REVISEM

Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática

https://doi.org/10.34179/revisem.v6i1.16274

RECORRÊNCIAS LINEARES HOMOGÊNEAS DE ORDEM 2 COM COEFICIENTES CONSTANTES VIA FUNÇÕES GERADORAS ORDINÁRIAS

Irene Magalhães Craveiro
Universidade Federal da Grande Dourados
irenecraveiro@ufgd.edu.br
Elen Viviani Pereira Spreafico
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
elen.spreafico@ufms.br
Mustapha Rachidi
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
mu.rachidi@gmail.com

Resumo

Este artigo apresenta fórmulas explícitas para a classe de soluções de recorrências lineares homogêneas de ordem 2 com coeficientes constantes determinada através de funções geradoras ordinárias. Além disso, aplicações do método de resolução em cada caso estudado são exibidos e as relações entre as fórmulas de Binet e as expressões obtidas via funções geradoras são discutidas. São propostos exemplos significativos de aplicação à contagem.

Palavras-chave: recorrências lineares, fórmula de Binet, funções geradoras.

Abstract

This paper presents an explicit expression to solve homogeneous linear recurrence of order 2 with constant coefficients through their associated generating functions. Moreover, applications in each case are exhibited and a relation between the Binet's formula and the obtained expression are discussed. Significant examples of application to counting are proposed.

Keywords: linear recurrences, Binet formula, generating functions.

1 Introdução

Considerando a Combinatória como um conteúdo importante para o desenvolvimento do raciocínio lógico e os professores como parte fundamental desse processo, os textos curriculares indicam o início do trabalho com problemas combinatórios desde os anos iniciais de escolarização, em especial o documento preliminar da BNCC [4], o qual orienta que as práticas de ensino de Combinatória se iniciem durante a Educação Básica. Assim, os conhecimentos pedagógicos dos professores sobre combinatória estão vinculados às diretrizes curriculares oficiais com indicações de que Combinatória pode ser trabalhada no Ensino Fundamental e Ensino Médio [1]. No entanto, esses conhecimentos matemáticos ainda podem ser aprofundados. Nesse sentido, o presente trabalho visa proporcionar aos professores uma visão concisa de um dos aspectos matemáticos importantes da combinatória.

De fato, as funções geradoras constituem uma ferramenta fundamental da combinatória, que pode ajudar o professor a construir estratégias adequadas para transmitir o importante pensamento em contagem. Por outro lado, o professor também pode desenvolver atividades com orientações matemáticas mais formais.

Desta forma, as ferramentas como funções geradoras e equações de recorrências, entre outras, são muito importantes para o entendimento e resolução dos problemas de contagem. Estes instrumentos são pouco utilizados, e até mesmo desconhecidos, pelos professores na Educação Básica.

Recorrências têm como exemplos clássicos no ensino médio, as progressões aritmética e geométrica, e estão relacionadas com algoritmos recursivos úteis em problemas de contagem, nos quais o problema interpretado pode ser modelado por uma equação recursiva. Precisamente, dada uma sequência de números reais $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots)$ chama-se relação de recorrência a equação que relaciona o elemento a_n com seus predecessores. Dizemos que a relação de recorrência é de ordem r, $r \geq 1$, se o elemento a_n está relacionado com seus r elementos predecessores, dadas as condições iniciais $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{r-1}$. Um exemplo clássico na literatura é a sequência de Fibonacci cuja ordem é 2, têm condições iniciais usualmente dadas por $a_0 = 0, a_1 = 1$ e sua relação de recorrência é definida pela equação $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, [veja mais detalhes em [9, 11]].

O conceito de função geradora originou-se a partir dos trabalhos de A. Moivre (1667-1754) e Euler (1707-1783), que aplicaram essa técnica em problemas de Teoria Aditiva de Números, especialmente na Teoria de Partições[1]. Laplace (1749-1827) introduziu esta técnica no estudo de probabilidade, e Nicolaus Bernoulli (1687-1759) no estudo de permutações caóticas[2].

> [...] Abraham De Moivre (1667-1754), Daniel Bernoulli (1700-1782) e Jacques Phillipc Marie Binet (1786-1 856) mostraram como achar diretamente

[1]Uma partição de um inteiro positivo k é uma sequência de números inteiros positivos que somados resultam em k.

[2]Uma permutação de n elementos distintos $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ é chamada caótica quando nenhum dos $a_i's$ se encontra na posição original, isto é, na *i-ésima* posição.

> os números de Fibonacci sem ser necessário calcular todos eles, até o que desejamos. Para isso, De Moivre utilizou pela primeira vez uma técnica extremamente poderosa, a das funções geradoras. Esta técnica, muito útil para estudar sucessões recorrentes, foi bastante desenvolvida por Euler (1707-1783), em seu livro clássico *Introductio in Analysin Infinitorum*, onde ele utiliza para atacar o problema das partições de um inteiro. O interesse de Euler por este problema surgiu devido a uma pergunta que lhe foi feita pelo matemático francês Phillipe Naudé, que trabalhava em Berlim, em uma carta, na qual, entre outras coisas, perguntava de quantas maneiras o número pode ser escrito como soma de inteiros positivos e distintos.[8]

Um método utilizado por matemáticos bem antes da invenção do Cálculo é a forma de escrever uma função como somas infinitas de monômios. Muitos matemáticos se esforçaram para dar contribuições para o desenvolvimento e aplicação de tal método, sendo Leibniz um deles. Ele contribuiu com a análise de várias sequências geométricas e explicou o conceito de limite utilizando uma abordagem sequencial de valores infinitamente próximos. Embora Leibniz nunca tenha pensado na derivada como um limite, ele descobriu muitos dos resultados que agora estudamos em Cálculo. Entretanto, foi o inglês Brook Taylor (1685 - 1731) o primeiro a apresentar uma fórmula geral para a construção de séries de potências de funções, publicando o método em seu trabalho *"Methodus Incrementorum Directa et Inversa"* de 1715, [3].

A análise combinatória se apropriou deste estudo para desenvolver técnicas de contagem; facilitando a obtenção dos resultados onde a função escrita em séries de potências tem coeficientes que podem ser interpretados como solução de uma dada recorrência ou resposta a um dado problema de contagem.

