

UM ESTUDO SOBRE O π NAS P -MÉTRICAS: SIMETRIAS EM EXPOENTES CONJUGADOS E EXTREMOS GLOBAIS

Letianne Alves Venâncio de Pontes
Universidade Federal de Juiz de Fora
Departamento de Matemática
letianne@gmail.com

Adiel Jamesson Santos da Silva
Secretaria de Educação do Estado de Alagoas
adiel8404@gmail.com

Thiago Yukio Tanaka
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Departamento de Matemática
thiago.tanaka@ufrpe.br

João A. M. Gondim
Universidade Federal de Pernambuco
Departamento de Matemática
joao.gondim@ufrpe.br

Resumo

Neste trabalho, apresentamos inicialmente um contexto histórico de aproximações de π até encontrar o valor de 3,1415..., que é o conhecido na métrica euclidiana. Generalizando essa métrica, obtemos a p -métrica, que, para $p \geq 1$, será o conjunto de métricas utilizado nesse estudo. Neste conjunto, demonstramos que o valor de π na p -métrica, denotado por π_p , assume mínimo global para $p = 2$ e máximo global quando $p = 1$ ou $p \rightarrow \infty$. Para apresentar esse resultado fazemos uso de ferramentas e técnicas do cálculo integral, assim como duas funções, as funções Beta e Gama, na criação de uma função para aproximação de π_p , a qual chamamos de Π_p . Além da minimalidade e maximalidade de π_p , também provamos uma propriedade que ocorre para π nesse conjunto de métricas, mostrando que há uma noção de simetria que ocorre nos valores de π_p e π_q quando p e q são expoentes conjugados, ou seja, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Nessa situação os valores de π_p e π_q coincidem. Observamos que, ao alterar o valor de p , construímos novos valores para π e as noções geométricas também acompanham essa alteração. Mostramos, por fim, como construir as figuras geométricas desenvolvidas neste estudo utilizando o GeoGebra.

Abstract

This work provides, initially, a historical context of approximations of π until the value of $3,1415\dots$ is found, which corresponds to the Euclidian metric. Generalizing this metric for a real value p , we can obtain the p -metric, which, for $p \geq 1$, gives the set of metrics used in this paper. For this set, we show that the value of π in the p -metric, denoted by π_p , attains its global minimum at $p = 2$ and global maxima for $p = 1$ or $p \rightarrow \infty$. In order to present this result we make use of tools and techniques from integral calculus, as well as two particular functions, the Beta and Gamma functions, in the creation of a function to approximate π_p , which will be called Π_p . Beyond the minimality and maximality of π_p , we also prove a property of π in this set of metrics, which is a notion of symmetry in the values of π_p and π_q when p and q are conjugated exponents, i.e., $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. In this situation the values of π_p and π_q coincide. We observe that, when altering the value of p , we get new values for π and all the geometric notions that accompany this change. At last, we show how to construct the geometric figures developed in this work in GeoGebra.

1 Introdução

Desde a antiguidade, tem-se a noção de que a razão entre o comprimento de uma circunferência pelo seu diâmetro resulta em uma constante que hoje sabemos que é irracional. Este número, denotado por π (lê-se pi), é um número decimal infinito, não periódico e, por se tratar de uma constante, essa razão independe dos tamanhos que se tenham esses comprimentos da circunferência em questão. Na Mesopotâmia, os babilônios utilizaram o valor de π como 3, ou ainda, como uma aproximação por meio da fração $3\frac{1}{8} = 3,125$. Também usando uma aproximação, os egípcios utilizaram a ideia de que um círculo de diâmetro 9 e um quadrado de lado 8 possuíam a mesma área e, dessa forma, computaram o valor de π como $\frac{256}{81} = 3,1604938\dots$. Mais tarde, Arquimedes conseguiu fazer uma outra aproximação calculando os perímetros dos polígonos regulares inscritos e circunscritos na circunferência, deduzindo que $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$ utilizando uma figura com 96 lados, com aproximações melhores surgindo apenas no milênio seguinte [2, 4]. Atualmente, o recorde de expansão decimal do π foi feito computacionalmente por Emma Haruka Iwao, uma engenheira da computação japonesa que conseguiu calcular 31 trilhões de dígitos em 121 dias de trabalho com o auxílio de 25 máquinas [11].

No Ensino Básico, temos contato com essa constante como sendo a razão do comprimento da circunferência pela medida do seu diâmetro, ou ainda, através da divisão da medida da área da circunferência pelo quadrado da medida do raio. Esses conceitos

ligados à noção geométrica aparecem na Geometria Euclidiana, em que a maneira de medir distâncias entre os pontos $A = (a, b)$ e $B = (x, y)$ é igual à medida do segmento que une A e B , ou seja, é dada pela função $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de fórmula

$$d((a, b), (x, y)) = \sqrt{|x - a|^2 + |y - b|^2}.$$

Todavia, essa não é a única forma de medir distâncias no plano. Qualquer uma dessas formas é chamada de métrica. Na Figura 1 temos diferentes formas de representar a distância entre dois pontos. Dado $p \geq 1$ qualquer, se alterarmos, na nossa função d , a raiz quadrada pela raiz p -ésima e o expoente 2 por p , então construímos uma famosa maneira de medir distâncias, denominada p -métrica, e calculada como

$$d_p((a, b), (x, y)) = \sqrt[p]{|x - a|^p + |y - b|^p}.$$

Algo interessante a se notar é que, quando mudamos os modos de medir distâncias, as formas dos objetos que dependem de distâncias também mudam.

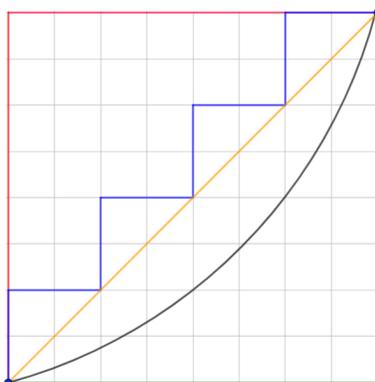


Figura 1: Diferentes formas de medir distâncias. Fonte: Autores.

Assim, os valores de constantes como o do número irracional π , visto como a razão entre as medidas do comprimento e do diâmetro, podem também ser alterados. Adiante, mostraremos que o π pode assumir inclusive valores inteiros.

No caso do nosso objeto de estudo, a circunferência, que trata-se do lugar geométrico dos pontos que equidistam de um ponto fixo, chamado de centro, sendo essa distância constante chamada de raio, sua forma varia de acordo com cada $p \geq 1$. Ainda sobre essa deformação, temos um fato muito curioso: a circunferência passa do formato de um quadrado (quando $p = 1$), à circunferência convencional (quando $p = 2$) e volta a

ser um quadrado (quando $p \rightarrow \infty$). Desta forma, motivados pela exposição feita em [6] como o formato da circunferência é alterado nessa p -métrica, surge a seguinte questão: será que o valor de π também se modifica?

Neste artigo, trataremos as definições e resultados necessários para compreender e possibilitar as construções feitas para esse estudo que estão dispostas na Seção 2 contendo as preliminares do trabalho. Mais adiante, na Seção 3, iniciamos a construção da circunferência na p -métrica e, assim, definimos o π_p (o valor de π para algum valor de p) por meio da expressão convencional entre a razão das medidas do comprimento pelo diâmetro. Ainda nessa Seção, o nosso foco principal será construir uma aproximação para π_p que permitirá calcular o menor valor de π_p nas p -métricas, e para nossa surpresa esse valor já nos é conhecido, o próprio π . Isso pode ser observado no gráfico de π_p como função de p , ilustrado na Figura 2 - adaptada de [8].

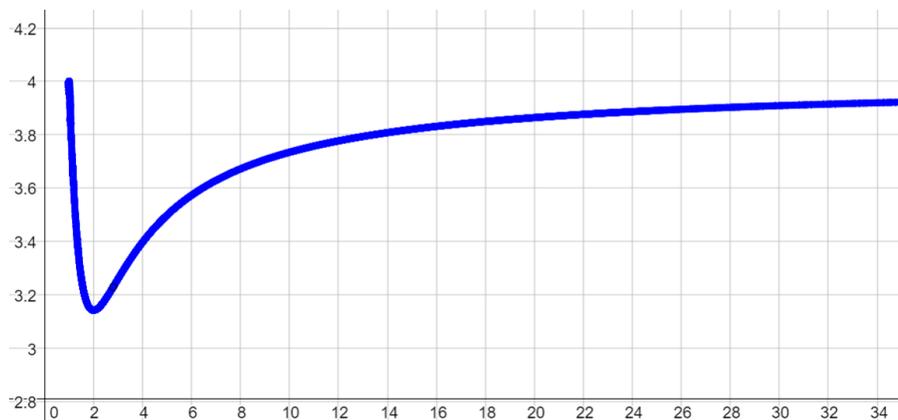


Figura 2: O gráfico de π_p . Fonte: Autores.

Para a construção dessa Seção, estudamos de forma ampla e expandida o que é proposto por [1]. Na quarta Seção, assim como feito [8], demonstramos uma propriedade de simetria sobre o valor que π pode assumir a depender dos valores de p e q escolhidos para esse conjunto de métricas. Mais especificamente, provaremos que na condição em que p e q são expoentes conjugados, os valores de π_p e π_q são iguais. Por fim, expomos as construções feitas no *software* livre GeoGebra para esse estudo, já que toda as figuras apresentadas ao longo deste trabalho foram construídas pelos autores. Trazemos nas considerações finais as principais conclusões que pudemos obter acerca das propriedades de π nesse conjunto de métricas. Ao longo desse trabalho, destacamos a importância das produções de [1] e [8] que trazem os principais resultados deste estudo, porém, destacamos aqui, a presença de definições, propriedades e expansão de cálculos que não são executados nas referências apresentadas.

