^2 - a_1b - a_2 \\ &= (a_2 - 1)b^2 + ((a_1 - 1)b + b^2) + (a_0 + b) - a_0b^2 - a_1b - a_2 \\ &= (a_2 - a_0 - 1)b^2 + (b-1)b + (a_0 - a_2 + b) \; . \end{aligned}$$

Somando o número obtido com o seu reverso, temos o número mágico B_b

$$\begin{aligned} B_b &= (a_2 - a_0 - 1)b^2 + (b-1)b + (a_0 - a_2 + b) + \\ &\quad + (a_0 - a_2 + b)b^2 + (b-1)b + (a_2 - a_0 - 1) \\ &= (b-1)b^2 + 2(b-1)b + (b-1) \\ &= 1b^3 + 0b^2 + (b-2)b + b - 1 \\ &= \big(10(b-2)(b-1)\big)_b \; . \end{aligned}$$

Fazendo $a = b - 1$ e $c = b - 2$, obtemos o resultado.

Ademais veja que

$$\begin{aligned} B_b &= \big(10(b-2)(b-1)\big)_b \\ &= b^3 + b^2 - b - 1 \\ &= (b-1) \cdot (b^2 + 2b + 1) \\ &= (b-1)_b \cdot (121)_b \\ &= (a \cdot 11 \cdot 11)_b \; . \end{aligned}$$

$\square$

Observação 3.4. Da Proposição 3.3 percebemos por que consideramos $b > 2$.

Exemplo 3.5. No caso em que $b = 10$ e $n = 3$ temos que $B_{10} = 9 \cdot 11^2 = 9 \cdot 121 = 1089$ (Exemplo 1.2). Enquanto que para $b = 7$ temos que

$$\begin{aligned} B_7 &= \big((7-1) \cdot 11^2\big)_7 \\ &= \big(6 \cdot 121\big)_7 \\ &= (1056)_7 \,. \end{aligned}$$

Proposição 3.6. *Seja $(x_4)_b = (a_3a_2a_1a_0)_b$, com $a_3 \neq 0$, e B_b o número obtido ao executar o Algoritmo 2.1. Então:*

$$\begin{array}{llll} B_b & = (10ca0)_b & = b^4 + b^3 - b^2 - b & \textit{se } a_3 > a_0 \textit{ e } a_2 > a_1; \\ B_b & = (aaaa)_b & = b^4 - 1 & \textit{se } a_3 > a_0 \textit{ e } a_2 < a_1; \\ B_b & = (10aca)_b & = b^4 + b^3 - b - 1 & \textit{se } a_3 > a_0 \textit{ e } a_2 = a_1; \\ B_b & = (aa0)_b & = b^3 - b & \textit{se } a_3 = a_0 \textit{ e } a_2 > a_1 \,, \end{array}$$

em que $a = b - 1$ e $c = b - 2$.

Demonstração. Temos que $(x_4)_b = a_3b^3 + a_2b^2 + a_1b + a_0$. Primeiro faremos o caso em que $a_3 > a_0$ e $a_2 > a_1$ dessa forma,

$$\begin{aligned} (y_4)_b &= (a_3a_2a_1a_0)_b - (a_0a_1a_2a_3)_b \\ &= a_3b^2 + a_2b^2 + a_1b + a_0 - (a_0b^3 + a_1b^2 + a_2b + a_3) \\ &= (a_3 - a_0)b^3 + (a_2 - a_1)b^2 + (a_1 - a_2)b + (a_0 - a_3) \,. \end{aligned}$$

Observe que $a_1 - a_2$ e $a_0 - a_3$ são negativos. Para que os coeficientes das potências de b sejam positivos, escrevemos

$$\begin{aligned} (y_4)_b &= (a_3 - a_0)b^3 + (a_2 - a_1 - 1)b^2 + (a_1 - a_2 + b)b + (a_0 - a_3) \\ &= (a_3 - a_0)b^3 + (a_2 - a_1 - 1)b^2 + (a_1 - a_2 + b - 1)b + (a_0 - a_3 + b) \,. \end{aligned}$$

Donde obtemos que,

$$(y_4')_b = (a_0 - a_3 + b)b^3 + (a_1 - a_2 + b - 1)b^2 + (a_2 - a_1 - 1)b + (a_3 - a_0) \,.$$

Agora adicionando $(y_4)_b$ e $(y_4')_b$ obtemos o número mágico B_b

$$\begin{aligned} B_b &= (b \cdot b^3 + (b-2)b^2 + (b-2)b + b)_b \\ &= (b^4 + 0 \cdot b^3 + (b-2)b^2 + (b-1)b + 0)_b \\ &= (10ca0)_b \,, \end{aligned}$$

fizemos $a = b-1$ e $c = b-2$. Por fim, temos que

$$(b^4 + (b-2)b^2 + (b-1)b)_b = b^4 + b^3 - b^2 - b\ .$$

Faremos agora o caso em que $a_3 > a_0$ e $a_2 < a_1$. De igual maneira

$$\begin{aligned}(y_4)_b &= (a_3a_2a_1a_0)_b - (a_0a_1a_2a_3)_b \\ &= a_3b^2 + a_2b^2 + a_1b + a_0 - (a_0b^3 + a_1b^2 + a_2b + a_3) \\ &= (a_3 - a_0)b^3 + (a_2 - a_1)b^2 + (a_1 - a_2)b + (a_0 - a_3)\ .\end{aligned}$$

Neste caso, $a_2 - a_1 < 0$ e $a_0 - a_3 < 0$. Para que os coeficientes das potências de b sejam positivos, escrevemos

$$(y_4)_b = (a_3 - a_0 - 1)b^3 + (a_2 - a_1 + b)b^2 + (a_1 - a_2 - 1)b + (a_0 - a_3 + b).$$

Donde obtemos que,

$$(y_4')_b = (a_0 - a_3 + b)b^3 + (a_1 - a_2 - 1)b^2 + (a_2 - a_1 + b)b + (a_3 - a_0 - 1).$$