Neste contexto, este trabalho consiste em estabelecer uma conexão entre soluções de equações de diferença e as funções geradoras. Mais especificamente, utilizando a técnica de funções geradoras ordinárias, soluções são obtidas na resolução de recorrências lineares homogêneas de ordem 2 com coeficientes constantes e valores iniciais, sem utilizar da resolução de sistemas de Vandermonde (veja mais detalhes em [2, 10]).

Além disso, o material utilizado relaciona os conteúdos de funções, polinômios, sequências numéricas, progressões, sistemas lineares, resolução de equações algébricas, manipulações algébricas, entre outros assuntos, todos dentro da Educação Básica. Trata-se de constituir um material ao professor onde tem-se as fórmulas explicitamente para resolução de recorrências lineares homogêneas de ordem 2 com coeficientes constantes utilizando conhecimentos algébricos. Por outro lado, exibimos exemplos claros de problemas de contagem, que podem constituir um material ao professor, para aplicação direta em sala de aula. Ressaltamos aqui que no caso de raízes simples (o que mais temos exemplos na literatura), um exemplo que possui uma modelagem combinatória, além da resolução da recorrência associada foi discutido, trazendo assim uma possível sequência didática que o professor pode utilizar em sala de aula.

O conteúdo deste artigo é o seguinte. Na Seção 2, damos uma breve visão geral da função geradora como uma série de potências. A Seção 3 é dedicada à forma explícita da função geradora de recorrência de segunda ordem, com coeficientes constantes. Discutimos em detalhes os diferentes casos e damos exemplos detalhados com interpretações combinatórias. Na Seção 4 usamos a função geradora para estabelecer a forma analítica de Binet do termo geral definido pela recorrência de ordem 2. Por fim, a Seção 5 é dedicada às considerações finais, com uma discussão sobre o alcance de nossa abordagem tanto ao nível da formação de professores quanto ao nível da abordagem didática.

2 Série de potências e as funções geradoras

Em [11] é ilustrado como resolver alguns problemas de contagem por meio de funções geradoras. Tais funções são séries de potências em que os coeficientes nos trazem informações sobre uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e o expoente da variável na série quantifica alguma propriedade em que estamos interessados sobre essa sequência. Essa propriedade pode ser, por exemplo, o comprimento de uma sequência, ou uma solução inteira de uma determinada equação com coeficientes inteiros cuja soma é igual a n. Se associarmos tais potências da variável x somando-as, o coeficiente de x^n será o termo da sequência na posição n que satisfaz as exigências solicitadas no problema.

As séries de potências podem ser usadas na aproximação de funções. Ou seja, dada uma função, ao encontrar uma série infinita que converge, para esta função, vemos que as somas parciais desta série podem ser utilizadas para aproximar a função a um número real. Mesmo que as funções originais sejam difíceis, ou impossíveis de serem avaliadas diretamente, as somas parciais destas séries infinitas correspondentes se tornam polinômios e podem ser avaliados com facilidade. A aproximação de funções por somas parciais de suas séries infinitas é o método utilizado por computadores e por calculadoras para gerar valores de funções tais como $e^x, \ln x$ e as funções trigonométricas (para mais detalhes veja [6, 7]).

Definição 2.1. Séries de potências ou séries formais são séries infinitas da forma

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

onde cada termo é uma constante multiplicada por uma potência de x.

Exemplo 2.2. Pode-se notar que um polinômio de grau n é uma série de potência cujos coeficientes são zero, exceto para um conjunto finito de índices. De fato,

$$
\begin{aligned}
p(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \\
&= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + 0x^{n+1} + 0x^{n+2} + \cdots \\
&= \sum_{n\geq 0} a_nx^n.
\end{aligned}
$$

Note também que a n-ésima soma parcial de uma série de potência é um polinômio, isto é,

$$S_n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}.$$

Se a variável x assume um valor numérico em específico, a série se torna uma sequência de termos constante que converge ou diverge. Uma série de potência pode convergir para alguns valores de x e divergir para outros. Pode ser mostrado que a cada série de potências corresponde um intervalo simétrico $-L < x < L$, no interior do qual a série converge e no exterior diverge. Nos pontos de fronteira, $x = -L$ e $x = L$, tanto pode convergir como divergir. O número L é chamado *raio de convergência*, e o conjunto de todos os números para os quais a série converge é chamado *intervalo de convergência*. Este intervalo pode ser infinito caso a série seja convergente para todos os valores de x no conjunto dos números reais (veja [7] para mais detalhes).

Seja uma função $f(x)$ com série de potências correspondente dada por

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} a_nx^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

convergindo em um intervalo $(-\mathrm{L}, \mathrm{L})$. Outro resultado importante é que se a série de potências converge para $f(x)$ no intervalo $-L < x < L$, então a série derivada converge para $f'(x)$ neste intervalo. Assim, derivando a série, termo a termo, obtemos que

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots$$

é a serie de potências da função derivada com raio de convergência também igual a L (segue de [7]).

Exemplo 2.3. A série geométrica $\dfrac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\ldots$ tem raio de convergência $\mathrm{L} = 1$ e é derivável em $(-1, 1)$. Assim concluímos que

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}.$$

3 Fórmula Explícita

Nesta seção aplicaremos a técnica de função geradora para determinar uma fórmula explícita para uma recorrência linear homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes.

Definição 3.1. Uma recorrência linear homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes é uma recorrência cuja equação é da forma

$$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0, \tag{3.1}$$

com $q \neq 0$ e condições iniciais a_0 e a_1.

Resolver uma equação de recorrência é determinar uma expressão somente em termos de n que satisfaça a relação (3.1). Quando $q = 0$, a Equação (3.1) reduz-se a um recorrência de primeira ordem na qual também podemos determinar uma solução através de funções geradoras. Muitos exemplos de resoluções de recorrências de primeira ordem como, por exemplo, determinar número de permutações caóticas, são dadas em [11]. Estudemos a seguir uma recorrência de segunda ordem.