2 Preliminares

Nesta Seção, apresentaremos alguns resultados e definições que darão estrutura ao desenvolvimento deste trabalho. Mais precisamente, apresentaremos as definições centrais e provaremos diversas propriedades envolvendo métricas, normas e as funções Beta e Gama. Essencialmente, para a produção dessa Seção estudamos as referências [10, 13] para construção das definições e resultados apresentados.

Definição 2.1 (Métrica). *Uma métrica d no plano \mathbb{R}^2 é uma função $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ que tem as seguintes propriedades (para todos $x, y, z \in \mathbb{R}^2$):*

- (i) *É definida positiva: $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$;*
- (ii) *É simétrica: $d(x, y) = d(y, x)$;*
- (iii) *Satisfaz a desigualdade triangular: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.*

Definição 2.2 (p -métrica). *A função $d_p : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, com $p \geq 1$, que é chamada de p -métrica, é definida por*

$$d_p((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt[p]{|y_1 - x_1|^p + |y_2 - x_2|^p}.$$

Definição 2.3 (Norma). *Seja \mathbb{V} um espaço vetorial real. Uma norma em \mathbb{V} é uma função $\|\cdot\| : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para cada $v, w \in \mathbb{V}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ satisfaz:*

- (i) *É definida positiva: $\|v\| \geq 0$ e $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$;*
- (ii) *É homogênea: $\|\alpha w\| = |\alpha| \cdot \|w\|$;*
- (iii) *É subaditiva: $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (desigualdade triangular).*

Definição 2.4 (p -norma). *A função $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, que é chamada de p -norma, é definida por (dado $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$),*

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p}.$$

Lema 2.5 (Desigualdade de Minkowski). *Sejam $p \geq 1$ e $x, y \in \mathbb{R}^n$. Então*

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

A demonstração desse lema pode ser encontrada na Subseção 1.2-3 de [9].

Proposição 2.6. A função d_p é uma métrica em \mathbb{R}^2 .

Demonstração. Considere $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ com $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ e $z = (z_1, z_2)$. Mostraremos que d_p é uma métrica para todo $p \geq 1$. É fácil perceber que d_p é definida positiva e só é nula se $x = y$. Além disso, é simétrica, pois

$$d_p(x, y) = \sqrt[p]{|y_1 - x_1|^p + |y_2 - x_2|^p} = \sqrt[p]{|x_1 - y_1|^p + |x_2 - y_2|^p} = d_p(y, x).$$

Vejam que d_p também satisfaz a desigualdade triangular. Para demonstrar esse fato, note que $d_p(x, y) = \|x - y\|_p$ e pelo Lema 2.5, temos

$$\begin{aligned} d_p(x, y) &= \|x - y\|_p \\ &= \|(x - z) + (z - y)\|_p \\ &\leq \|x - z\|_p + \|z - y\|_p \\ &= d_p(x, z) + d_p(z, y). \end{aligned}$$

Concluimos assim que d_p é uma métrica. □

A seguir, demonstraremos um importante resultado que permite associar a p -norma e a norma do máximo, mas antes, vejamos a definição dessa norma.

Definição 2.7. A função $d_{\max} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, chamada métrica do máximo, é definida por

$$d_{\max}(x_1, x_2), (y_1, y_2) = \max\{|y_1 - x_1|, |y_2 - x_2|\}.$$

Proposição 2.8. A seguinte relação entre a p -métrica e a métrica do máximo é verdadeira:

$$d_{\max}(x, y) = \lim_{p \rightarrow \infty} d_p(x, y) \text{ para todos } x, y \in \mathbb{R}^2.$$

Demonstração. Considere $|y_1 - x_1| = a$ e $|y_2 - x_2| = b$. Vamos mostrar que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sqrt[p]{a^p + b^p} = \max\{|a|, |b|\} \text{ para todos } a, b \in \mathbb{R}.$$

De fato, como

$$|a| \leq \max\{|a|, |b|\} \quad e \quad |a|^p \leq (\max\{|a|, |b|\})^p,$$

o mesmo vale se trocarmos $|a|$ por $|b|$. Além disso,

$$(\max\{|a|, |b|\})^p \leq |a|^p + |b|^p.$$

Desse modo

$$(\max\{|a|, |b|\})^p \leq |a|^p + |b|^p \leq 2(\max\{|a|, |b|\})^p.$$

Aplicando a raiz p -ésima na desigualdade e em seguida passando ao limite quando $p \rightarrow \infty$, tem-se

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \max\{|a|, |b|\} \leq \lim_{p \rightarrow \infty} \sqrt[p]{|a|^p + |b|^p} \leq \lim_{p \rightarrow \infty} \sqrt[p]{2} \max\{|a|, |b|\}$$

e pelo Teorema do Confronto (ver [14]) está provado o resultado. \square

A definição a seguir nos ajudará a escrever algumas integrais em termos da função Beta. Essa função foi estudada por Legendre e Euler e é representada, simbolicamente, pela letra grega β ou B (ver [13]).

Definição 2.9. *A função Beta, também conhecida por integral de Euler de primeiro tipo, é uma função definida da seguinte forma:*

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt \text{ para todos } x, y \in \mathbb{C} \text{ tais que } \Re(x), \Re(y) > 0, \quad (2.1)$$

em que \Re indica a parte real de um número complexo.

A função Gama, por sua vez, foi introduzida por Euler em 1730 como resultado de uma tentativa de interpolar o fatorial de um número. Esses estudos também foram desenvolvidos por outros matemáticos como Legendre. Esta função aparece em diversas áreas como função de distribuição de probabilidade, além de aplicações no campo da combinatória (ver [13]).

Definição 2.10. *A função Gama, representada pela letra grega Γ , é uma extensão da função fatorial para números complexos e está definida para todo $z \in \mathbb{C}$ com parte real positiva, da seguinte forma*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Esta integral converge absolutamente e é conhecida como integral de Euler de segundo tipo.

É possível mostrar que se z é um inteiro positivo, então $\Gamma(z) = (z-1)!$.

Proposição 2.11. *Sejam x, y e z números complexos com parte real positiva. Então valem as seguintes propriedades:*

(i) *A função Beta é simétrica, isto é $B(x, y) = B(y, x)$;*

$$(ii) B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)};$$

$$(iii) \Gamma(1) = 1 \text{ e } \Gamma(z + 1) = z\Gamma(z);$$

(iv) *Fórmula de Duplicação de Legendre:*

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = 2^{1-2z}\sqrt{\pi} \Gamma(2z).$$

Demonstração. As demonstrações dos itens (i), (ii) e (iii) podem ser feitas utilizando técnicas dos cursos de Cálculo Diferencial e Integral. Faremos a demonstração apenas de (iv).

(iv) Pela definição da função Beta temos que $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$, e pelo item (ii), obtemos

$$B(z, z) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(z)}{\Gamma(2z)} = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{z-1}dt.$$

Fazendo $t = \frac{1+s}{2}$ na equação acima, teremos

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(z)\Gamma(z)}{\Gamma(z+z)} &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left(\frac{1+s}{2}\right)^{z-1} \left(\frac{1-s}{2}\right)^{z-1} ds \\ &= \frac{1}{2^{2z-1}} \int_{-1}^1 (1-s^2)^{z-1} ds, \end{aligned}$$

ou seja,

$$2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z) = 2\Gamma(2z) \int_0^1 (1-s^2)^{z-1} ds. \quad (2.2)$$

Substituindo agora $t = s^2$ na Definição 2.9, obtém-se

$$B(w, z) = \int_0^1 s^{2w-2}(1-s^2)^{z-1}2s ds.$$

Usando $w = \frac{1}{2}$ na igualdade acima, encontramos

$$B\left(\frac{1}{2}, z\right) = 2 \int_0^1 (1-s^2)^{z-1} ds. \quad (2.3)$$

Substituindo (2.3) em (2.2), tem-se

$$2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z) = \Gamma(2z)B\left(\frac{1}{2}, z\right) = \Gamma(2z)\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(z)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+z\right)}.$$

Daí, resulta que

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = 2^{1-2z}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(2z).$$

Como $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, a equação anterior pode ser reescrita como

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = 2^{1-2z}\sqrt{\pi}\Gamma(2z).$$

□

Para demonstrar alguns lemas, apresentaremos o conceito de função convexa, assim como uma proposição que relaciona esse tipo de função com uma desigualdade. Funções convexas são muito utilizadas para demonstrar desigualdades e desempenham um papel importante na desigualdade de Young, na aplicação de métodos variacionais para EDPs não lineares, em particular, na obtenção de resultados de otimalidade.

Definição 2.12. *Uma função $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, com $A \subset \mathbb{R}^n$, é dita uma função convexa se toda a região acima de seu gráfico for um conjunto convexo, ou seja, se*

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \text{ para todos } x_1, x_2 \in A \text{ e } t \in [0, 1].$$

A Proposição 2.13, a seguir, corresponde ao “Lema 1” em [1].