Por fim adicionando $(y_4)_b$ e $(y_4')_b$ obtemos o número mágico B_b

$$\begin{aligned}B_b &= (b-1)b^3 + (b-1)b^2 + (b-1)b + (b-1) \\ &= \big(aaaa\big)_b\ ,\end{aligned}$$

fizemos $a = b-1$. Veja ainda que

$$\begin{aligned}B_b &= (b-1)b^3 + (b-1)b^2 + (b-1)b + (b-1) \\ &= b^4 - 1\ .\end{aligned}$$

Façamos agora o caso em que $a_3 > a_0$ e $a_2 = a_1$. De igual maneira

$$\begin{aligned}(y_4)_b &= (a_3a_2a_2a_0)_b - (a_0a_2a_2a_3)_b \\ &= a_3b^2 + a_2b^2 + a_2b + a_0 - (a_0b^3 + a_2b^2 + a_2b + a_3) \\ &= (a_3 - a_0)b^3 + (a_2 - a_2)b^2 + (a_2 - a_2)b + (a_0 - a_3) \\ &= (a_3 - a_0)b^3 + 0 \cdot b^2 + 0 \cdot b + (a_0 - a_3)\ .\end{aligned}$$

Temos que $a_0 - a_3 < 0$. Para que os coeficientes das potências de b sejam positivos, escrevemos

$$(y_4)_b = (a_3 - a_0 - 1)b^3 + (b-1) \cdot b^2 + (b-1) \cdot b + (a_0 - a_3 + b).$$

Donde obtemos que,

$$(y_4')_b = (a_0 - a_3 + b)b^3 + (b-1)b^2 + (b-1)b + (a_3 - a_0 - 1).$$

Por fim adicionando $(y_4)_b$ e $(y_4')_b$ obtemos o número mágico B_b

$$\begin{aligned} B_b &= (b-1)b^3 + 2(b-1)b^2 + 2(b-1)b + (b-1) \\ &= b^4 + 0 \cdot b^3 + (b-1)b^2 + (b-2)b + (b-1) \\ &= (10aca)_b \ , \end{aligned}$$

fizemos $a = b-1$ e $c = b-2$. Veja ainda que

$$\begin{aligned} B_b &= (b-1)b^3 + 2(b-1)b^2 + 2(b-1)b + (b-1) \\ &= b^4 + b^3 + 0 \cdot b^2 - b - 1 \ . \end{aligned}$$

Por fim faremos agora o caso em que $a_3 = a_0$ e $a_2 > a_1$. De igual maneira

$$\begin{aligned} (y_4)_b &= (a_3a_2a_1a_3)_b - (a_3a_1a_2a_3)_b \\ &= (a_2 - a_1)b^2 + (a_1 - a_2)b \ . \end{aligned}$$

Temos que $a_1 - a_2 < 0$. Para que os coeficientes das potências de b sejam positivos, escrevemos

$$(y_4)_b = (a_2 - a_1 - 1)b^2 + (a_1 - a_2 + b)b.$$

Donde obtemos que,

$$(y_4')_b = (a_1 - a_2 + b)b^2 + (a_2 - a_1 - 1)b.$$

Por fim adicionando $(y_4)_b$ e $(y_4')_b$ obtemos o número mágico B_b

$$\begin{aligned} B_b &= (b-1)b^2 + (b-1)b \\ &= (aa0)_b \ , \end{aligned}$$

fizemos $a = b-1$. Veja ainda que

$$\begin{aligned} B_b &= (b-1)b^2 + (b-1)b \\ &= b^3 - b \ . \end{aligned}$$

□

Exemplo 3.7. 1. No caso em que $b = 10$ e consideramos o número 7843, temos, $7843 - 3487 = 4359$ e $4359 + 9534 = 10890$.

2. Enquanto que se tivermos $b=7$ e o número $(5342)_7$, temos, $(5342)_7-(2435)_7=(2604)_7$ e $(2604)_7+(4062)_7=(6666)_7$.

3. Na base $b=9$ e o número $(6551)_9$, temos, $(6551)_9-(1556)_9=(4884)_9$ e $(4884)_9+(4884)_9=(10878)_9$.

Proposição 3.8. *Seja $(x_5)_b=(a_4a_3a_2a_1a_0)_b$, com $a_4\neq 0$, e B_b o número obtido ao executar o Algoritmo 2.1. Então:*

$$\begin{array}{lll} B_b & =(10aca0)_b=b^5+b^4-b^2-b, & \text{se } a_4>a_0 \text{ e } a_3>a_1;\\ B_b & =(aa0aa)_b=b^5-b^3+b^2-1, & \text{se } a_4>a_0 \text{ e } a_3<a_1;\\ B_b & =(10aaca)_b=b^5+b^4-b-1, & \text{se } a_4>a_0 \text{ e } a_3=a_1\\ B_b & =(10ca0)_b=b^4+b^3-b^2-b, & \text{se } a_4=a_0 \text{ e } a_3>a_1\ , \end{array}$$

em que $a=b-1$ e $c=b-2$.

Demonstração. Temos que $(x_5)_b=(a_4a_3a_2a_1a_0)_b$, faremos o primeiro caso, em que $a_4>a_0$ e $a_3>a_1$. Subtraindo de $(x_5)_b=(a_4a_3a_2a_1a_0)_b=a_4b^4+a_3b^3a_2b^2+a_1b+a_0$ o seu reverso, $x_5'(b)=(a_0a_1a_2a_3a_4)_b=a_0b^4+a_1b^3a_2b^2+a_3b+a_4$ obtemos,

$$(y_5)_b=(a_4-a_0)b^4+(a_3-a_1)b^3+(a_2-a_2)b^2+(a_1-a_3)b+(a_0-a_4)\ .$$

Observe que a_1-a_3 e a_0-a_4 são negativos. Para que os coeficientes das potências de b sejam positivos, escrevemos