Seja a sequência $(a_n)_{n\geq 0}$ obtida por (3.1) com condições iniciais a_0 e a_1 e considere a igualdade $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Multiplicando a Expressão (3.1) por x^{n+2} obtemos

$$a_{n+2}x^{n+2} + pa_{n+1}x^{n+2} + qa_n x^{n+2} = a_{n+2}x^{n+2} + pxa_{n+1}x^{n+1} + qx^2 a_n x^n = 0.$$

Logo

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2}a_{n+2} + p\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^{n+2} + q\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = 0,$$

ou ainda,

$$-a_0 - a_1 x + \sum_{n=0}^{\infty} a^n x_n + px\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^{n+1} + qx^2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0. \tag{3.2}$$

Observando que $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^{n+1}$, e portanto $f(x) - a_0 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^{n+1}$, substituindo $f(x)$ em (3.2) obtemos

$$-a_0 - a_1 x + f(x) + px(f(x) - a_0) + qx^2 f(x) = 0,$$

ou ainda,

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1 x + p x a_0}{1 + px + qx^2}. \tag{3.3}$$

Com essas manipulações algébricas temos o seguinte teorema

Teorema 3.2. *Dada uma recorrência linear homogênea com coeficientes constantes* p, q, *com* $q \neq 0$, *condições iniciais* a_0 *e* a_1, *e equação dada por* $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0, n \geq 0$, *então a função geradora para a sequência* $(a_n)_{n\geq 0}$ *é igual a*

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1 x + p x a_0}{1 + px + qx^2}.$$

Observe que a Expressão (3.3) é uma função racional. Desta forma, vamos analisar o denominador de $f(x)$ em (3.3) afim de descrever uma solução para (3.1). Ou ainda, determinar uma fórmula explícita para a_n, coeficiente de x^n na expansão de $f(x)$.

Temos três possibilidades para o discriminante $\Delta = p^2 - 4q$ do polinômio de segundo grau $s(x) = qx^2 + px + 1$, são elas: $\Delta > 0, \Delta < 0$ ou $\Delta = 0$. As próximas seções estão destinadas ao estudo em cada caso.

3.1 Estudo do caso I

Vamos supor $\Delta > 0$ para o polinômio $1 + px + qx^2$. Então existem duas raízes $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$qx^2 + px + 1 = q(x - x_1)(x - x_2) \tag{3.4}$$

dadas por

$$x_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2q} \text{ e } x_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2q}, q \neq 0.$$

Observe que $x = 0$ não é raiz de $qx^2 + px + 1$ e portanto $x_1, x_2 \neq 0$. Então, utilizando as Expressões (3.3) e (3.4) obtemos

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1 x + p x a_0}{1 + px + qx^2} = \frac{a_0 + a_1 x + p x a_0}{q(x - x_1)(x - x_2)} = \left(\frac{1}{q}\right)\left[\frac{a_0 + a_1 x + p x a_0}{(x - x_1)(x - x_2)}\right]. \tag{3.5}$$

Decompondo o quociente $\frac{a_0 + a_1 x + p x a_0}{(x - x_1)(x - x_2)}$ em fração parciais (veja mais detalhes em [6]) temos

$$\frac{a_0 + a_1 x + p x a_0}{(x - x_1)(x - x_2)} = \left(\frac{1}{x_1 - x_2}\right)\left(\frac{a_0 + a_1 x_1 + p x_1 a_0}{x - x_1}\right) + \left(\frac{1}{x_2 - x_1}\right)\left(\frac{a_0 + a_1 x_2 + p x_2 a_0}{x - x_2}\right). \tag{3.6}$$

Assim, das Expressões (3.5) e (3.6), segue a igualdade,

$$f(x) = \frac{1}{q}\left[\frac{a_0 + a_1x_1 + px_1a_0}{x_1 - x_2}\left(\frac{1}{1-\left(\frac{x}{x_1}\right)}\right)\left(\frac{-1}{x_1}\right) + \frac{a_0 + a_1x_2 + px_2a_0}{x_2 - x_1}\left(\frac{1}{1-\left(\frac{x}{x_2}\right)}\right)\left(\frac{-1}{x_2}\right)\right].$$

As funções $g(x) = \frac{1}{1-\left(\frac{x}{x_1}\right)}$ e $h(x) = \frac{1}{1-\left(\frac{x}{x_2}\right)}$ podem ser vistas como séries geométricas, e expandidas em séries de potências cujos valores x para os quais essas séries convergem são $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ e $\left|\frac{x}{x_2}\right| < 1$, respectivamente (veja Exemplo (2.3)).

Logo segue a igualdade

$$f(x) = \frac{-1}{q}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a_0 + a_1x_1 + px_1a_0}{x_1(x_1 - x_2)}\right)\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \left(\frac{a_0 + a_1x_2 + px_2a_0}{x_2(x_2 - x_1)}\right)\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right],$$

onde coeficiente de x^n é dado por

$$\frac{-1}{q}\left[\frac{a_0 + a_1x_1 + px_1a_0}{(x_1 - x_2)x_1^{n+1}} + \frac{a_0 + a_1x_2 + px_2a_0}{x_2^{n+1}(x_2 - x_1)}\right]. \tag{3.7}$$

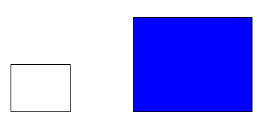
Sobre as considerações precedentes segue então o seguinte resultado sobre a fórmula explícita para a_n no caso $\mathbf{\Delta > 0}$.

Proposição 3.3. *Seja a recorrência $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$ com $q \neq 0$, condições iniciais a_0 e a_1, e polinômio $s(x) = 1 + px + qx^2$ tal que $\Delta = p^2 - 4q > 0$, então uma fórmula explícita para a_n é*

$$a_n = -\frac{1}{q}\left[\frac{a_0 + a_1x_1 + px_1a_0}{(x_1 - x_2)x_1^{n+1}} + \frac{a_0 + a_1x_2 + px_2a_0}{(x_2 - x_1)x_2^{n+1}}\right],$$

onde x_1 e x_2 são raízes simples de $s(x)$.

Exemplo 3.4. Consideremos o problema de calcular o número de ladrilhamentos possíveis para um retâgunlo $2 \times n$ com dois tipos de ladrilhos, um ladrilho de cor branca (1×1) e um ladrilho de cor azul 2×2. Segue abaixo os dois tipos de ladrilhos,



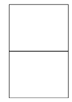


Figura 1: Ladrilhamentos para retângulo 2×1.