Proposição 2.13. *Dados $a > 0$ e $v \geq 0$ a seguinte identidade é verdadeira:*

$$[1+v]^a[1+v^a] \geq \left[1+v^{\frac{2a}{a+1}}\right]^{a+1}.$$

Demonstração. Fixemos v e consideremos $f(x) = x \ln\left(1+v^{\frac{1}{x}}\right)$ para todo $x > 0$. Essa função é convexa pois $f''(x) = \frac{v^{\frac{1}{x}} \ln^2(v)}{x^3(v^{\frac{1}{x}}+1)^2}$ é positiva. Pela Definição 2.12, temos

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

então tomando $x_1 = 1$ e $x_2 = \frac{1}{a}$ segue que

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1 + \frac{1}{a}}{2}\right) &\leq \frac{f(1) + f(\frac{1}{a})}{2} \\ \left(\frac{a+1}{2a}\right) \ln\left(1 + v^{\frac{2a}{a+1}}\right) &\leq \frac{\ln(1+v) + \frac{1}{a} \ln(1+v^a)}{2} \\ (a+1) \ln\left(1 + v^{\frac{2a}{a+1}}\right) &\leq a \ln(1+v) + \ln(1+v^a) \\ \ln\left(1 + v^{\frac{2a}{a+1}}\right)^{a+1} &\leq \ln(1+v)^a + \ln(1+v^a). \end{aligned}$$

Aplicando a exponencial na última desigualdade concluímos a demonstração. \square

3 Construção de π_p

Neste momento, seguiremos os resultados apresentados em [1] na Seção “Integral formula for π_p ”, expandindo os cálculos e detalhes das propriedades. Definiremos a circunferência usando a p -métrica e escreveremos o π em função de p . Para calcularmos o valor de π através da razão entre as medidas de comprimento e diâmetro da circunferência, precisamos calcular esse comprimento de forma geral, para que, apenas substituindo o valor de p , consigamos observar o valor de tal razão. Um círculo de raio unitário centrado na origem é definido, de acordo com a métrica d_p , como

$$C_p = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d_p((x, y), (0, 0)) = 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x|^p + |y|^p = 1\}. \quad (3.1)$$

Na Figura 3 - adaptada de [1], conseguimos observar o comportamento das circunferências à medida que p varia. Para fazer essas construções, usamos a equação de C_p no GeoGebra para os valores de $p \in \{1, \frac{3}{2}, 2, 5\}$ e $p \rightarrow \infty$.

O comprimento de arco no primeiro quadrante pode ser determinado a partir da parametrização $x = u^{\frac{1}{p}}$ e $y = (1 - u)^{\frac{1}{p}}$, com $0 \leq u \leq 1$, de modo que $dx = \frac{1}{p} u^{\frac{1-p}{p}} du$ e $dy = -\frac{1}{p} (1 - u)^{\frac{1-p}{p}} du$. Assim, denotando por s_p o comprimento de arco relativo à p -norma, teremos

$$\begin{aligned} ds_p &= \sqrt[p]{\left|\frac{dx}{du}\right|^p + \left|\frac{dy}{du}\right|^p} du = \sqrt[p]{\left|\frac{1}{p} u^{\frac{1-p}{p}}\right|^p + \left|-\frac{1}{p} (1 - u)^{\frac{1-p}{p}}\right|^p} du \\ &= \sqrt[p]{\left|\frac{1}{p}\right|^p [|u|^{1-p} + |1 - u|^{1-p}]} du = \frac{1}{p} [u^{1-p} + (1 - u)^{1-p}]^{1/p} du, \end{aligned}$$

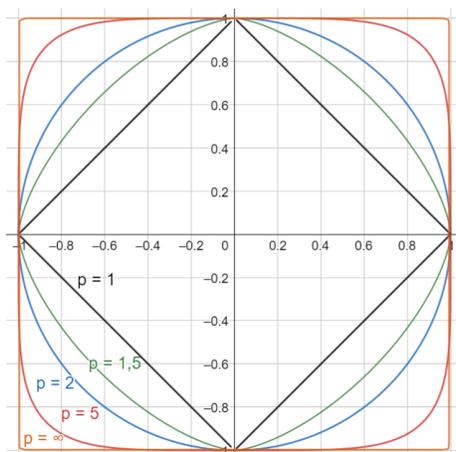


Figura 3: Circunferências na p -métrica. Fonte: Autores.

sendo a última igualdade verdadeira, pois tomaremos $0 < u < 1$. Como a figura possui simetria radial, o comprimento da circunferência será o quádruplo do comprimento de arco calculado no primeiro quadrante. Observe que o diâmetro, visto como a maior distância entre dois pontos da circunferência, é igual a 2, independente do p escolhido. Com efeito, esse comprimento é igual a 2, pois $(0, -1)$ e $(0, 1)$ estão na circunferência e a distância entre eles é menor ou igual a 2 pela desigualdade triangular.

Podemos então calcular o valor de π_p conforme a expressão abaixo.

$$\begin{aligned}
 \pi_p &= \frac{1}{2} \int_{C_p} ds_p \\
 &= \frac{2}{p} \int_0^1 [(1-u)^{1-p} + u^{1-p}]^{1/p} du \\
 &= \frac{2}{p} \int_0^1 \left[\frac{1}{(1-u)^{p-1}} + \frac{1}{u^{p-1}} \right]^{1/p} du = \frac{2}{p} \int_0^1 \left[\frac{u^{p-1} + (1-u)^{p-1}}{u^{p-1}(1-u)^{p-1}} \right]^{1/p} du \\
 &= \frac{2}{p} \int_0^1 \frac{[u^{p-1} + (1-u)^{p-1}]^{1/p}}{u^{\frac{p-1}{p}}(1-u)^{\frac{p-1}{p}}} du,
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

portanto,

$$\pi_p = \frac{2}{p} \int_0^1 \frac{[u^{p-1} + (1-u)^{p-1}]^{1/p}}{[u(1-u)]^{\frac{p-1}{p}}} du. \tag{3.3}$$

Calculando π_p para $p = 1$, temos

$$\begin{aligned}\pi_1 &= \frac{2}{1} \int_0^1 \frac{[u^{1-1} + (1-u)^{1-1}]^{1/1}}{[u(1-u)]^{\frac{1-1}{1}}} du = 2 \int_0^1 \frac{[u^0 + (1-u)^0]^1}{[u(1-u)]^{\frac{0}{1}}} du \\ &= 2 \int_0^1 2 du = 2 \left(2u \Big|_0^1 \right) = 4,\end{aligned}$$

como pode ser facilmente calculado usando a definição da p -métrica para $p = 1$, que é a métrica da soma.

Como já vimos na Proposição 2.8, podemos calcular π_∞ usando a métrica do máximo. Inicialmente, calculamos o comprimento no primeiro quadrante e depois multiplicamos por quatro. Como

$$d_{\max}((1, 0), (1, 1)) + d_{\max}((1, 1), (0, 1)) = 2,$$

desse modo, o comprimento da circunferência é 8 e, conseqüentemente, o valor de $\pi_\infty = \frac{8}{2} = 4$.

Sabemos que $\pi_1 = \pi_\infty = 4$ e $\pi_2 = \pi$. Por outro lado, não podemos calcular o valor da integral em (3.3) para um p qualquer a não ser utilizando técnicas de aproximação.

3.1 Uma aproximação para o valor de π_p

Nesta subseção apresentaremos em detalhes os resultados de “An approximate value π_p ”, sendo essa uma seção de [1].

Ao definirmos o valor de π_p , verificamos que não conseguimos obter de maneira simples o valor de π para qualquer valor de p . Dessa forma, iremos aproximar o valor de π_p , para todo p , por uma integral dada em termos da função Gama que denotaremos por Π_p . Nesta subseção, calcularemos Π_p e π_p para alguns valores de p e demonstraremos que $\Pi_p \leq \pi_p$ para $p \geq 1$. Além disso, mostraremos que Π_p atinge seu mínimo em $p = 2$.

Definimos, então, Π_p como

$$\Pi_p = \frac{2}{p} \int_0^1 \frac{u^{\frac{2(p-1)}{p}} + (1-u)^{\frac{2(p-1)}{p}}}{[u(1-u)]^{\frac{p-1}{p}}} du. \quad (3.4)$$

Note que podemos escrever

$$\begin{aligned}
 \Pi_p &= \frac{2}{p} \left[\int_0^1 \frac{u^{\frac{p-1}{p}} du}{(1-u)^{\frac{p-1}{p}}} + \int_0^1 \frac{(1-u)^{\frac{p-1}{p}} du}{u^{\frac{p-1}{p}}} \right] \\
 &= \frac{2}{p} \int_0^1 u^{\frac{p-1}{p}} (1-u)^{-\frac{(p-1)}{p}} du + \frac{2}{p} \int_0^1 (1-u)^{\frac{p-1}{p}} u^{-\frac{(p-1)}{p}} du \\
 &= \frac{4}{p} \int_0^1 u^{\frac{(p-1)}{p}} (1-u)^{-\frac{(p-1)}{p}} du, \tag{3.5}
 \end{aligned}$$

onde foi feita a mudança de variável $v = 1 - u$ na segunda integral da penúltima linha. Note que Π_p é um caso particular da função Beta, a qual pode ser escrita em termos da função Gama, de acordo com a Propriedade 2.11, como

$$B(x, y) = \int_0^1 u^{x-1} (1-u)^{y-1} du = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Tomando $x = 2 - \frac{1}{p}$ e $y = \frac{1}{p}$ tem-se

$$\begin{aligned}
 \Pi_p &= \frac{4}{p} \int_0^1 u^{\frac{(p-1)}{p}} (1-u)^{-\frac{(p-1)}{p}} du = \frac{4}{p} \cdot B\left(2 - \frac{1}{p}, \frac{1}{p}\right) \\
 &= \frac{4}{p} \frac{\Gamma\left(2 - \frac{1}{p}\right) \Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}{\Gamma(2)} = 4 \frac{\frac{1}{p} \Gamma\left(\frac{1}{p}\right) \Gamma\left(2 - \frac{1}{p}\right)}{(2-1)!}.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\Pi_p = 4\Gamma\left(1 + \frac{1}{p}\right) \Gamma\left(2 - \frac{1}{p}\right). \tag{3.6}$$