$$(y_5)_b=(a_4-a_0)b^4+(a_3-a_1-1)b^3+(b-1)b^2+(a_1-a_3+b-1)b+(a_0-a_4+b)\ .$$

Donde obtemos

$$(y_5')_b=(a_0-a_4+b)b^4+(a_1-a_3+b-1)b^3+(b-1)b^2+(a_3-a_1-1)b+(a_4-a_0),$$

Assim

$$\begin{aligned} B_b &= (b\cdot b^4+(b-2)b^3+2(b-1)b^2+(b-2)b+b)_b\\ &= (b^5+0\cdot b^4+(b-1)b^3+(b-2)b^2+(b-1)b+0)_b\\ &= (10aca0)_b\ , \end{aligned}$$

em que fizemos $a=b-1$ e $c=b-2$. Basta verificar que

$$(b^5+(b-1)b^3+(b-2)b^2+(b-1)b)_b=b^5+b^4-b^2-b.$$

Faremos agora o caso em que $a_4 > a_0$ e $a_3 < a_1$. E assim

$$(y_5)_b = (a_4 - a_0)b^4 + (a_3 - a_1)b^3 + (a_2 - a_2)b^2 + (a_1 - a_3)b + (a_0 - a_4)\ .$$

Observe que $a_3 - a_1$ e $a_0 - a_4$ são negativos. Para que os coeficientes das potências de b sejam positivos, escrevemos

$$(y_5)_b = (a_4 - a_0 - 1)b^4 + (a_3 - a_1 + b)b^3 + (a_1 - a_3 - 1)b + (a_0 - a_4 + b)\ .$$

Donde obtemos

$$(y_5')_b = (a_0 - a_4 + b)b^4 + (a_1 - a_3 - 1)b^3 + (a_3 - a_1 + b)b + (a_4 - a_0 - 1).$$

Assim

$$\begin{aligned} B_b &= (b-1)b^4 + (b-1)b^3 + 0 \cdot b^2 + (b-1)b + (b-1) \\ &= (aa0aa)_b\ . \end{aligned}$$

adotamos $a = b - 1$. Por fim, verifique que

$$(b-1)b^4 + (b-1)b^3 + 0 \cdot b^2 + (b-1)b + (b-1) = b^5 - b^3 + b^2 - 1\ .$$

Façamos agora o caso em que $a_4 > a_0$ e $a_3 = a_1$. E assim

$$(y_5)_b = (a_4 - a_0)b^4 + (a_3 - a_3)b^3 + (a_2 - a_2)b^2 + (a_3 - a_3)b + (a_0 - a_4)\ .$$

Temos que $a_0 - a_4$ é negativo, assim para que os coeficientes das potências de b sejam positivos, escrevemos

$$(y_5)_b = (a_4 - a_0 - 1)b^4 + (b-1)b^3 + (b-1)b^2 + (b-1)b + (a_0 - a_4 + b)\ .$$

Donde obtemos

$$(y_5')_b = (a_0 - a_4 + b)b^4 + (b-1)b^3 + (b-1)b^2 + (b-1)b + (a_4 - a_0 - 1).$$

Assim

$$\begin{aligned} B_b &= (b-1)b^4 + 2(b-1)b^3 + 2(b-1)b^2 + 2(b-1)b + (b-1) \\ &= b^5 + 0 \cdot b^4 + (b-1)b^3 + (b-2)b^2 + (b-1)b + (b-1) \\ &= (10aaca)_b\ . \end{aligned}$$

adotamos $a = b - 1$ e $c = b - 2$. Por fim, verifique que

$$(b-1)b^4 + 2(b-1)b^3 + 2(b-1)b^2 + (b-1)b + (b-1) = b^5 + b^4 + 0 \cdot b^3 + 0 \cdot b^2 - b - 1 \ .$$

Por fim, faremos o caso em que $a_4 = a_0$ e $a_3 > a_1$. E assim

$$(y_5)_b = (a_4 - a_4)b^4 + (a_3 - a_1)b^3 + (a_2 - a_2)b^2 + (a_1 - a_3)b + (a_4 - a_4) \ .$$

Temos que $a_1 - a_3$ é negativo, assim para que os coeficientes das potências de b sejam positivos, escrevemos

$$(y_5)_b = (a_3 - a_1 - 1)b^3 + (b-1)b^2 + (a_1 - a_3 + b)b \ .$$

Donde obtemos

$$(y_5')_b = (a_1 - a_3 + b)b^3 + (b-1)b^2 + (a_3 - a_1 - 1)b.$$

Assim

$$\begin{aligned} B_b &= (b-1)b^3 + 2(b-1)b^2 + (b-1)b \\ &= b^4 + 0 \cdot b^3 + (b-2)b^2 + (b-1)b \\ &= (10ca0)_b \ . \end{aligned}$$

adotamos $a = b - 1$ e $c = b - 2$. Por fim, verifique que

$$(b-1)b^3 + 2(b-1)b^2 + (b-1)b = b^4 + b^3 - b^2 - b \ .$$

□

Exemplo 3.9.
1. Tomando $b = 10$ e o número 87352, temos que, $87352 - 25378 = 61974$ e $61974 + 47916 = 109890$.
2. Se fixarmos $b = 7$ e tomarmos o número $(53213)_7$, temos que, $(51233)_7 - (33215)_7 = (15015)_7$ e $(15015)_7 + (51051)_7 = (66066)_7$.
3. Na base $b = 9$ e o número $(65751)_9$, temos, $(65751)_9 - (15756)_9 = (48884)_9$ e $(48884)_9 + (48884)_9 = (108878)_9$.

Podemos seguir este processo para qualquer n inteiro positivo, mas parece-nos bastante enfadonho.