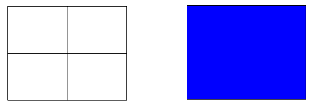


Figura 2: Ladrilhamentos para retângulo 2×2.

Denotamos por L_n o número de ladrilhamentos possíveis do retângulo $2 \times n$. Temos que $L_1 = 1$, pois há apenas um ladrilhamento para o retângulo 2×1 com os dois tipos de ladrilhos definidos anteriormente.

Temos dois casos possíveis para ladrilhamento do retângulo 2×2, ou ainda, $L_2 = 2$. O número de ladrilhamentos para o retângulo 2×3 é $L_3 = 3$. ladrilhamentos,

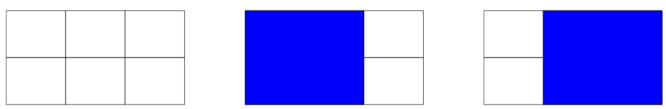
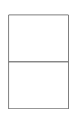


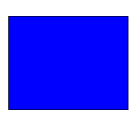
Figura 3: Ladrilhamentos para retângulo 2×3.

Observamos que $L_4 = 5$, pois há 5 maneiras de ladrilhar o retângulo 2×4 com os dois tipos de ladrilhos já definidos. Particionamos o conjunto dos ladrilhamentos $2 \times n$ com ladrilhos de dois tipos em dois conjuntos:

1. o conjunto dos ladrilhamentos $2 \times n$ que contém na última coluna 2×1 ladrilhos de cor branca.



2. o conjunto dos ladrilhamentos $2 \times n$ que contém nas duas últimas colunas um ladrilho de cor azul.



Observamos que a cardinalidade do primeiro conjunto que definimos é L_{n-1}. O segundo conjunto tem cardinalidade L_{n-2}. Portanto estabelecemos a seguinte relação de recorrência para este problema:

$$\begin{cases} L_1 = & 1 \\ L_2 = & 2 \\ L_n = & L_{n-1} \quad +L_{n-2} \end{cases}.$$

Observamos que esta relação de recorrência nos fornece os números de Fibonacci.

Essa sequência é dada por uma recorrência homogênea linear de grau 2 com coeficientes constantes com equação $a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$ e condições iniciais $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$. Então temos $p = q = -1$ e, pela aplicação do Teorema (3.2), que a função geradora associada a sequência $(a_n)_{n\geq 0}$ é dada por

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1 x + pxa_0}{1 + px + qx^2} = \frac{0 + 1x + (-1)\cdot x \cdot 0}{1 - x - x^2} = \frac{x}{1 - x + x^2}.$$

O discriminante do denominador de $f(x)$, $s(x) = 1 - x + x^2$, é dado por $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 5 > 0$ e portanto suas duas raízes simples são dadas por

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \text{ e } x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Assim, pela aplicação direta da Proposição (3.3) obtemos

$$a_n \quad = \quad -\frac{(-1-\sqrt{5})}{2\sqrt{5}} \frac{1}{\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}} + \frac{(-1+\sqrt{5})}{2\sqrt{5}} \frac{1}{\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}},$$

que através de manipulações algébricas pode ser colocada na forma usual da literatura

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

3.2 Estudo do caso II

Vamos considerar $\Delta = 0$ para o polinômio $1 + px + qx^2$. Relembremos que o Teorema (3.2) traz como resultado a função geradora $f(x) = \dfrac{a_0 + a_1 x + pxa_0}{1 + px + qx^2}$ para a sequência $(a_n)_{n\geq 0}$, dados a_0, a_1 e $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$, com q e p constantes, $q \neq 0$.

Assim, dada a equação $1 + px + qx^2 = 0$, temos $\Delta = p^2 - 4q$ e sendo $\Delta = 0$, então $p^2 = 4q$, ou seja, $q = \dfrac{p^2}{4}$ e $x_1 = x_2 = \dfrac{-p}{2q}$. Dessa forma, escrevemos $1 + px + qx^2 = q.(x - x_1)(x - x_2) = q(x - x_1)^2$. Por outro lado,

$$q.\left(\frac{1}{q} + \frac{p}{q}x + x^2\right) = q(x - x_1)^2,$$

ou ainda

$$\frac{1}{q} + \frac{p}{q}x + x^2 = (x - x_1)^2.$$

Temos que

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0 + a_1x + pxa_0}{1 + px + qx^2} \\ &= \frac{1}{q}\left(\frac{a_0 + a_1x + pxa_0}{x^2 + \frac{p}{q}x + \frac{1}{q}}\right) \\ &= \frac{a_0 + a_1x + pxa_0}{q} \cdot \frac{1}{(x - x_1)^2} \\ &= \frac{a_0 + a_1x + pxa_0}{qx_1^2} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{x_1}\right)^2}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Dada a representação em série de potências de

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{x}{x_1}\right)} = 1 + \frac{x}{x_1} + \frac{x^2}{x_1^2} + \frac{x^3}{x_1^3} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{x_1}\right)^n x^n,$$

cujo raio de convergência é $\left|\dfrac{x}{x_1}\right| < 1$, ou seja, $|x| < |x_1|$, segue que a função $g(x) = \dfrac{1}{1 - \left(\frac{x}{x_1}\right)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{x_1}\right)^n x^n$ tem raio de convergência $|x_1|$ e, é derivável em $(-|x_1|, |x_1|)$. Além disso, $g'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{x_1}\right)^n x^{n-1}$ com raio de convergência $|x_1|$.

Por um lado, de $g'(x) = \dfrac{1}{x_1} \cdot \dfrac{1}{\left(1 - \dfrac{x}{x_1}\right)^2}$, segue a igualdade

$$\frac{1}{\left(1 - \dfrac{x}{x_1}\right)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot \frac{1}{x_1^n} \cdot x^n. \tag{3.9}$$

Substituindo a Expressão (3.9) na Expressão (3.8) obtemos:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0 + a_1 x + p x a_0}{q x_1^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot \frac{1}{x_1^n} \cdot x^n \\ &= (a_0 + a_1 x + p x a_0) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot \frac{1}{q x_1^2} \cdot \frac{1}{x_1^n} \cdot x^n \\ &= \frac{a_0 + a_1 x + p x a_0}{q x_1^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1) x^n}{q x_1^{n+2}}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

O coeficiente de x^n em (3.10) é

$$a_n = \frac{a_0(n+1)}{q x_1^{n+2}} + \frac{a_1 n}{q x_1^{n+1}} + \frac{p a_0 n}{q x_1^{n+1}}.$$

Sobre a discussão precedente temos a seguinte proposição.