Perceba que para $p = 1$

$$\Pi_1 = 4\Gamma\left(1 + \frac{1}{1}\right) \Gamma\left(2 - \frac{1}{1}\right) = 4\Gamma(2)\Gamma(1) = 4(2-1)!(1-1)! = 4.$$

Além disso, da continuidade da função Gama,

$$\begin{aligned}
 \Pi_\infty &= \lim_{p \rightarrow \infty} 4\Gamma\left(1 + \frac{1}{p}\right) \Gamma\left(2 - \frac{1}{p}\right) = 4\Gamma\left(\lim_{p \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{p}\right) \Gamma\left(\lim_{p \rightarrow \infty} 2 - \frac{1}{p}\right) \\
 &= 4\Gamma(1)\Gamma(2) = 4.
 \end{aligned}$$

Pela Proposição 2.11 item (iii) e usando que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$,

$$\Pi_2 = 4\Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(2 - \frac{1}{2}\right) = 4\Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 4\left(\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = \pi.$$

Na Tabela 1 apresentamos alguns valores de π_p e Π_p para diferentes p , calculados numericamente pelos autores utilizando (3.2) e (3.5) no *software* GeoGebra, com arredondamentos feitos na quinta casa decimal.

| p | π_p | Π_p |
|----------|---------|---------|
| 1 | 4 | 4 |
| 1,2 | 3,57268 | 3,49066 |
| 1,5 | 3,25977 | 3,22453 |
| 1,8 | 3,15513 | 3,15067 |
| 2 | π | π |
| 2,25 | 3,15513 | 3,15067 |
| 3 | 3,25977 | 3,22453 |
| 6 | 3,57268 | 3,49066 |
| ∞ | 4 | 4 |

Tabela 1: Valores de p , π_p e Π_p . Fonte: Autores.

Nesses casos, vemos que Π_p é uma aproximação para π_p tal que $\Pi_p \leq \pi_p$, e coincidem em $p = 2$. Mostraremos que essa propriedade vale para todo $p \geq 1$ na próxima proposição.

A Proposição 3.1, a seguir, corresponde ao “Lema 2” de [1].

Proposição 3.1. *Se $p \in [1, \infty)$, então $\Pi_p \leq \pi_p$.*

Demonstração. Para mostrar que a desigualdade é válida, lembrando que π_p e Π_p são dadas respectivamente por (3.3) e (3.4), precisamos apenas verificar que a desigualdade

$$u^{2(p-1)/p} + (1-u)^{2(p-1)/p} \leq (u^{p-1} + (1-u)^{p-1})^{\frac{1}{p}}$$

é válida. Esta decorre da Proposição 2.13 tomando $v = \frac{u}{1-u}$ e $a = p - 1$. □

Provaremos agora um resultado de minimalidade para Π_p . Antes de iniciarmos essa proposição, destacamos que ela corresponde à Seção “Global Minimum of π_p ” em [1].

Proposição 3.2. *Π_p assume mínimo absoluto em $p = 2$.*

Demonstração. Derivando Π_p com relação a p , temos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dp}\Pi_p &= 4\Gamma\left(1 + \frac{1}{p}\right)\Gamma'\left(2 - \frac{1}{p}\right)\left(\frac{1}{p^2}\right) + 4\Gamma'\left(1 + \frac{1}{p}\right)\left(\frac{-1}{p^2}\right)\Gamma\left(2 - \frac{1}{p}\right) \\
&= \frac{4}{p^2}\left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{p}\right)\Gamma'\left(2 - \frac{1}{p}\right) - \Gamma'\left(1 + \frac{1}{p}\right)\Gamma\left(2 - \frac{1}{p}\right)\right] \\
&= \frac{4}{p^2}\Gamma\left(1 + \frac{1}{p}\right)\Gamma\left(2 - \frac{1}{p}\right)\left[\frac{\Gamma'\left(2 - \frac{1}{p}\right)}{\Gamma\left(2 - \frac{1}{p}\right)} - \frac{\Gamma'\left(1 + \frac{1}{p}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{p}\right)}\right] \\
&= \frac{4}{p^2}\Gamma\left(1 + \frac{1}{p}\right)\Gamma\left(2 - \frac{1}{p}\right)\left[\psi\left(2 - \frac{1}{p}\right) - \psi\left(1 + \frac{1}{p}\right)\right],
\end{aligned}$$

com ψ sendo conhecida como a derivada do logaritmo natural da função Γ , também chamada de função Digama (ver p.10 em [13]). Como $\Gamma(x)$ é positiva para $x > 0$ (ver p.16-17 de [3]), observando a última expressão, $\frac{d}{dp}\Pi_p = 0$ se, e somente se, $\psi\left(2 - \frac{1}{p}\right) - \psi\left(1 + \frac{1}{p}\right)$ é nulo. É possível ainda mostrar que $\psi(x)$ também é estritamente crescente para $x > 0$ (ver [3]). Assim, $\psi\left(2 - \frac{1}{p}\right) - \psi\left(1 + \frac{1}{p}\right) = 0$ se, e somente se, $2 - \frac{1}{p} = 1 + \frac{1}{p}$, isto é, para $p = 2$. Usando novamente que a função ψ é crescente, então para $p < 2$, temos que $\frac{d}{dp}\Pi_p < 0$ e para $p > 2$, por outro lado, $\frac{d}{dp}\Pi_p > 0$. Assim o Teste da Primeira Derivada, que pode ser encontrado em [14], nos garante que o ponto crítico $p = 2$ é mínimo local para Π_p , e é global por ser o único ponto crítico desta função. Dessa forma, temos que $\Pi_p \leq \pi_p$ e, visto que já mostramos que $\Pi_2 = \pi_2$, concluímos que π_p também assume mínimo global em $p = 2$. □

Verificamos, assim, que a função π_p assume mínimo global quando $p = 2$, sendo esse valor o que conhecemos no Ensino Fundamental e cujo valor aproximado é 3,14. Mais especificamente, o valor de π_p decresce de 4 até π , o que ocorre quando p vai de 1 a 2, e volta a crescer quando $p > 2$, convergindo para o seu máximo quando p tende a infinito.

4 Simetria entre π_p e π_q

Nesta Seção apresentaremos uma importante propriedade sobre o valor de π na p -métrica, que consiste em mostrar que os valores de π_p e π_q coincidem quando p e q forem expoentes conjugados. Isto é, se $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então $\pi_p = \pi_q$. Note que 1 e ∞ também são

considerados expoentes conjugados, e, conforme vimos na Seção 3, temos $\pi_1 = \pi_\infty = 4$. Verificaremos para os demais casos. A construção desta Seção segue o apresentado por Keller e Vakil em [8], com o acréscimo de ilustrações que auxiliam no entendimento da teoria apresentada, assim como com a expansão dos cálculos apresentados pelos autores.

Para a demonstração a seguir, calcularemos o valor de π_p de um modo diferente. Continuamos entendendo-o como a razão entre o comprimento da circunferência e o diâmetro, mas usaremos uma parametrização diferente da escolhida anteriormente.

Teorema 4.1. *Se $p, q > 1$ são tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então $\pi_p = \pi_q$.*

Demonstração. Para mostrar que $\pi_p = \pi_q$ mostraremos que as integrais de comprimento de arco de π_p e π_q são iguais. Calculando o comprimento de arco com $x = h_1(t)$ e $y = h_2(t)$, onde $t \in [0, \infty)$ e h_1 e h_2 são funções a serem definidas posteriormente, teremos que $dx = h_1'(t)dt$ e $dy = h_2'(t)dt$ e, então,

$$ds_p = \int_0^\infty (|h_1'(t)|^p + |h_2'(t)|^p)^{\frac{1}{p}} dt. \quad (4.1)$$

O parâmetro t é escolhido de modo que a quantidade $t^{\frac{q}{p}}$ seja a inclinação da reta que passa na origem e no ponto $(h_1(t), h_2(t))$ em C_p , situados no primeiro quadrante, como na Figura 4.

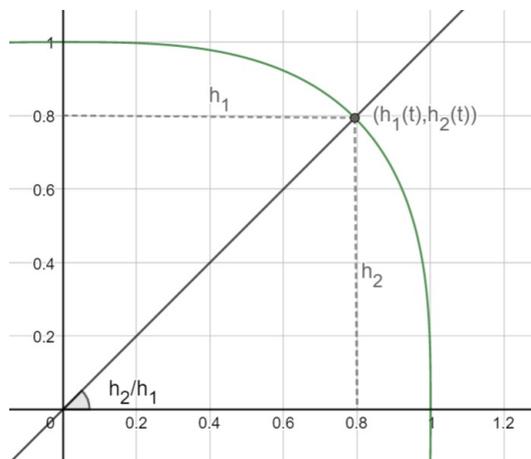


Figura 4: O parâmetro t e a relação com h_1 e h_2 . Fonte: Autores.