4 Demonstração das Proposições 2.5 e 2.6

Agora para mostrarmos que B_b não nulo existe para um número inicial $(x_n)_b \neq 0$, basta mostrarmos que $(y_n)_b = (x_n)_b - (x'_n)_b$ é não nulo, visto que se $(y_n)_b \neq 0$ acarreta $(y'_n)_b \neq 0$ e por consequência $B_b = (y_n)_b + (y'_n)_b \neq 0$. Façamos o caso em que $(x_n)_b$ possui uma quantidade par de algarismos. Assim, vamos a

Demonstração. **da Proposição 2.5.**
Sendo $(x_n)_b$ da forma

$$(x_n)_b = (a_{2k-1}a_{2k-2}\cdots a_{k+1}a_k a_{k-1}a_{k-2}\cdots a_1 a_0)_b,$$

isto é, com uma quantidade par de algarismos a_i, com $0 \leq a_i < b$. Então

$$(x'_n)_b = (a_0 a_1 \cdots a_{k-1}a_k \cdots a_{2k-2}a_{2k-1})_b.$$

Se $a_{2k-1} \neq a_0$ então já teremos $(y_n)_b = (x_n)_b - (x'_n)_b \neq 0$, caso contrário teremos $a_{2k-1} = a_0$. No caso em que $a_{2k-1} = a_0$, se tivermos $a_{2k-2} \neq a_1$ então $(y_n)_b = (x_n)_b - (x'_n)_b \neq 0$, caso contrário teremos também $a_{2k-2} = a_1$. Seguindo este raciocínio obtemos que $(x_n)_b = 0$ apenas quando

$$a_{2k-1} = a_0 \text{ e } a_{2k-2} = a_1 \text{ e } \cdots \text{ e } a_{k+1} = a_{k-2} \text{ e } a_k = a_{k-1}.$$

O que acarretaria que $(x_n)_b = (x'_n)_b$, porém estamos admitindo $(x_n)_b > (x'_n)_b$. Donde obtemos o resultado. □

Procedendo de modo similar mostra-se a Proposição 2.6, ou seja, a existência do número mágico B_b para um número inicial $(x_n)_b$, com uma quantidade ímpar de algarismos.

5 Primeira Demonstração do Teorema 2.7

Para organizar e facilitar a leitura, dividimos a nossa demonstração do Teorema 2.7 em resultados auxiliares apresentados nos Lemas a seguir. As demonstrações dos Lemas estão apoiadas em resultados clássicos de congruência que podem ser encontrados em Domingues[6] ou Silva[8].

5.1 Alguns resultados auxiliares

Lema 5.1. *Dados i, j inteiros positivos tem-se que $b^i - b^j$ é divisível por $a = b - 1$.*

Demonstração. Veja que $b = a + 1 = (b - 1) + 1$ assim temos que

$$b \equiv 1 \pmod{a}, \tag{5.1}$$

acarretando que

$$b^i \equiv 1 \pmod{a} \ \forall i \in \mathbb{N},$$

logo

$$b^i - b^j \equiv 0 \pmod{a} \ \forall i, j \in \mathbb{N}.$$

Portanto $b^i - b^j$ é divisível por a. □

Lema 5.2. *O resto da divisão de um número $(x_n)_b$ por a é igual ao resto da divisão da soma de seus algarismos por a, sendo $a = b - 1$.*

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned} (x_n)_b &= (a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1a_0)_b \\ &= a_{n-1}b^{n-1} + a_{n-2}b^{n-2} + \cdots + a_1b + a_0 \ . \end{aligned}$$

Da Equação 5.1, segue,

$$\begin{aligned} (x_n)_b &\equiv a_{n-1}1^{n-1} + a_{n-2}1^{n-2} + \cdots + a_11 + a_0 \pmod{a} \\ &\equiv a_{n-1} + a_{n-2}\cdots a_1 + a_0 \pmod{a} \ . \end{aligned}$$

Donde obtemos o resultado. □

Lema 5.3. *Seja $(z_n)_b$ um número inteiro com n algarismos e $(p_n)_b$ um número inteiro obtido de $(z_n)_b$ permutando seus algarismos. Se $(z_n)_b$ é divisível por $a = b - 1$ então também o é $(p_n)_b$.*

Demonstração. Sabemos que na adição de inteiros valem as propriedades associativa e comutativa, assim a soma dos algarismos do número inteiro $(z_n)_b$ é invariante por permutação. Do Lema 5.2 segue que, se $(z_n)_b$ é divísivel por a então também o é $(p_n)_b$. □

Lema 5.4. *Dados i, j inteiros positivos, com $i + j$ ímpar, tem-se que $b^i + b^j$ é divisível por $\alpha = b + 1$.*

Demonstração. Veja que $b = \alpha - 1 = (b+1) - 1$ assim temos que

$$b \equiv -1 \pmod{\alpha}.$$

Logo

$$b^i \equiv -1 \pmod{\alpha} \text{ para todo } i \text{ inteiro positivo ímpar, e}$$
$$b^j \equiv 1 \pmod{\alpha} \text{ para todo } j \text{ inteiro positivo par .}$$

Assim

$$b^i + b^j \equiv 0 \pmod{\alpha}.$$

Portanto $b^i + b^j$ é divisível por α, se $i + j$ for ímpar. □

Lema 5.5. *Sejam, $i > 0$ e $b > 2$ inteiros. Se $a = b - 1$ e $\alpha = b + 1$ então $b^{2i} - 1$ é divisível por $a \cdot \alpha = (11)_b$.*

Demonstração. Façamos $m = a \cdot \alpha = b^2 - 1$, segue que

$$b^2 \equiv 1 \pmod{m}.$$

Logo para qualquer inteiro positivo i temos

$$b^{2i} \equiv 1 \pmod{m}.$$

Assim,

$$b^{2i} - 1 \equiv 0 \pmod{m}.$$

□

Segue diretamente do Lema 5.5 que

Corolário 5.6. *Dado qualquer i inteiro positivo, tem-se que $b^{2i+1} - b$ é divisível por $a \cdot \alpha$.*

Aqui faremos dois casos particulares, de modo a ganhar uma melhor habilidade com a técnica.