Proposição 3.5. *Seja a recorrência $a_{n+2} + p a_{n+1} + q a_n = 0$ com $q \neq 0$, condições iniciais a_0 e a_1, e polinômio $s(x) = 1 + px + qx^2$ tal que $\Delta = p^2 - 4q = 0$, então uma fórmula explícita para a_n é*

$$a_n = \frac{a_0(n+1)}{q x_1^{n+2}} + \frac{a_1 n}{q x_1^{n+1}} + \frac{p a_0 n}{q x_1^{n+1}},$$

onde x_1 é raiz de $s(x)$.

Exemplo 3.6. Consideremos o problema de determinar a soma infinita dos seguintes números racionais $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{8}, \cdots, \frac{n}{2^n}, \cdots$. Horadam em seu artigo [12] remete a descoberta e estudo de tal sequência de números a Nicole Oresme, e portanto a sequência dos números $\left(\dfrac{n}{2^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ conhecida por sequência de Oresme. Ela tem aplicações na Biologia, mais especificamente no estudo de genótipos, respondendo a questão de como podemos calcular as proporções nas gerações posteriores conhecendo informações duas gerações anteriores.

O nosso entusiasmo em tal sequência é o fato de que a mesma é dada por uma recorrência homogênea linear de segunda ordem de equação geral $a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n = 0$ tomando como condições iniciais $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$, e parâmetros $p = -1$ e $q = \dfrac{1}{4}$. A aplicação da Proposição (3.5) com $p = -1$ e $q = \frac{1}{4}$, o polinômio $1 - x + \frac{1}{4}x^2$ com raiz dada por $x_1 = \dfrac{1}{2 \cdot \frac{1}{4}} = -2$ e condições iniciais $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$, nos garante a solução

$$a_n = \frac{-n}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}} = -n2^{-(n+1)}.$$

3.3 Estudo do caso III

Vamos considerar $\Delta < 0$ para o polinômio $1 + px + qx^2$. O caso $\Delta < 0$ não segue de maneira suave como os casos tratados anteriormente. Em geral, a solução usual em termos das funções seno e cosseno é dada de maneira bem sucinta nos livros didáticos, tanto pela sua aplicabilidade não tão comum aos problemas e por se tratar de uma solução que envolve somas infinitas convergentes. O que não retira a importância de tratar tal caso para a completude do trabalho.

Retornemos a Expressão (3.3). Reescrevendo obtemos

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1x + pxa_0}{1 + px + qx^2} = \frac{a_0 + a_1x + pxa_0}{q\left(x^2 + \frac{p}{q}x + \frac{1}{q}\right)},$$

que, pelo Teorema (3.2), é a função geradora da sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Considerando o polinômio $x^2 + \dfrac{p}{q}x + \dfrac{1}{q}$, do denominador de $f(x)$, segue que seu discriminante é dado por

$$\Delta' = \frac{p^2}{q^2} - \frac{4}{q} = \frac{p^2 - 4q}{q^2}.$$

Como $\Delta = p^2 - 4q < 0$ e $q^2 > 0$, então $\Delta' < 0$ e portanto as raizes do polinômio $x^2 + \dfrac{p}{q}x + \dfrac{1}{q}$ são dadas por

$$x = \frac{-\dfrac{p}{q} \pm \sqrt{\dfrac{p^2 - 4q}{q^2}}}{2} = \frac{-\dfrac{p}{q} \pm \dfrac{\sqrt{p^2 - 4q}}{|q|}}{2} = -\frac{p}{2q} \pm i\frac{\sqrt{4q - p^2}}{2q}.$$

Observe que

$$x^2 + \frac{p}{q}x + \frac{1}{q} = \left(x + \frac{p}{2q}\right)^2 - \frac{p^2}{4q^2} + \frac{1}{q} = \left(x + \frac{p}{2q}\right)^2 + \frac{1}{4}\left[\frac{-p^2 + 4q}{q^2}\right] = u^2 + A^2,$$

onde $u = x + \dfrac{p}{2q}$ e $A^2 = \dfrac{1}{4}\left[\dfrac{-p^2 + 4q}{q^2}\right] > 0$. Além disso, se $\lambda = -\dfrac{p}{2q} \pm i\dfrac{\sqrt{4q - p^2}}{2q} = \lambda_R \pm i\lambda_I$ é raiz de $x^2 + \dfrac{p}{q}x + \dfrac{1}{q}$ então $u = x - \lambda_R$ e $A^2 = -(\lambda_I)^2$.

Agora vamos trabalhar com a função

$$F(u) = \frac{1}{u^2 + A^2} = \frac{1}{A^2\left[\left(\frac{u}{A}\right)^2 + 1\right]} = \frac{1}{A^2} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{u^2}{A^2}\right)}.$$

Para $\left|-\dfrac{u^2}{A^2}\right| < 1$, ou seja, $u^2 < A^2$ temos a expansão em série de potências de função $F(u)$ dada por

$$F(u) = \frac{1}{A^2}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{-u^2}{A^2}\right)^j = \frac{1}{A^2}\left[1 - \frac{u^2}{A^2} + \frac{u^4}{A^4} - \frac{u^6}{A^6} + \frac{u^8}{A^8} + \cdots + (-1)^j\frac{u^{2j}}{A^j} + \cdots\right].$$