Vamos agora encontrar as expressões explícitas de h_1 e h_2 . Pela equação da circun-

ferência em C_p , tem-se

$$\begin{aligned} |h_1(t)|^p + |h_2(t)|^p = 1 &\Rightarrow 1 + \frac{|h_2(t)|^p}{|h_1(t)|^p} = \frac{1}{|h_1(t)|^p} \\ &\Rightarrow 1 + \left|t^{\frac{q}{p}}\right|^p = |h_1(t)|^{-p} \\ &\Rightarrow |h_1(t)| = (1 + t^q)^{-\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Para obter $|h_2(t)|$ basta dividir a mesma expressão por $|h_2(t)|^p$ e segue analogamente que $|h_2(t)| = (t^{-q} + 1)^{-\frac{1}{p}}$. Parametrizando C_q de modo análogo com $x = s_1(t)$ e $y = s_2(t)$, obtemos

$$s_1(t) = (t^p + 1)^{-\frac{1}{q}} \quad e \quad s_2(t) = (t^{-p} + 1)^{-\frac{1}{q}}.$$

Considere $F(t) = -h_1(t)s_2(t) + s_1(t)h_2(t)$. Em $t = 0$ e $t \rightarrow \infty$ temos que $h_1 = s_1$ e $h_2 = s_2$ e, ainda, $F(0) = 0$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 0$, então, pelo Teorema Fundamental do Cálculo [14],

$$\int_0^\infty F'(t)dt = 0. \quad (4.2)$$

Por outro lado, temos também

$$F' = -h_1's_2 - h_1s_2' + h_2's_1 + h_2s_1'. \quad (4.3)$$

Segue por (4.2) e (4.3) que

$$\int_0^\infty -h_1's_2 - h_1s_2' + h_2's_1 + h_2s_1'dt = 0,$$

donde

$$\int_0^\infty (-h_1's_2 + h_2's_1)dt = \int_0^\infty (-h_2s_1' + h_1s_2')dt. \quad (4.4)$$

Agora vamos mostrar que o integrando no lado esquerdo de (4.4) pode ser escrita como:

$$-h_1's_2 + h_2's_1 = (|h_1'|^p + |h_2'|^p)^{\frac{1}{p}}. \quad (4.5)$$

Para provar isso, primeiramente reescreveremos o lado esquerdo da igualdade acima. Note que, ao longo do desenvolvimento, utilizamos algumas expressões que podem ser obtidas a partir da equação $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tais como $pq - q = p$ e $q = \frac{p}{p-1}$.

$$\begin{aligned}
-h'_1 s_2 + h'_2 s_1 &= - \left(-\frac{1}{p} \right) (t^q + 1)^{-\frac{p+1}{p}} q t^{q-1} (t^{-p} + 1)^{-\frac{1}{q}} \\
&\quad + \left(-\frac{1}{p} \right) (t^{-q} + 1)^{-\frac{p+1}{p}} (-q) t^{-(q+1)} (t^p + 1)^{-\frac{1}{q}} \\
&= \frac{q}{p} (t^q + 1)^{-\frac{p+1}{p}} (t^p + 1)^{-\frac{1}{q}} \left[t^{q-1+\frac{p}{q}} + t^q \left(\frac{p+1}{p} \right)^{-(1+q)} \right] \\
&= \frac{q}{p} (t^q + 1)^{-\frac{p+1}{p}} (t^p + 1)^{-\frac{1}{q}} \left[t^{q-1+\frac{p}{q}} + t^q \left(\frac{p+1}{p} \right)^{-1-\frac{1}{q}} \right] \\
&= \frac{q}{p} (t^q + 1)^{-\frac{p+1}{p}} (t^p + 1)^{-\frac{1}{q}} \left[t^{q-1+p-1} + t^{\frac{p}{p-1} \left(\frac{p+1}{p} - 2 + \frac{1}{p} \right)} \right] \\
&= \frac{q}{p} (t^q + 1)^{-\frac{p+1}{p}} (t^p + 1)^{-\frac{1}{q}} \left[t^{\frac{p}{p-1}+p-2} + t^{\frac{p}{p-1} \left(\frac{p+1}{p} - 2 \right)} \right] \\
&= \frac{q}{p} (t^q + 1)^{-\frac{p+1}{p}} (t^p + 1)^{-\frac{1}{q}} \left[t^{\frac{2-p}{p-1}+p} + t^{\frac{2-p}{p-1}} \right] \\
&= \frac{q}{p} (t^q + 1)^{-\frac{p+1}{p}} (t^p + 1)^{-\frac{1}{q}} t^{\frac{2-p}{p-1}} (t^p + 1) \\
&= \frac{q}{p} (t^q + 1)^{-\frac{p+1}{p}} (t^p + 1)^{\frac{1}{p}-1} t^{\frac{1}{p-1}-1} (t^p + 1) \\
&= \frac{q}{p} (t^q + 1)^{-\frac{p+1}{p}} (t^p + 1)^{\frac{1}{p}} t^{\frac{1}{p-1}-1}.
\end{aligned}$$

Manipulando o lado direito de (4.5), temos

$$\begin{aligned}
(|h'_1|^p + |h'_2|^p)^{\frac{1}{p}} &= \left[\left(\frac{1}{p} (t^q + 1)^{-\frac{p+1}{p}} q t^{q-1} \right)^p + \left(\frac{1}{p} (t^{-q} + 1)^{-\frac{p+1}{p}} q t^{-(q+1)} \right)^p \right]^{\frac{1}{p}} \\
&= \left[\left(\frac{q}{p} \right)^p \left[(1 + t^q)^{-\frac{p+1}{p}} \right]^p \left((t^{q-1})^p + (t^{-q})^{-p-1} (t^{-q-1})^p \right) \right]^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{q}{p} (t^q + 1)^{-\frac{p+1}{p}} \left(t^{p(q-1)} + t^{q(p+1)-p(q+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{q}{p} (t^q + 1)^{-\frac{p+1}{p}} (t^q + t^{q-p})^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{q}{p} (t^q + 1)^{-\frac{p+1}{p}} (t^q (1 + t^{-p}))^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{q}{p} (t^q + 1)^{-\frac{p+1}{p}} (t^{\frac{p}{p-1}})^{\frac{1}{p}} [(1 + t^p)(t^{-p})]^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{q}{p} (t^q + 1)^{-\frac{p+1}{p}} (t^p + 1)^{\frac{1}{p}} t^{\frac{1}{p-1}-1}.
\end{aligned}$$

Desse modo o integrando do lado esquerdo de (4.4) é igual a ds_p . Com um argumento análogo é possível mostrar que o integrando do lado direito de (4.4) é igual a ds_q então temos que $ds_p = ds_q$. □

Nesse ponto vamos analisar esse resultado sob a perspectiva geométrica. Sabemos que as p -métricas não são isometrias, de modo que um mesmo objeto terá “medidas” diferentes quando alteramos os valores de p , por exemplo, as medidas de volume ou área da superfície da n -esfera ($n \geq 1$). Dessa maneira, como os objetos possuem formas e medidas diferentes, o mais natural a se esperar é que os valores de π_p (observado como a razão das medidas de comprimento e diâmetro) não tenham relação alguma com diferentes valores de p escolhidos, então ao provarmos que os valores de π_p e π_q coincidem para p e q expoentes conjugados, o resultado garante que ainda que toda a geometria mude, há valores que permanecem os mesmos, garantindo um certo sentido de simetria entre a p -métrica e q -métrica com relação aos valores de π .

5 Considerações Finais

O valor de π é uma famosa constante que aparece em diversos contextos na Matemática e uma das formas de encontrar essa constante é dividindo o comprimento da circunferência pelo diâmetro da mesma.

Verificamos até aqui que π assume diferentes valores quando mudamos a nossa maneira de calcular distâncias, ou seja, a métrica. Além disso, vimos que o valor de π em um conjunto específico de métricas resulta em uma integral fatigante, a qual não conseguimos escrever em termos de funções elementares, e por isso utilizamos uma aproximação que pode ser calculada em termos das funções Beta e Gama, a qual chamamos de Π_p .

Algo interessante a se evidenciar é que o menor valor de π ocorre quando $p = 2$ nesse conjunto de métricas, tratando essa constante como função de p , e esse valor é o único mínimo. Tanto a minimalidade quanto a unicidade foram demonstradas.

Outra interessante observação que pode ser feita é que para diferentes valores do parâmetro p , em geral, obtemos valores distintos para π , mas se tomarmos dois valores de p e q tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então os comprimentos das circunferências C_p e C_q são os mesmos, e portanto $\pi_p = \pi_q$ quando p e q são expoentes conjugados. Isso indica um sentido de simetria em relação aos valores obtidos para π , bem como de isometria dos comprimentos das circunferências nas p -métricas com $p \geq 1$.