Proposição 5.7. *Todo número mágico B_b é múltiplo de $a = b - 1$.*

Demonstração. Inicialmente consideremos o número $(x_n)_b$, com uma quantidade par de algarismos a_i. Vejamos

$$\begin{aligned} (x_n)_b &= (a_{2k-1}a_{2k-2}\cdots a_{k+1}a_k a_{k-1}a_{k-2}\cdots a_1 a_0)_b \ , \\ &= a_{2k-1}b^{2k-1} + a_{2k-2}b^{2k-2} + \cdots + a_k b^k + a_{k-1}b^{k-1} + \cdots + a_1 b^1 + a_0 \ , \end{aligned}$$

e assim

$$(x'_n)_b = a_0 b^{2k-1} + a_1 b^{2k-2} + \cdots + a_{k-1} b^k + a_k b^{k-1} + \cdots + a_{2k-2} b^1 + a_{2k-1},$$

fazendo $(y_n)_b = (x_n)_b - (x'_n)_b$, obtemos que

$$\begin{aligned} (y_n)_b &= a_{2k-1}(b^{2k-1} - 1) + a_{2k-2}(b^{2k-2} - b^1) + \cdots + a_k(b^k - b^{k-1}) + \\ &\quad + a_{k-1}(b^{k-1} - b^k) + \cdots + a_1(b^1 - b^{2k-2}) + a_0(1 - b^{2k-1}). \end{aligned}$$

Do Lema 5.1 temos que $(b^i - b^j)$ é divísivel por $\alpha = b - 1$ para quaisquer inteiros positivos $i,\ j$. Assim, obtemos que $(y_n)_b$ é múltiplo de c. Do Lema 5.2 temos que $(y'_n)_b$ também o é, visto que $(y'_n)_b$ possui os mesmos algarismos de $(y_n)_b$ em posição inversa. Concluímos que $B_b = (y_n)_b + (y'_n)_b$ é divisível por $a = b - 1$.

De modo similar obtém-se o resultado para um número x_n da forma

$$(x_n)_b = (a_{2k} a_{2k-1} \cdots a_{k+2} a_{k+1} a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0)_b,$$

isto é, com uma quantidade ímpar de algarismos a_i.

□

A seguir estabelecemos mais um critério de divisibilidade.

Proposição 5.8. *Todo número mágico B_b é múltiplo de $\alpha = b + 1$.*

Demonstração. Novamente consideremos um número $(x_n)_b$ como uma quantidade par de algarismos a_i, ou seja, da forma

$$(x_n)_b = (a_{2k-1} a_{2k-2} \cdots a_{k+1} a_k a_{k-1} a_{k-2} \cdots a_1 a_0)_b \ .$$

Escrevendo $(y_n)_b = (x_n)_b - (x'_n)_b$, na representação expandida, temos

$$(y_n)_b = z_{2k-1} b^{2k-1} + z_{2k-2} b^{2k-2} + \cdots + z_k b^k + z_{k-1} b^{k-1} + \cdots + z_1 b^1 + z_0,$$

$$(y'_n)_b = z_0 b^{2k-1} + z_1 b^{2k-2} + \cdots + z_{k-1} b^k + z_k b^{k-1} + \cdots + z_{2k-2} b^1 + z_{2k-1} \ .$$

Como $b^0 = 1$, temos

$$\begin{aligned} B_b &= (y_n)_b + (y'_n)_b \\ &= z_{2k-1}(b^{2k-1} + b^0) + z_{2k-2}(b^{2k-2} + b^1) + \cdots + z_k(b^k + b^{k-1}) + \\ &+ z_{k-1}(b^{k-1} + b^k) + \cdots + z_1(b^1 + b^{2k-2}) + z_1(b^0 + b^{2k-1}). \end{aligned}$$

Sendo $2k-1$ ímpar, segue do Lema 5.4 que $(b^{2k-1}+b^0)$, $(b^{2k-2}+b^1)$, $\dots$, (b^k+b^{k-1}) é múltiplo de α, e assim segue que B_b é divisível por $\alpha = b+1$.

De modo similar obtém-se o resultado para um número $(x_n)_b$ da forma

$$(x_n)_b = (a_{2k}a_{2k-1}\cdots a_{k+2}a_{k+1}a_k a_{k-1}\cdots a_1 a_0)_b,$$

isto é, com uma quantidade ímpar de algarismos a_i. $\square$

Observação 5.9. Até aqui temos que B_b múltiplo de $a = b-1$ (Proposição 5.7) e múltiplo de $\alpha = b+1$ (Proposição 5.8). Gostaríamos que B_b fosse múltiplo de $(a\cdot\alpha)_b = (aa)_b$. Para o caso em que b é par ocorre, por exemplo na base decimal, segue do fato que $mdc(a,\alpha) = 1$, ou seja, a e α são primos entre si. No entanto, se tivermos b ímpar não temos este último fato, pois como estamos tomando $b > 2$, temos que $mdc(a,\alpha) = 2$, assim a implicação não é direta.

5.2 Demonstração da Teorema 2.7

Primeiro façamos $m = a\cdot\alpha = b^2-1$, agora consideremos o número $(x_n)_b$, com uma quantidade ímpar de algarismos a_i. Vejamos

$$\begin{aligned}(x_n)_b &= (a_{2k}a_{2k-1}\cdots a_{k+1}a_k a_{k-1}a_{k-2}\cdots a_1 a_0)_b\\ &= a_{2k}b^{2k} + a_{2k-1}b^{2k-1} + \cdots + a_{k+1}b^{k+1} + a_k b^k + a_{k-1}b^{k-1} + \cdots + a_1 b^1 + a_0\ ,\end{aligned}$$

e assim

$$(x'_n)_b = a_0 b^{2k} + a_1 b^{2k-1} + \cdots + a_{k-1}b^{k+1} + a_k b^k + a_{k+1}b^{k-1} + \cdots + a_{2k-1}b^1 + a_{2k},$$

fazendo $(y_n)_b = (x_n)_b - (x'_n)_b$, obtemos que

$$\begin{aligned}(y_n)_b &= a_{2k}(b^{2k-1}-1) + a_{2k-1}(b^{2k-1}-b^1) + \cdots + a_{k+1}(b^{k+1}-b^{k-1}) +\\ &\quad + a_{k-1}(b^{k-1}-b^{k+1}) + \cdots + a_1(b^1-b^{2k-2}) + a_0(1-b^{2k}).\end{aligned}$$

