

UMA APLICAÇÃO DA EQUAÇÃO DE LAPLACE NA AUTOMAÇÃO

Bruno dos Santos Costa
Universidade Federal de Sergipe
brunosantos9182@gmail.com

Rafael Ramos Santos Costa
Universidade Federal da Paraíba
rafaelcostaco98@gmail.com

Manoel Rodrigues dos Santos Neto
Universidade Federal de Sergipe
manoelnetopdf10@gmail.com

Resumo

Este trabalho versa sobre a aplicação da teoria qualitativa de equações diferenciais parciais na automação, com ênfase na teoria das funções harmônicas. O problema deste estudo envolve a necessidade de locomoção de um robô até um gol, desviando de certos obstáculos inseridos numa quadra. Para atingir tais objetivos, utilizou-se as propriedades qualitativas das funções harmônicas, conhecidas como propriedade da média e princípio do máximo. A parte prática da pesquisa, sucedeu-se da realização de modelagens do problema nos softwares Excel e AutoCAD. As modelagens evidenciaram que de fato o robô se locomoveu até o gol. O uso do Excel foi importante, pois este dispõe do recurso de escala tricolor, que transmite uma representação bidimensional do estudo, isto é, a ilustração da trajetória do robô através da variação de cores ao longo da quadra. Já o AutoCAD, possibilitou a efetuação de simulações tridimensionais por meio do emprego de superfícies.

Palavras-chaves: Equação de Laplace; automação; propriedade da média.

Abstract

This work deals with the application of the qualitative theory of partial differential equations in automation, with emphasis on the theory of harmonic functions. The problem of this study involves a need for motion of a robot to a goal, deflecting from certain obstacles inserted in a square. To achieve these objectives, qualitative properties of harmonic functions, known as the mean-value property and the maximum principle, were used. The application was followed by modeling the problem in the softwares Excel and AutoCAD. The modeling showed that in fact the robot moved to the goal. The use of Excel was important, because this software has a tricolor scale resource,

which transmits a two-dimensional representation of the study, that is, the illustration of the robot trajectory through the variation of colors along of square. AutoCAD, on the other hand, enabled the generation of three-dimensional simulations through the use of surfaces.

Keywords: Equation of Laplace; automation; mean-value property.

1 Introdução

De acordo com [1], muitas aplicações industriais da Matemática são baseadas na análise numérica de equações diferenciais parciais (EDP). A análise numérica de EDP está presente, por exemplo, no método dos elementos finitos, em que, segundo [11], fornece uma estrutura geral para solucionar equações diferenciais. Entre as inúmeras aplicações deste método, pode-se citar a resolução de problemas do projeto de rodas automotivas modernas, como exposto por [10].

Atualmente, tem-se notado um interesse cada vez maior pela automatização de processos relacionados à indústria, transporte, comunicação etc. Dessa forma, pesquisadores como [5] têm se preocupado, por exemplo com a automação da resolução de problemas de otimização limitados por equações diferenciais parciais, em que numa das aplicações fora analisado o *layout* ideal das turbinas em fazendas de correntes de maré. No bojo desta discussão, se tornou uma questão central o desenvolvimento de algoritmos que permitam que tais processos ocorram de maneira eficiente e segura. Esta declaração é fomentada por [5], no sentido em que o autor informa que os algoritmos de otimização baseados em gradiente são a chave para solucionar problemas de otimização de interesse prático.

O principal objetivo desse material é apresentar como a teoria qualitativa das soluções da equação de Laplace pode nos auxiliar na construção de um algoritmo que pode ser aplicado à automação, mais especificamente relacionado à robótica. Dentro desse tema, torna-se importante mencionar um ramo de estudo conhecido como “*differential games*”, ver [7]. Em [7], o autor pontua que o termo jogos diferenciais, remete à abordagem dos problemas da teoria dos jogos via dispositivos de análise clássica, como equações diferenciais. Dessa forma, a teoria dos jogos diferenciais apresentada por [7] entrelaça-se com este estudo, no tocante a existência de um contexto de um jogo governado por equações diferenciais, mais especificamente a equação de Laplace. As ideias expostas neste trabalho foram desenvolvidas por [2] e mais motivações sobre o tema podem ser encontradas neste e em suas referências.