Referências

- [1] Adler, C. L.; Tanton, James. *π is the minimum value for pi* . College Math. J. 31 (2000), no. 2, 102–106.
- [2] Albertino, M.; Bortolossi, H. *Sobre como Arquimedes obteve suas aproximações $223/71$ e $22/7$ para o número π : uma abordagem histórica*. Professor de Matemática Online, v.9 (2021), n.3, 514–527.
- [3] Artin, Emil. The gamma function. Translated by Michael Butler Athena Series: Selected Topics in Mathematics Holt, Rinehart and Winston, New York-Toronto-London 1964 vii+39.
- [4] Beckmann, Petr. *A history of π (pi)*. Second edition. The Golem Press, Boulder, Colo., 1971. 196 pp.
- [5] Conway, John B. *Functions of one complex variable*. Graduate Texts in Mathematics, 11. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973. xi+313 pp.
- [6] Euler, Russell; Sadek, Jawad. *The π s Go Full Circle*. Math. Mag. 72 (1999), no. 1, 59–63.
- [7] Guidorizzi, Hamilton Luiz. *Um curso de cálculo*, Vol 3. 5 ed, Rio de Janeiro, 2013.
- [8] Keller, Joseph B.; Vakil, Ravi. *π_p , the value of π in ℓ_p* . Amer. Math. Monthly 116 (2009), no. 10, 931–935.
- [9] Kreyszig, Erwin. *Introductory functional analysis with applications*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989. xvi+688 pp. ISBN: 0-471-50459-9.
- [10] Lima, Elon Lages. *Espaços métricos*. (Portuguese) [[Metric spaces]] Projeto Euclides [Euclid Project], 4. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1977. viii+299 pp.
- [11] *PI: japonesa supera 30 trilhões de dígitos em novo recorde*. IMPA, 2019. Disponível em: [://impa.br/noticias/pi-japonesa-supera-30-trilhoes-de-digitos-em-novo-recorde/](https://impa.br/noticias/pi-japonesa-supera-30-trilhoes-de-digitos-em-novo-recorde/). Acesso em: 07 nov. 2021.
- [12] Salwinski, David. *Euler’s sine product formula: an elementary proof*. College Math. J. 49 (2018), no. 2, 126–135.

- [13] Sebah, Pascal; Gordon, Xavier . *Introduction to the gamma function*. American Journal of Scientific Research (2002), 2–18.
- [14] Stewart, James. *Cálculo: volume 1*. 7 ed, São Paulo: Cengage Learning, 2013.

Submetido em 20 de Agosto de 2021.
Aceito em 27 de Abril de 2022.

A Construções no GeoGebra

Com o intuito de ilustrarmos nosso trabalho, desenvolvemos todas as figuras com o *software* livre GeoGebra. Nesta Seção mostraremos como construir os gráficos apresentados nas Figuras 2, 3 e 4.

A.1 Figura 2

Para a construção desta figura, começamos deduzindo uma outra expressão integral para π_p . Note que o comprimento de arco é a integral de $ds_p = (|dx|^p + |dy|^p)^{\frac{1}{p}}$ sobre C_p , como definida em (3.1). Como a circunferência é unitária, seu diâmetro é 2. Dessa forma, podemos escrever π_p como

$$\pi_p = \frac{1}{2} \int_{C_p} (|dx|^p + |dy|^p)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{2} \int_{C_p} \left(1 + \left|\frac{dy}{dx}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} |dx|.$$

Como apresentado na Figura 3, a circunferência construída possui simetria radial, portanto o seu comprimento será igual a oito vezes o comprimento do arco compreendido entre as retas $x = 0$ e $x = y$. Fazendo $x = y$ em C_p teremos $x = 2^{-\frac{1}{p}}$ e podemos calcular o valor de π_p usando $y = (1 - x^p)^{\frac{1}{p}}$, já que tanto x quanto y são não negativos. Assim,

$$\begin{aligned} \pi_p &= \frac{8}{2} \int_0^{2^{-1/p}} \left(1 + \left|\left(\frac{1}{p}\right) (1 - x^p)^{\frac{1-p}{p}} (-p)x^{p-1}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} dx \\ &= 4 \int_0^{2^{-1/p}} \left(1 + |x^{-p} - 1|^{1-p}\right)^{\frac{1}{p}} dx. \end{aligned}$$

Assim, iniciamos a construção da figura definindo um controle deslizante na aba “Ferramentas Básicas”, conforme ilustrado na Figura 5.

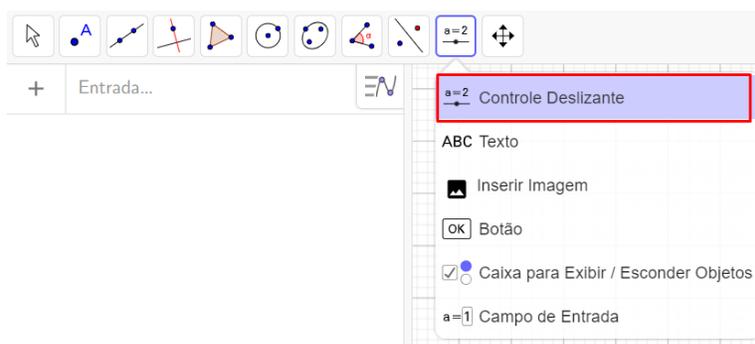


Figura 5: Construindo o controle deslizante. Fonte: Autores.

Criamos o controle deslizante a partir do ponto p , configurado como na Figura 6.



Figura 6: Configuração do controle deslizante. Fonte: Autores.

Definiremos um ponto A da seguinte maneira: o controle deslizante p será a primeira coordenada deste ponto, enquanto a segunda coordenada será a integral que define π_p como descrito no início da Subseção, conforme a fórmula a seguir.

$$A = (p, 4 \text{IntegralNumérica}((1+(|x^{-p}-1|)^{1-p})^{1/p}), 0, 2^{-1/p})$$

Na Figura 7 abaixo, temos a implementação do código acima na “Janela de Álgebra” do GeoGebra.

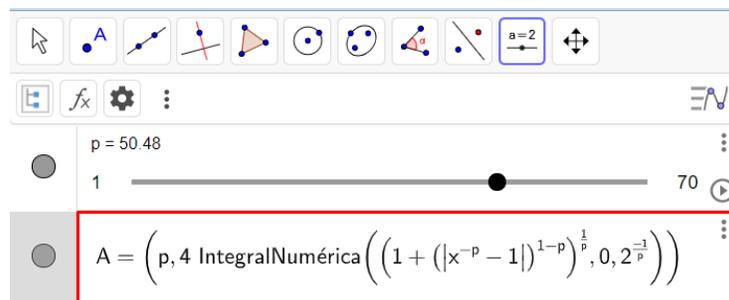


Figura 7: Ponto do gráfico da função de π_p . Fonte: Autores.

Em seguida marcamos a caixa “Exibir Rastro” e trocamos a cor do ponto como feito nas instruções da Figura 8.

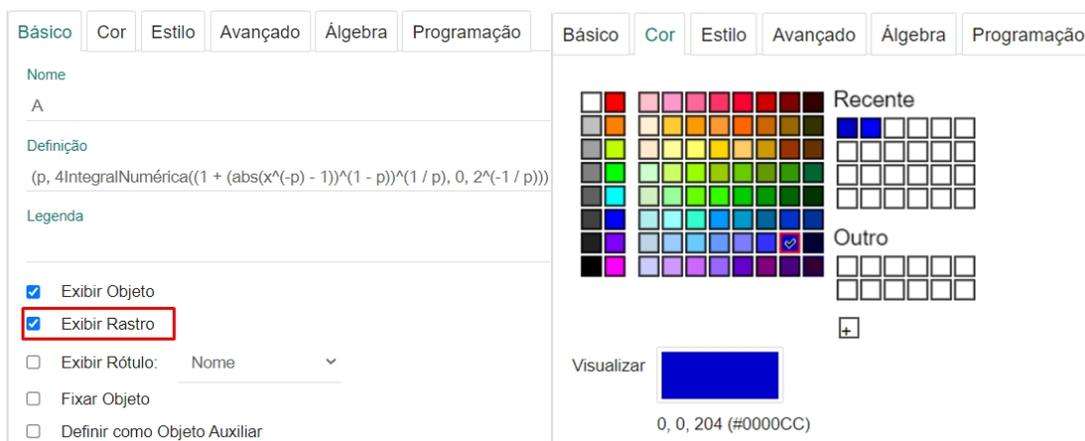


Figura 8: Configuração do ponto A. Fonte: Autores.

Para obtermos o gráfico de π_p , devemos iniciar a animação do controle deslizante (isso pode ser feito clicando no botão “play” na “Janela de Álgebra”) e aguardar alguns minutos para que o ponto percorra a “Janela de Visualização”, preenchendo os pontos e completando a curva, como na figura seguinte.

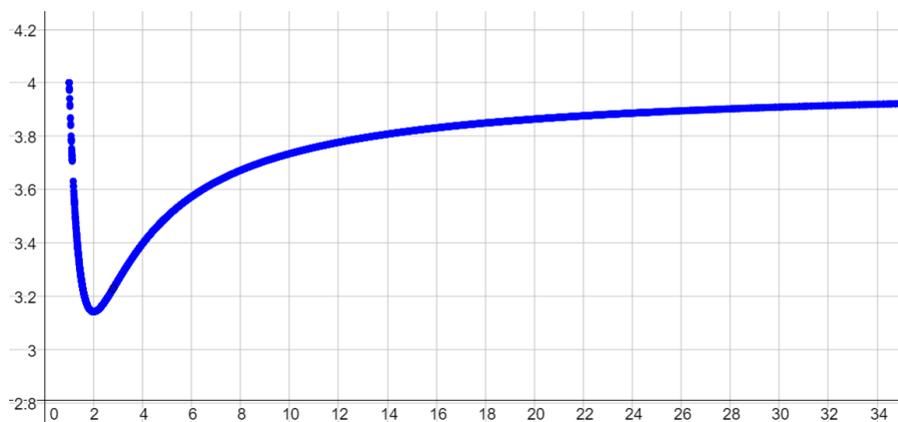


Figura 9: Construção parcial do gráfico da Figura 2. Fonte: Autores.