Donde obtemos

$$\begin{aligned}(y_n)_b &= a_{2k}(b^{2k-1}-1) + a_{2k-1}b(b^{2k-2}-1) + \cdots + a_{k+1}b^{k-1}(b^2-1) +\\ &\quad + a_{k-1}b^{k-1}(1-b^2) + \cdots + a_1 b(1-b^{2k-2}) + a_0(1-b^{2k}).\end{aligned}$$

Do Lema 5.5 temos que $b^{2i}-1$ é divísivel por m para todo inteiro positivo i. E assim, obtemos que $(y_n)_b$ é múltiplo de m, por conseguinte $(y'_n)_b$ (ordem inversa dos algarismos a_i) e B_b também são múltiplo de m.

Também de modo similar obtém-se que o resultado para um número $(x_n)_b$ com uma quantidade par de algarismos a_i. $\square$

6 Segunda Demonstração da Teorema 2.7

Os números de *Ball* também foram abordados no belo trabalho de Webster[10]. Além do critério de divisibilidade, o autor também estabeleceu a quantidade de números de Ball em termos da quantidade de algarismos de um número na base 10. Nesta seção apresentamos uma demonstração adaptada do critério de divisibilidade para base uma b qualquer.

Como antes, seguindo nossa notação (e Algoritmo 2.1), sejam $(x_{n+1})_b$ um número com $n+1$ algarismos na base $b>2$ e $(x'_{n+1})_b$ seu reverso, considerado com $n+1$ algarismos mesmo se aparecer zeros à esquerda. Assim,

$$\begin{aligned} (x_{n+1})_b &= (a_n a_{n-1} \ldots a_{n-i} \ldots a_i \ldots a_1 a_0)_b, \\ (x'_{n+1})_b &= (a_0 a_1 \ldots a_i \ldots a_{n-i} \ldots a_{n-1} a_n)_b, \end{aligned}$$

com $a_n > a_0$. Podemos escrever

$$\begin{aligned} (x_{n+1})_b - (x'_{n+1})_b &= (a_n - a_0)b^n + (a_{n-1} - a_1)b^{n-1} + \cdots + (a_{n-i} - a_i)b^{n-i} + \\ &\quad + \cdots + (a_i - a_{n-i})b^i + \cdots + (a_1 - a_{n-1})b + (a_0 - a_n)\ . \end{aligned}$$

No entanto, a representação na base b exige que cada coeficiente seja maior ou igual a zero e menor que b. Em alguns casos, para que o coeficiente fique positivo, necessita deslocar b da ordem i para $i-1$ (o famoso deslocar uma dezena ou "empresta um" na base 10). Escrevemos,

$$\begin{aligned} (x_{n+1})_b - (x'_{n+1})_b &= (a_n - a_0 - z_{n-1})b^n + (a_{n-1} - a_1 - z_{n-2} + z_{n-1}b)b^{n-1} + \ldots \\ &\quad +(a_{n-i} - a_i - z_{n-i-1} + z_{n-i}b)b^{n-i} + \cdots + (a_i - a_{n-i} - z_{i-1} + z_i b)b^i + \\ &\quad \cdots + (a_1 - a_{n-1} - z_0 + z_1 b)b + (a_0 - a_n + z_0 b)\ . \end{aligned}$$

Definindo $z_{-1} = z_n = 0$ e recursivamente para z_i, $i = 0, \ldots, n-1$,

$$z_i = \begin{cases} 1; & \text{se } a_i - a_{n-i} - z_{i-1} < 0\ ; \\ 0; & \text{se } a_i - a_{n-i} - z_{i-1} \geq 0\ ; \end{cases}$$

e assim, segue que $0 \leq a_i - a_{n-i} - z_{i-1} + z_i b < b$ para $i = 0, \ldots, n-1$. Escrevemos

$$(y_n)_b = (x_{n+1})_b - (x'_{n+1})_b = \sum_{i=0}^{n} (a_i - a_{n-i} - z_{i-1} + z_i b)b^i\ .$$

Por hipótese, temos que $a_n > a_0$, logo $z_0 = 1$. E com esta notação podemos escrever um número de *Ball* da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
B_b &= (y_n)_b + (y'_n)_b \\
&= \sum_{i=0}^{n}((a_i - a_{n-i} - z_{i-1} + z_i b) + (a_{n-i} - a_i - z_{n-i-1} + z_{n-i}b))b^i \\
&= \sum_{i=0}^{n}(-z_{i-1} + z_i b - z_{n-i-1} + z_{n-i}b)b^i \\
&= -\sum_{i=0}^{n} z_{i-1}b^i + \sum_{i=0}^{n} z_i b^{i+1} - \sum_{i=0}^{n} z_{n-i-1}b^i + \sum_{i=0}^{n} z_{n-i}b^{i+1} \\
&= -\sum_{i=0}^{n-1} z_i b^{i+1} + \sum_{i=0}^{n-1} z_i b^{i+1} - \sum_{i=1}^{n} z_{n-i}b^{i-1} + b^2\sum_{i=1}^{n} z_{n-i}b^{i-1} \\
&= (b^2-1)\sum_{i=1}^{n} z_{n-i}b^{i-1} \\
&= (b^2-1)(z_0 z_1 \ldots z_{n-1})_b \ .
\end{aligned}$$

Portanto o número de *Ball* generalizado B_b é um múltiplo de $b^2 - 1$.

7 Quantidade de Números de Ball e a Sequência de Fibonacci

Agora consideremos o número $(x_{2k})_b$ constituído por um número par de algarismos (ou $(x_{2k+1})_b$ constituído por um número ímpar de algarismos), e uma função $B(k)$ que associa a quantidade de números de *Ball* B_b obtidos a partir de um número com k algarismos.