Para $u = x + \dfrac{p}{2q}$ obtemos

$$F\left(x + \frac{p}{2q}\right) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{A^{2j}}\left(x + \frac{p}{2q}\right)^{2j},$$

ou ainda,

$$\frac{1}{x^2 + \frac{p}{q}x + \frac{1}{q}} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{A^{2j+2}}\left(x + \frac{p}{2q}\right)^{2j}, \tag{3.11}$$

onde $A^2 = \frac{1}{4}\left[\frac{-p^2+4q}{q^2}\right]$. Segue a expansão do Teorema Binomial

$$\left(x + \frac{p}{2q}\right)^{2j} = \sum_{k=0}^{2j}\binom{2j}{k}\left(\frac{p}{2q}\right)^{2j-k}x^k. \tag{3.12}$$

com $\binom{2j}{k} = \frac{(2j)!}{k!(2j-k)!}$. Substituindo a Expressão (3.12) em (3.11) temos:

$$\frac{1}{x^2 + \frac{p}{q}x + \frac{1}{q}} = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2j}\frac{(-1)^j}{A^{2j+2}}\binom{2j}{k}\left(\frac{p}{2q}\right)^{2j-k} x^k.$$

Portanto a função geradora para $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pode ser rescrita como

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{q}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2j}\frac{(-1)^j}{A^{2j+2}}\binom{2j}{k}\left(\frac{p}{2q}\right)^{2j-k} x^k && (3.13)\\ &+ \left(\frac{a_1 + pa_0}{q}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2j}\frac{(-1)^j}{A^{2j+2}}\binom{2j}{k}\left(\frac{p}{2q}\right)^{2j-k} x^{k+1}, && (3.14)\end{aligned}$$

para $A^2 = \frac{1}{4}\left[\frac{-p^2+4q}{q^2}\right]$.

Ou ainda, na notação em termos das raízes complexas na forma $\lambda = -\frac{p}{2q} \pm i\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2q} = \lambda_R \pm i\lambda_I$,

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0||\lambda||\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2j}\frac{(-1)^{k+1}}{(\lambda_I^2)^{j+1}}\binom{2j}{k}(\lambda_R)^{2j-k}x^k\\ &\quad + (a_1 + 2\lambda_R a_0)\,||\lambda||\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2j}\frac{(-1)^{k+1}}{(\lambda_I^2)^{j+1}}\binom{2j}{k}(\lambda_R)^{2j-k}x^{k+1},\end{aligned}$$

O coeficiente de x^n em $f(x)$ em (3.13), e portanto fórmula explícita de a_n é a expressão

$$a_n = \frac{1}{q}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{A^{2j+2}}\left(\frac{p}{2q}\right)^{2j-n}\left(a_0\binom{2j}{n} + (a_1 + pa_0)\binom{2j}{n-1}\left(\frac{p}{2q}\right)\right),$$

com $A^2 = \frac{1}{4}\left[\frac{-p^2+4q}{q^2}\right]$.

Em termos das raízes complexas,

$$a_n = a_0||\lambda||\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(\lambda_I^2)^{j+1}}\binom{2j}{n}(\lambda_R)^{2j-n} + (a_1 + 2\lambda_R a_0)\,||\lambda||\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(\lambda_I^2)^{j+1}}\binom{2j}{n-1}(\lambda_R)^{2j-n+1}. \tag{3.15}$$

Segue o seguinte resultado.

Proposição 3.7. *Seja a recorrência* $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$ *com* $q \neq 0$, *condições iniciais* a_0 *e* a_1, *e polinômio* $s(x) = x^2 + \frac{p}{q}x + \frac{1}{q}$ *tal que* $\Delta = \frac{p^2-4q}{q^2} < 0$ *então uma fórmula explícita para* a_n *é*

$$a_n = \frac{1}{q}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{A^{2j+2}}\left(\frac{p}{2q}\right)^{2j-n}\left(a_0\binom{2j}{n} + (a_1 + pa_0)\binom{2j}{n-1}\left(\frac{p}{2q}\right)\right),$$

onde $A^2 = \frac{1}{4}\left[\frac{-p^2+4q}{q^2}\right]$.

Exemplo 3.8. Seja a recorrência $a_{n+2} - a_{n+1} + a_n = 0$. Então temos $p = -1$ e $q = 1$ e as a_0, a_1 condições iniciais. Do Teorema (3.2) segue que a função geradora associada a sequência $(a_n)_{n\geq 0}$ é dada por

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1x + pxa_0}{1 + px + qx^2} = \frac{a_0 + a_1x - xa_0}{1 - x + x^2}.$$

O discriminante do denonimador de $f(x)$, $s(x) = 1 - x + x^2$ é dado por $\Delta = (-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(1) = -3 < 0$ e portanto suas duas raízes complexas são dadas por

$$x_1 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \text{ e } x_2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}.$$

Aplicando a Proposição (3.7) temos $A^2 = \dfrac{-1+4}{4(1^2)} = \frac{3}{4}$ e

$$a_n = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j 4^{j+1}}{3^{j+1}}\left(\frac{-1}{2}\right)^{2j-n}\left(a_0\binom{2j}{n} + (a_1 - a_0)\binom{2j}{n-1}\left(\frac{-1}{2}\right)\right),$$

$$a_n = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{(j+n)}2^{(n+2)}}{3^{j+1}}\left(a_0\binom{2j}{n} - (a_1 - a_0)\binom{2j}{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right).$$

4 Fórmula Analítica de Binet

Como dito anteriormente, as soluções de recorrências homogêneas lineares com coeficientes constantes de ordem 2 são bem conhecidas na literatura e são obtidas através das raizes do polinômio característico associado a Equação (3.1), isto é, raizes do polinômio característico $p(x) = x^2 + px + q$.

A expressão obtida dessa forma são conhecidas como fórmula de Binet . Mais precisamente, se β_1 e β_2 são raízes do polinômio característico $p(x) = x^2 + px + q$, então a fórmula de Binet é dada pela combinação linear das potências dessas raízes,

$$a_n = C_1\beta_1^n + C_2\beta_2^n,$$

C_1, C_2 constantes. Conhecida a fórmula de Binet, através das condições inicias é possível calcular as constantes com a resolução do sistema linear de Vandermonde associado.

Nesse sentido, a fim de obter uma relação entre nosso estudo e a literatura, mostraremos que as expressões obtidas nas Proposições 3.3 e 3.5 tem relação com as fórmulas usuais, mostrando relação entre os polinômios característico $p(x)$ e o polinômio $s(x)$ do denominador da função geradora $f(x)$.