Perceba que a diferença entre as Figuras 2 e 9 é um preenchimento de parte do gráfico. Para completar a parte vazia, basta aguardar um tempo maior na animação.

A.2 Figura 3

Para a construção da Figura 3, no campo “Entrada...”, escrevemos cinco equações da circunferência na p -métrica $|x|^p + |y|^p = 1$, para os seguintes valores de p : $p = 1$; $p = 1,5$; $p = 2$; $p = 5$ e $p \rightarrow \infty$ (aqui usamos $p = 100$).

Mostraremos como fazer o caso $p = 1$, e os outros seguem de maneira análoga. Na Janela de Álgebra, digite

$$|x|^1 + |y|^1 = 1,$$

Em seguida, aperte a tecla *Enter*. A Figura 10 abaixo retrata exatamente esses passos.

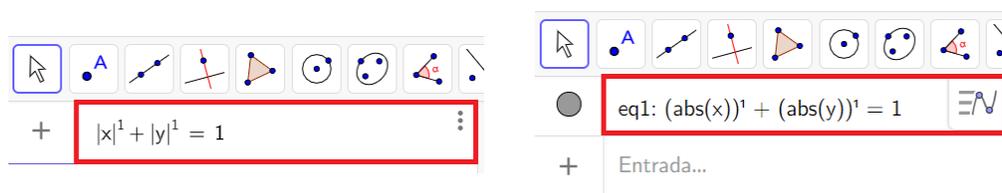


Figura 10: Comandos iniciais da Figura 3. Fonte: Autores.

Na “Janela de Visualização” do GeoGebra, obtemos a seguinte Figura:

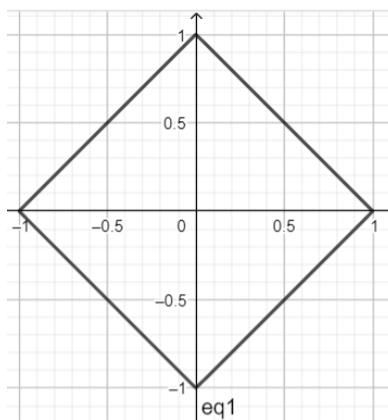


Figura 11: Circunferência com $p = 1$. Fonte: Autores.

Vamos agora colocar uma legenda neste objeto, para facilitar sua identificação com o p . Além disso, vamos verificar a opção de cor (isso servirá para as próximas figuras). Clique com o botão direito do *mouse* na equação (ou no objeto) e selecione a opção “Configurações”, conforme a figura abaixo.

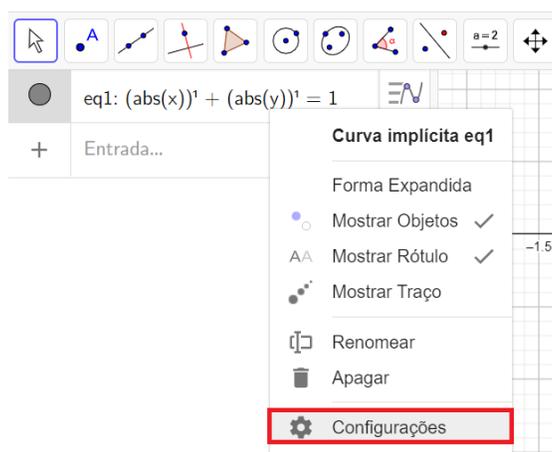


Figura 12: Configurando a Figura 3. Fonte: Autores.

Na aba “Básico” (que já vai ser a inicial), altere a “Legenda” clicando com o botão esquerdo do *mouse* e digitando “ $p = 1$ ”. Agora na opção “Cor” você conseguirá alterar a cor do objeto. Nesse caso, não faremos isso porque consideramos a figura inicial na cor preta.

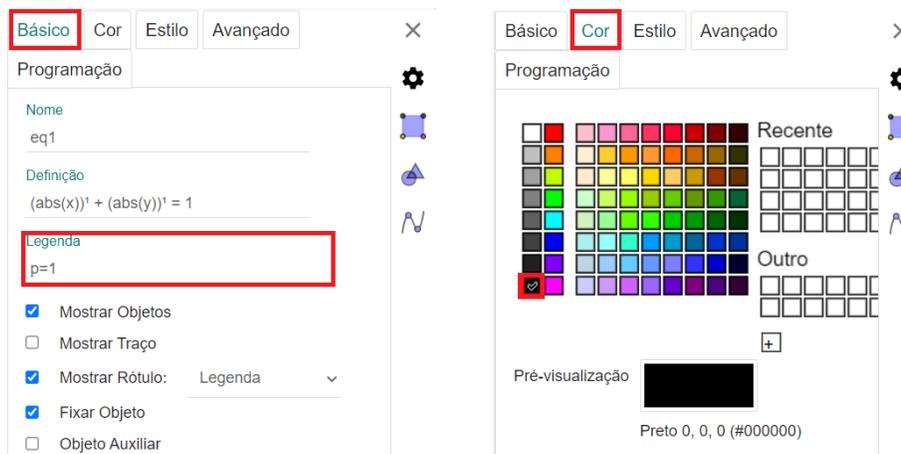


Figura 13: Configurando a Figura 3. Fonte: Autores.

Ao fazermos isso repetidas vezes, com os valores de p descritos no início da Seção, mudando as suas “Legendas” e alterando suas cores para diferenciar visualmente cada circunferência na sua respectiva métrica, obtemos a seguinte figura:

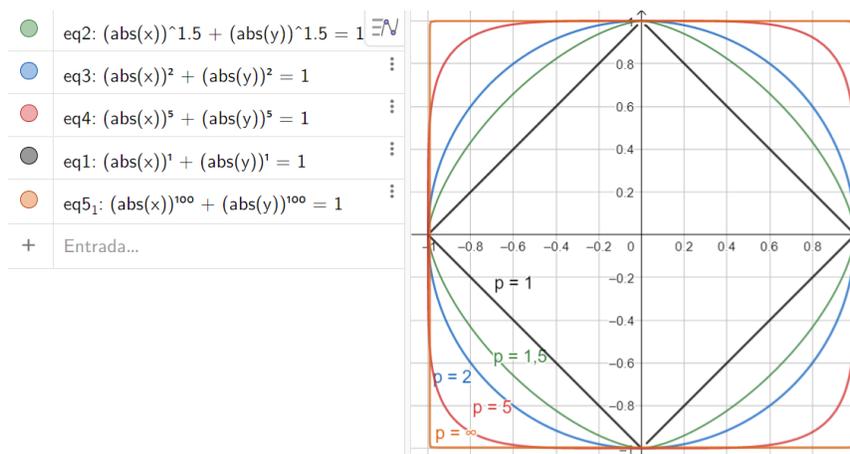


Figura 14: Figura 3 finalizada. Fonte: Autores.

A.3 Figura 4

Na elaboração da Figura 4, construímos uma das bolas apresentadas na Figura 3, traçamos uma reta entre a origem e um ponto da circunferência e configuramos os objetos criados dando nome e a coloração aos mesmos. Para a circunferência, clique na “Janela de Álgebra” e digite

$$|x|^3 + |y|^3 = 1,$$

em seguida aperte a tecla *Enter*.

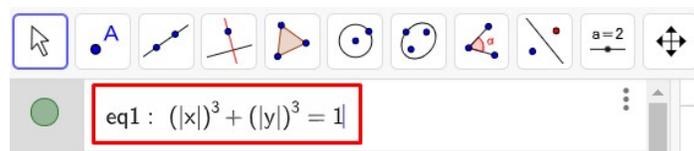


Figura 15: Comandos iniciais da Figura 4. Fonte: Autores.

Após construir a circunferência, escolha a opção “Ponto em Objeto” chamando-o de A, e selecione um ponto qualquer da circunferência produzida. Em sequência, marque a origem do plano, digitando o ponto (0,0) na “Janela de Álgebra”. Em seguida, definiremos a reta que passa por A e O, escolhendo a opção “Reta” no menu inicial e selecione esses pontos em qualquer ordem. Esses passos estão resumidos na Figura 16 abaixo.

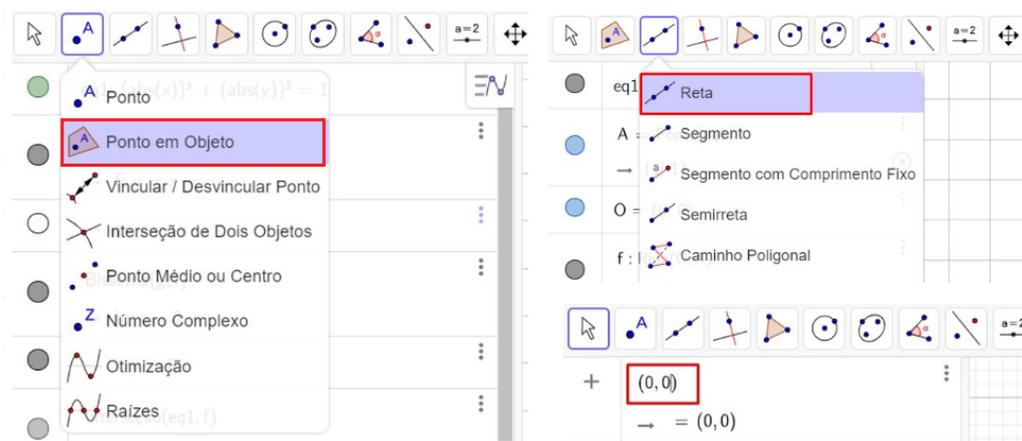


Figura 16: Comandos da Figura 4. Fonte: Autores.