Em qualquer base $b > 2$, a quantidade de diferentes números de *Ball* obtidos de números com $n+1$ algarismos é dada pela quantidade de diferentes números $(z_0 z_1 \ldots z_{n-1})_b$ que surgem no processo descrito na Seção 6. Novamente, considere $z_{-1} = z_n = 0$ e recursivamente para z_i, $i = 0, \ldots, n-1$,

$$z_i = \begin{cases} 1 & \text{se } a_i - a_{n-i} - z_{i-1} < 0 \ ; \\ 0 & \text{se } a_i - a_{n-i} - z_{i-1} \geq 0 \ . \end{cases}$$

As listas $(z_0 z_1 \ldots z_{n-1} z_n)_b$, definidas recursivamente da forma acima, são chamadas de códigos, isto é, possíveis números que aparecem na fatoração de um número de

Ball. Ressaltamos que nem todas as listas de 0's (zeros) e 1's (uns) são códigos e, por comodidade, indicamos $(z_0z_1\dots z_{n-1}z_n)_b$ por $z_0z_1\dots z_{n-1}z_n$ em qualquer base b.

Pela maneira como obtemos um número de *Ball*, uma certa simetria é esperada nos códigos. Passamos agora a caracterizá-los.

Segue diretamente da definição que

Proposição 7.1. *Se $a_n > a_0$ então $z_0 = 1$ e $z_n = 0$.*

E mais,

Proposição 7.2. *Para algum $i = 1, \dots, n-1$, temos:*

1. *Se $z_{i+1} = 1$ e $z_i = 0$, então $z_{n-i-1} = 0$.*
2. *Se $z_{i+1} = 0$ e $z_i = 1$, então $z_{n-i-1} = 1$.*

Demonstração. (a) Temos que $z_{i+1} = 1$, assim

$$\begin{aligned} 0 \leq a_{i+1} - a_{n-(i+1)} - z_{i+1-1} &= a_{i+1} - a_{n-i-1} - z_i \\ &\overset{z_i=0}{=} a_{i+1} - a_{n-i-1} \ . \end{aligned}$$

Assim, $a_{n-i-1} - a_{i+1} > 0$, um número inteiro maior que zero, daí $a_{n-i-1} - a_{i+1} - z_{n-i-2} \geq 0$, ou seja, $z_{n-i-1} = 0$.

(b) Para $z_{i+1} = 0$ temos $a_{i+1} - a_{n-i-1} - z_i \geq 0$. Como $z_i = 1$, obtemos que $a_{i+1} - a_{n-i-1} - 1 \geq 0 \Rightarrow a_{n-i-1} - a_{i+1} \leq -1 \Rightarrow a_{n-i-1} - a_{i+1} - z_{n-i-2} \leq -1 - z_{n-i-2} < 0$, e assim $z_{n-i-1} = 1$.

□

Em acordo a Proposição 7.2, caracterizamos os códigos como sendo as listas de 0's e 1's, com $z_0 = 1$ (ou $z_n = 0$) e que satisfaz a condição de simetria. Assim a afirmação anterior mostra um tipo de simetria esperada no problema. Em alguns casos (dado o valor de z_i), podemos determinar z_{n-i-1} a partir do valor de z_{i+1}.

Proposição 7.3. *Seja $z_0z_1\dots z_{n-1}z_nz_{n+1}\dots z_{2n}$ o código gerado por um número com $2n+1$ algarismos,então $z_{n-1} = z_n$.*

Demonstração. Segue da definição que, se $z_{n-1} = 1$, então

$$a_n - a_{2n-n} - z_{n-1} = -1 < 0 \ .$$

Portanto, $z_n = 1$. Por outro lado, se $z_{n-1} = 0$, então $a_n - a_{2n-n} - z_{n-1} = 0$. Donde obtemos, $z_n = 0$. □

Proposição 7.4. *A quantidade de códigos com $2n+1$ algarismos é igual a quantidade de códigos com $2n$ algarismos.*

Demonstração. Dado um código com $2n+1$ algarismos, ao retirarmos o algarismo da posição média z_n, teremos um novo código com $2n$. Por outro lado, dado um código com $2n$ algarismos, podemos incluir na posição média, em virtude da Proposição 7.3, um único algarismo de modo a obter um código com $2n+1$ algarismos. Essa bijeção conclui a afirmação. □

Denotando por $B(k)$ a quantidade de códigos com k algarismos, segue da Proposição 7.4 o resultado.

Proposição 7.5. *Para todo $n \geq 2$ temos que $B(2n+1) = B(2n)$.*

Agora vamos determinar a quantidade de códigos para todo número ímpar, assim

Proposição 7.6. *Para todo $n \geq 2$ temos*

$$B(2n+1) = 2B(2n-1) + B(2n-3) + \cdots + B(3) + B(1).$$

Demonstração. Para calcular a quantidade de códigos com $2n+1$ dígitos, isto é, determinar $B(2n+1)$, vamos proceder de modo recursivo. Seja

$$(z_0 z_1 z_2 z_3 \ldots z_{n-1} z_n z_{n+1} \ldots z_{2n-3} z_{2n-2} z_{2n-1} z_{2n}),$$

um código com $2n+1$ algarismos, isto é, uma lista de 0's e 1's, com $z_0 = 1$, $z_{2n} = 0$ e satisfazendo as condições da Proposição 7.2. Retirando o primeiro e o último algarismos da lista, obtemos uma nova lista (lista interna) com $2n-1$ elementos que cumpre a condição de simetria (Proposição 7.2).

$$(z_1 z_2 z_3 \ldots z_{n-1} z_n z_{n+1} \ldots z_{2n-3} z_{2n-2} z_{2n-1})$$

Como sabemos, algumas dessas listas são códigos e outras não. Os códigos são da forma $1Y0$, sendo Y uma lista, satisfazendo a condição de simetria e com $2n-3$ algarismos. A quantidade dessas listas é $B(2n-1)$. Dentre as listas que não são códigos, temos aquelas da forma $1Y1$, cuja a quantidade também é $B(2n-1)$. Temos também as listas que não são códigos e iniciam em zero, isto é, $z_1 = 0$, teremos as listas da forma $0X1$, e segue da Proposição 7.2, que se $z_0 = 1$ e $z_1 = 0$ então $z_{2n-1} = 1$. As listas da forma $0X0$ não aparecerão, mas são em mesma quantidade que aquelas da forma $0X1$.