De fato, considerando os casos $\Delta > 0$ e $\Delta = 0$, temos que $s(x) = 1 + px + qx^2$ e

$$p(x) = x^2 + px + q = x^2\left[1 + \frac{1}{x}p + \frac{1}{x^2}q\right] = x^2 s\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$s(x) = 1 + px + qx^2 = x^2\left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}p + q\right] = x^2 p\left(\frac{1}{x}\right).$$

Assim, como $q \neq 0$, se α é raíz de $p(x)$ então $\alpha \neq 0$. De modo análogo, como $s(0) = 1 \neq 0$, então se λ é raíz de $s(x)$ então $\lambda \neq 0$. Logo, se α é raíz de $p(x)$ então $\frac{1}{\alpha}$ é raiz de $s(x)$. De modo análogo, se λ é raíz de $s(x)$ então $\frac{1}{\lambda}$ é raiz de $p(x)$.

Portanto, a fórmula de Binet segue como corolários das Proposições (3.3) e (3.5) em cada um dos casos, respectivamente.

Corolário 4.1. *Seja a recorrência $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$ com $q \neq 0$, condições iniciais a_0 e a_1, e polinômio $s(x) = 1 + px + qx^2$ tal que $\Delta = p^2 - 4q > 0$, então uma fórmula explícita para a_n é*

$$a_n = -\frac{1}{q}\left[\frac{a_0 + a_1x_1 + px_1a_0}{(x_1 - x_2)}\lambda_1^{n+1} + \frac{a_0 + a_1x_2 + px_2a_0}{(x_2 - x_1)}\lambda_2^{n+1}\right],$$

onde $\lambda_1 = \frac{1}{x_1}, \lambda_1 = \frac{1}{x_2}$, com x_1 e x_2 são raízes simples de $s(x)$.

Exemplo 4.2. Retornamos a sequência de Fibonacci tratada no Exemplo (3.4) dada pela equação $a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$ e condições iniciais $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$. O polinômio $s(x) = 1 - x + x^2$, é dado por $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 5 > 0$ e portanto suas duas raízes simples são dadas por

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \text{ e } x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Assim,

$$\lambda_1 = \frac{1}{x_1} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ e } \lambda_1 = \frac{1}{x_2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

e $x_2 - x_1 = \sqrt{5}$. Segue então do Corolário (4.1) a solução

$$a_n = \left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} + \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right],$$

ou ainda,

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Corolário 4.3. *Seja a recorrência* $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$ *com* $q \neq 0$*, condições iniciais* a_0 *e* a_1*, e polinômio* $s(x) = 1 + px + qx^2$ *tal que* $\Delta = p^2 - 4q = 0$*, então uma fórmula explícita para* a_n *é*

$$a_n = \frac{1}{q} \left[a_0(n+1)\lambda_1^{n+2} + (a_1 + pa_0)n\lambda_1^{n+1} \right],$$

onde $\lambda_1 = \frac{1}{x_1}$*, com* x_1 *raiz de* $s(x)$*.*

Exemplo 4.4. Considere o Exemplo (3.6) sobre a sequência de Oresme com equação $a_{n+2} - a_{n+1} + \frac{1}{4}a_n = 0$ e condições iniciais $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$. Temos $p = -1$ e $q = \frac{1}{4}$, e o polinômio $1 - x + \frac{1}{4}x^2$ com raiz dada por $x_1 = \dfrac{1}{2 \cdot \frac{1}{4}} = -2$. Portanto $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$, Aplicando o Corolário (4.3) obtemos a expressão

$$a_n = (-1)^{n+1} 4n \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} = (-1)^{n+1} n 2^{(-n+1)},$$

solução da equação $a_{n+2} - a_{n+1} + \frac{1}{4}a_n = 0$ com condições iniciais $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$.

Considerando o caso $\Delta < 0$ temos que $s(x) = x^2 + \frac{p}{q}x + \frac{1}{q}$ e

$$p(x) = x^2 + px + q = x^2 q \left[\frac{1}{q} + \frac{p}{qx} + \frac{1}{x^2} \right] = x^2 q s \left(\frac{1}{x} \right),$$

$$s(x) = x^2 + \frac{p}{q}x + \frac{1}{q} = \frac{x^2}{q} \left[\frac{1}{x^2} + \frac{p}{x} + q \right] = \frac{x^2}{q} p \left(\frac{1}{x} \right).$$

Assim, como $q \neq 0$, se α é raiz de $p(x)$ então $\alpha \neq 0$. De modo análogo, como $s(0) = \frac{1}{q} \neq 0$, então se λ é raíz de $s(x)$ então $\lambda \neq 0$. Logo, se α é raíz de $p(x)$ então $\frac{1}{\alpha}$ é raiz de $s(x)$. De modo análogo, se λ é raíz de $s(x)$ então $\frac{1}{\lambda}$ é raiz de $p(x)$.

Da Seção (3.3) segue que as raízes complexas para $s(x)$ são $\lambda_1 = \dfrac{p}{2q} + i\dfrac{\sqrt{4q-p^2}}{2q}$ e $\lambda_2 = \dfrac{p}{2q} - i\dfrac{\sqrt{4q-p^2}}{2q}$. Portanto se λ é raíz de $s(x)$ então $\frac{1}{\lambda} = \lambda^{-1} = \tilde{\lambda}$ da forma $\dfrac{1}{q}\left(\dfrac{p}{2q} \pm i\dfrac{\sqrt{4q-p^2}}{2q}\right) = ||\lambda||(\lambda_R \pm \lambda_I)$ é raiz de $p(x)$, com $||\lambda|| = (\lambda_R)^2 + (\lambda_I)^2$.