Chamamos essa reta de f e estando representada na “Janela de Álgebra” como na imagem a seguir.

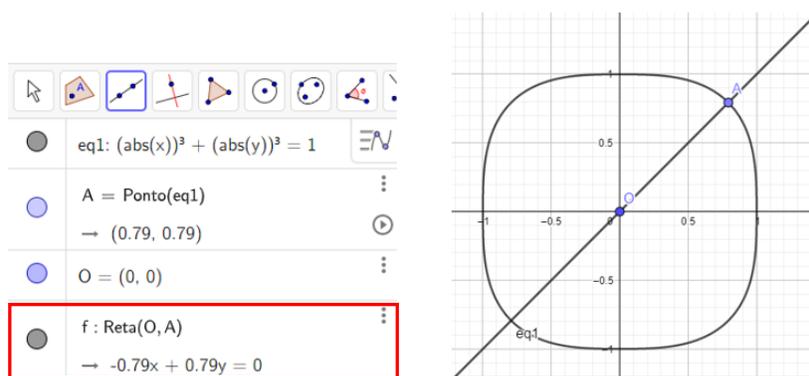


Figura 17: Visualização após a terceira etapa. Fonte: Autores.

Selecione a opção “Reta perpendicular” e escolha o ponto A e o eixo y , em seguida, repita o processo escolhendo dessa vez o ponto A e o eixo x .

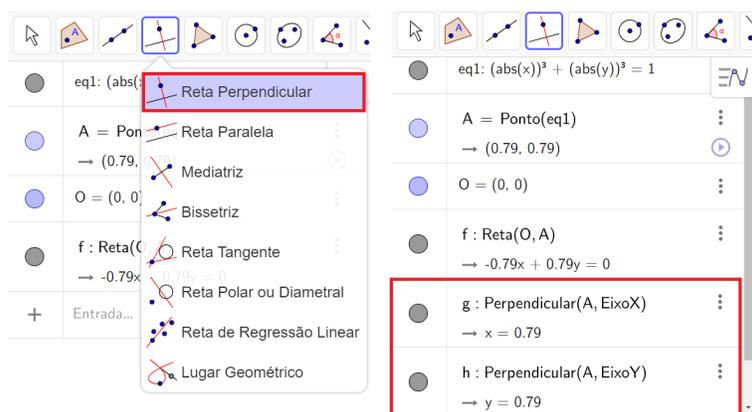


Figura 18: Criação das coordenadas do ponto da Figura 4. Fonte: Autores.

Para cada uma dessas retas, destaque o ponto que é perpendicular aos eixos. Para isso, na opção “Interseção de Objetos”, escolha a reta g e o eixo y e repita o processo para a reta f e o eixo x .

O próximo passo é ocultar as retas perpendiculares. Para isso, escolha a reta g , clique com o botão direito do *mouse* e deixe a opção “Exibir Objeto” desabilitada. Repita o processo para a reta h .

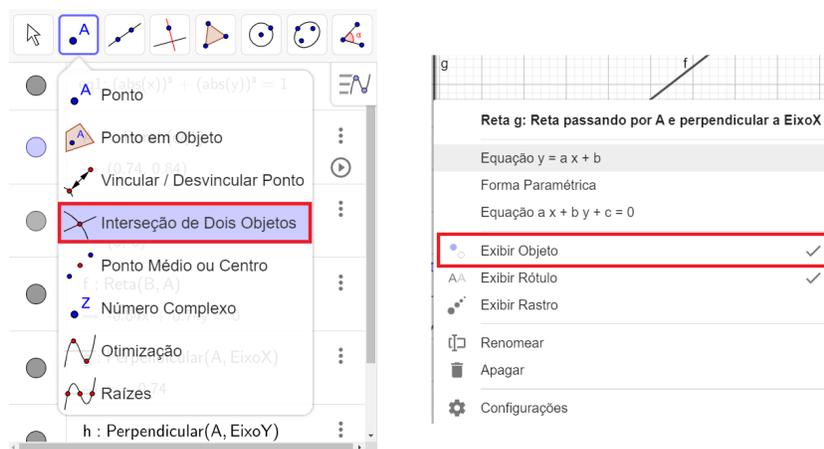


Figura 19: Ocultando as retas g e h . Fonte: Autores.

Em seguida, escolha a opção “Segmento” e selecione o ponto de interseção da circunferência com a reta f e depois o ponto que está no eixo x e pertence à reta g ocultada.

Repita o procedimento escolhendo o ponto de interseção da circunferência com a reta f e, em seguida, o ponto que está no eixo y e pertence à reta h , que foi ocultada.

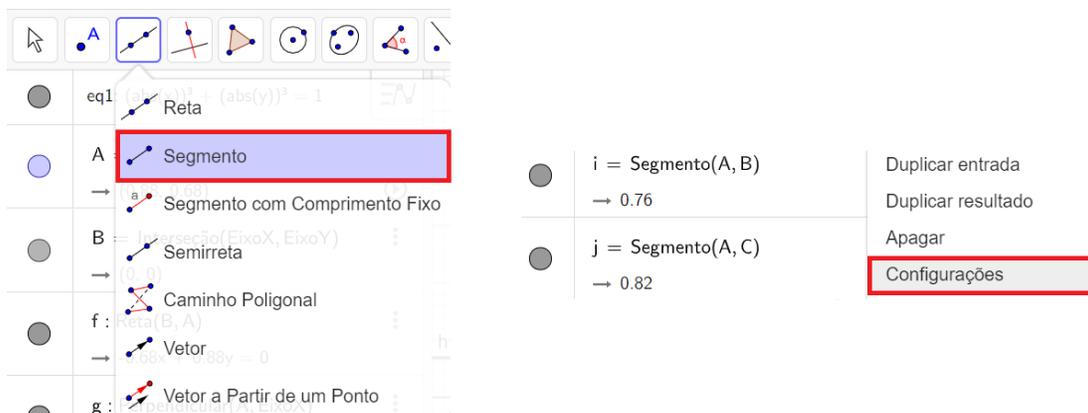


Figura 20: Definindo os segmentos. Fonte: Autores.

O segmento paralelo ao eixo y deve ser renomeado como h_2 , e o paralelo ao eixo x como h_1 . Por fim, vá até as configurações dos segmentos criados e, na opção “Estilo”, selecione o pontilhado como indicado na Figura 21 a seguir.

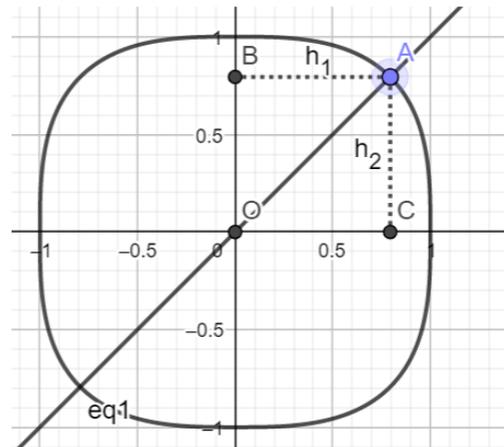


Figura 21: Fim da construção das coordenadas do ponto A . Fonte: Autores.

O último passo é exibir o ângulo que está sendo formado entre o eixo x e a reta f . Para isso, escolha a opção “Ângulo” e clique, nessa ordem, na reta f , na origem

do plano e no eixo x . Quando o ângulo estiver definido, troque seu nome para a razão h_2/h_1 .

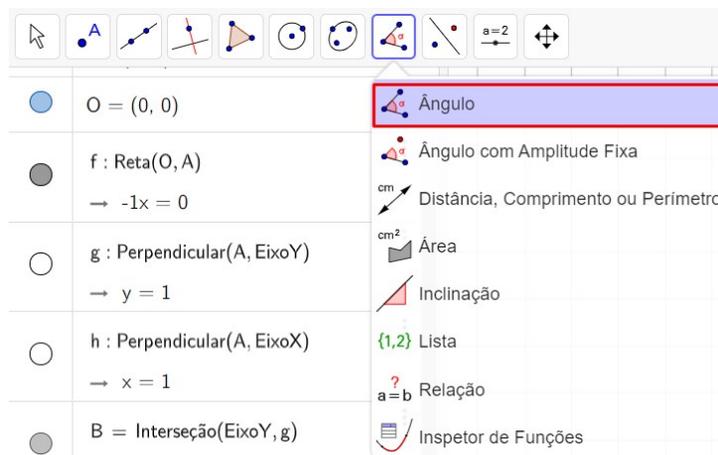


Figura 22: Construção do ângulo na Figura 4. Fonte: Autores.

Ao fim destes procedimentos, na “Janela de Visualização”, a figura formada será a apresentada na Figura 4.