Passamos a contar a quantidade de elementos da forma $0X0$. Segue da Proposição 7.2, que se X não é código, pois a lista inicia e termina em zero. Sendo assim, devemos contar a quantidade de listas da forma $0X0$ em que X é código. Vamos denotar por $Q(2n-1)$ a quantidade dessas listas. Para calcular $Q(2n-1)$, escrevemos

$$00\ldots 0X0\ldots 00\ ,$$

sendo X um código com $2r+1$ algarismos. Fazendo r variar de 0 a $n-2$, temos que o número de listas iniciadas e terminadas em zero é dada pela soma:

$$B(2n-3)+B(2n-5)+\cdots+B(3)+B(1).$$

Sendo assim,

$$B(2n+1)=2B(2n-1)+Q(2n-1) \text{ ou seja },$$
$$B(2n+1)=2B(2n-1)+B(2n-3)+B(2n-5)+\cdots+B(3)+1.$$

□

Denomina sequência de Fibonacci, a coleção de números naturais

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ldots \tag{7.1}$$

isto é, a sequência F_j dada pela recorrência $F_{j+2}=F_{j+1}+F_j$ para todo $j\geq 1$. Algumas propriedades podem ser consultadas em [9]. Por fim, a relação entre a quantidade de números de *Ball* e a sequência de Fibonacci (7.1) .

Proposição 7.7. *Seja F_k a sequência de Fibonacci dada em (7.1), então $B(2n+1)=F_{2n}$.*

Demonstração. Faremos a demonstração por indução. A afirmação é verdadeira para $n=1$, pois $B(3)=1=F(2)$. Supondo verdadeira para $k=1,\ldots n$, pela Proposição 7.6 temos,

$$\begin{aligned}
B(2n+3) &= 2B(2n+1)+B(2n-1)+B(2n-3)+\cdots+B(3)+1\\
&= 2F_{2n}+F_{2n-2}+F_{2n-4}+\cdots+F_2+F_1\\
&= F_{2n}+(F_{2n+1}-F_{2n-1})+(F_{2n-1}-F_{2n-3})+\\
&\quad +(F_{2n-3}-F_{2n-5})+\cdots+(F_3-F_1)+F_1\\
&\overset{veja\ [9]}{=} F_{2n}+F_{2n+1} \ = \ F_{2n+2}\ .
\end{aligned}$$

□

A seguir, apresentamos a demonstração do *Teorema 2.8*

Demonstração. Dado número $(x_{2n+1})_b$ com $2n+1$ algarismos. Suponha que $a_n>a_0$, segue da Proposição 7.7 que $B(2n+1)=F_{2n}$. Agora, no caso em que $a_n=a_0$, segue que a quantidade de números de *Ball* generalizado é a mesma para $2n-1$ algarismos, assim temos $B(2n-1)=F_{2(n-1)}$. E recursivamente, obtemos o resultado. □

8 Conclusão

De modo surpreendente, algumas propriedades obtidas na base decimal podem ser estendidas para outras bases. Em alguns casos, a mudança de base pode facilitar a solução do problema, mas isso nem sempre ocorre. De toda forma, conhecer e trabalhar com bases distintas da decimal nos leva a refletir sobre propriedades e algoritmos que são usados rotineiramente, mas de forma mecânica. Os principais exemplos são os algoritmos usados para nossas operações elementares. Em um nível mais avançado, temos os critérios de divisibilidade, por exemplo, o número de *Ball* generalizado B_b é múltiplo de $a = b - 1$ (Proposição 5.7) e múltiplo de $\alpha = b + 1$ (Proposição 5.8). Isso não implica diretamente que B_b é múltiplo de $(a \cdot \alpha)_b$ (Obsevação 5.9). A busca por padrões, tarefa tão comum na Matemática, é outro ponto de destaque no trabalho. A relação entre a quantidade de números de *Ball* e a sequência de Fibonacci nos mostra a generosidade da Matemática, mesmo em bases não decimais. Essa generosidade motiva a busca por outras relações e propriedades que, em breve, serão descobertas.

Referências

[1] Ball, J. *Think of a Number*, Dorling Kinderly Limited, Great Britain, 2005.

[2] Ball, W. W. R. *Mathematical Recreations an Essays*, The Macmillan Company, (Tenth Edition), London, 1926.

[3] Costa, Eudes Antonio. Mais um Número Mágico. Revista do Professor de Matemática (RPM), número 80, SBM, 2013.

[4] Costa, Eudes Antonio. Os numeros mágicos de Ball e a sequência de Fibonacci. Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática, v. 6, n. 1, p. 19-25, 2021.

[5] Costa, Eudes. A.; Mesquista, Élis. G. C. O Número Mágico M. Revista da Olimpíada (IME-UFG), número 9. 33-43, 2014. Disponível em: https://files.cercomp.ufg.br/weby/up/1170/o/Eudes9.pdf.

[6] Domingues, Hygino Hugueros. *Fundamentos de Aritmética*. Editora da UFSC, 2009.

[7] Fomín, Serguei Vasil'evich. *Sistemas de Numeración*. Editorial MIR, 1975.

[8] Silva, Valdir Vilmar. *Números: Construção e Propriedades*. Editora UFG, 2003.

[9] Vorobiov, N. N.*Numeros de Fibonacci*. Lecciones populares de matemáticas: Editorial MIR, Moscú, Rússia, 1974.

[10] Webster, R. A Combinatorial Problem with a Fibonacci Solution. The Fibonacci Quarterly **33**, 26-31, 1995.