Em termos das raízes, segundo a Expressão (3.15), a solução a_n é dada por

$$\begin{aligned} a_n &= a_0||\lambda|| \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(\lambda_I^2)^{j+1}} \binom{2j}{n} (\lambda_R)^{2j-n} \\ &\quad + (a_1 + 2\lambda_R a_0)\, ||\lambda|| \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\lambda_I^2)^{j+1}} \binom{2j}{n-1} (\lambda_R)^{2j-n+1}. \end{aligned}$$

Ou ainda, em termos das raízes do polinômio característico $p(x)$,

$$\begin{aligned} a_n &= a_0(||\tilde{\lambda}||)^{\frac{n+3}{3}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(\tilde{\lambda}_I)^{2j+2}} \binom{2j}{n} (\tilde{\lambda}_R)^{2j-n} \\ &\quad +(a_1(||\tilde{\lambda}||)^{\frac{n+2}{3}} + 2\tilde{\lambda}_R a_0||\tilde{\lambda}||^{\frac{n+1}{3}}) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\tilde{\lambda}_I)^{2j+2}} \binom{2j}{n-1} (\tilde{\lambda}_R)^{2j-n+1}. \end{aligned}$$

Desta forma, segue o resultado.

Corolário 4.5. *Seja a recorrência* $a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n = 0$ *com* $q \neq 0$, *condições iniciais* a_0 *e* a_1, *e polinômio* $s(x) = x^2 + \frac{p}{q}x + \frac{1}{q}$ *tal que* $\Delta = \frac{p^2-4q}{q^2} < 0$ *então uma fórmula explícita para* a_n *é*

$$\begin{aligned} a_n &= a_0(||\tilde{\lambda}||)^{\frac{n+3}{3}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(\tilde{\lambda}_I)^{2j+2}} \binom{2j}{n} (\tilde{\lambda}_R)^{2j-n} \\ &\quad +(a_1(||\tilde{\lambda}||)^{\frac{n+2}{3}} + 2\tilde{\lambda}_R a_0||\tilde{\lambda}||^{\frac{n+1}{3}}) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\tilde{\lambda}_I)^{2j+2}} \binom{2j}{n-1} (\tilde{\lambda}_R)^{2j-n+1}. \end{aligned}$$

onde $\frac{1}{\lambda} = \lambda^{-1} = \tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_R \pm i\tilde{\lambda}_I$ *para* $\lambda = \lambda_R \pm i\lambda I$ *raiz complexa de* $s(x)$.

5 Considerações Finais

Nas últimas décadas diversas pesquisas têm sido realizadas sobre os diferentes aspectos que envolvem o ensino da Análise Combinatória no Ensino Fundamental e Ensino Médio, usando varias teorias didáticas, tais como a teoria dos campos conceituais de Vergnaud, que oferece subsídios para analisar estudos práticos [5, 13]. Este trabalho apresentou uma sugestão de utilização de uma ferramenta em contagem, a função geradora ordinária; a saber, uma série de potências para obtenção de fórmulas explícitas para a solução de classe de recorrências homogêneas lineares com coeficientes constantes de ordem 2 com valores iniciais, sem a necessidade de resolver um sistema de Vandermonde. Com o domínio das técnicas apresentadas neste trabalho basta que o estudante saiba interpretar e modelar o problema uma vez que a solução aparecerá naturalmente nos coeficientes dos polinômios que os modelam, que particularmente, é uma série de potências.

No entanto, de forma geral, dado o fato dos livros didáticos conterem, em grande maioria, tópicos sobre Álgebra e Geometria, utilizar o conhecimento algébrico sobre funções e polinômios para resolução de problemas de contagem, também pode ser uma abordagem de ensino. De forma específica, com o uso das sequências numéricas, conteúdo que deve ser abordado em sala de aula segundo a Base Nacional Comum Curricular- BNCC, a abordagem deste artigo representa uma outra abordagem para compreender e aprofundar o processo de criação do pensamento combinatório, que é essencial para a compreensão de outros conceitos matemáticos, como probabilidades em função do quociente de cardinalidade dos eventos, assunto também descrito na Base Nacional Curricular Comum-BNCC.

Finalmente, o conteúdo das seções anteriores mostra que as ferramentas matemáticas, postas em jogo em torno da função geradora, também constituem uma cultura matemática para o professor. Isso permitirá que ele visualize melhor os vínculos estreitos entre a combinatória e outras áreas da matemática, como o aspecto analítico de certas expressões combinatórias.

Referências

[1] de Aritmatea Rocha, C.; de Lima A. P. B.; de Souza Rosa Borba, R. E., *Conhecimentos Pedagógicos para Ensinar Combinatória: currículo e documentos orientadores para os anos iniciais,* EM TEIA - Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana - vol. 7 - número 1 - 2016.

[2] R. Ben Taher and M. Rachidi,*Solving some generalized Vandermonde systems and inverse of their associate matrices via new approaches for the Binet formula*, Applied Mathematics and Computation 290, 267-280, 2016.

[3] Boyer, C. B.; *História da Matemática.* 3. ed. São Paulo: E. Blucher, 2010.

[4] BRASIL. FNDE. SEB. Guia de livros didáticos: PNLD 2016 para o Ensino Fundamental - Anos Iniciais: Matemática. Brasília: Ministério da Educação, 2015.

[5] Cardoso Silva, C.; dos Santos Pessoa C. A., *A Combinatória em Livros Didáticos do Ensino Fundamental,* Zetetiké - fe/unicamp & feuff - v. 23, n. 44 - jul/dez-2015.

[6] Hoffmann, L. D.; Bradley, G. L., *Cálculo um curso moderno e suas aplicações.* Rio de Janeiro: LTC, 1996.

[7] Lima, E. L.; *Curso de Análise.* Volume 1, 12 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

[8] Morgado, A. C.; et al., *Análise Combinatória e Probabilidade.* Rio de Janeiro: SBM, 1991.

[9] Morgado, A. C.; Carvalho, P.C.P.; *Matemática Discreta.* Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[10] Sá, L.S.C.; Spreafico, E.V.P. *Sobre um novo método de inversão de matrizes de Vandermonde para solução de recorrências lineareas homogêneas de ordem superior*, Revista Professor de Matemática Online, 8(1), 64-72,2020 .

[11] Santos, J. P. O. ; Mello, M. P.; Murari, I. T. C.; *Introdução à Análise Combinatória.* Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007.

[12] Horadam, A. F., Oresme numbers. The Fibonacci Quarterly, 12(3), 267-271,1974

[13] Vergnaud, G. *La théorie de champs conceptuels.* Recherches en Didactique de Mathématiques. Vol. 10, 2.3, Pensée Sauvage: Grenoble, França. 1990, pp. 133-170.