O problema que irá ilustrar nossa aplicação é o seguinte: um robô necessita se movimentar numa quadra Q , em direção ao gol, sempre de forma a contornar os obstáculos postos no interior da mesma. De posse de tais informações, podemos afirmar que o

jogo está bem definido, visto que claramente tem-se um objetivo (o robô deve atingir o gol), com regras estabelecidas para tal fim (o robô não pode colidir com os obstáculos inseridos no interior da quadra, e não pode se deslocar além da região do bordo da quadra). A Figura 1 ilustra melhor a explicação acima.

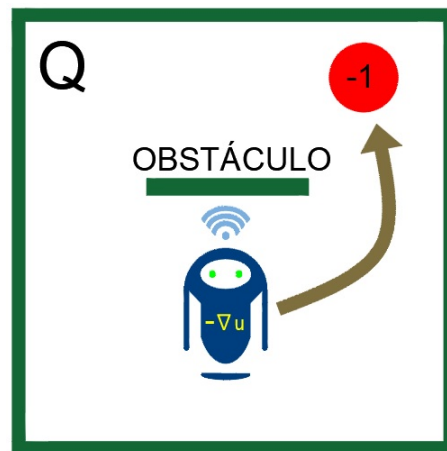


Figura 1: Ilustração do objetivo do jogo.

Nossa abordagem consistirá em dividir a quadra em pequenos quadrados e associar a cada quadrado um valor real. Desta forma, estaremos definindo uma função $u : Q \rightarrow \mathbb{R}$. Vale ressaltar que a quadra Q , é definida como uma matriz quadrada de ordem n com entradas reais. Se pudermos encontrar uma u de tal forma que o campo de vetores dado por $-\nabla u$ possa conduzir o nosso robô sempre para o gol, desviando dos obstáculos, independente de onde o robô comece na quadra teremos nosso problema resolvido. As primeiras tentativas nesse sentido foram feitas por [8], onde os campos de vetores escolhidos eram, de forma simplificada, uma cópia do potencial gravitacional e o gol agia como um atrator. Estes modelos funcionam bem se fizermos ajustes para evitar a singularidade próxima do gol, porém o grande limitador seria a inclusão de obstáculos já que o potencial deste tipo levaria o robô em trajetória retilínea para o gol ignorando os possíveis obstáculos.

Os autores em [2], perceberam que o que precisavam era de uma função u que tivesse máximos nos obstáculos e mínimo apenas no gol. Ao longo deste artigo, vamos mostrar como é possível obter tais funções para um grande número de configurações de obstáculos. Além disto, vamos apresentar como é possível construir aproximações de tais funções, de modo que possam ser aplicadas em um modelo real.

2 Preliminares

Nesta seção, estabelecemos definições e resultados básicos da teoria clássica de soluções da equação de Laplace, que nos auxiliam ao longo do texto. Esta seção segue o capítulo 2 de [4].

Definição 2.1. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e conexo, e $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $u \in C^2(U)$. Dizemos que u é harmônica se

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \partial_{ii} u = 0. \quad (2.1)$$

Ao longo do texto, consideramos $B(x, r)$ a bola de raio r e centro em x e $\partial B(x, r)$ sua fronteira. Além disto, denotamos

$$\oint_{\partial B(x,r)} u(y) dS(y) := \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y) dS(y)$$

e

$$\oint_{B(x,r)} u(y) dy := \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_{B(x,r)} u(y) dy,$$

onde $\alpha(n)$ é o volume da bola unitária de raio 1 em \mathbb{R}^n

A primeira propriedade importante de funções harmônicas é o teorema abaixo,

Teorema 2.2. *Se u é harmônica, então*

$$u(x) = \oint_{\partial B(x,r)} u(y) dS(y) = \oint_{B(x,r)} u(y) dy$$

para toda $B(x, r) \subset U$.

Demonstração. Fixe $x \in U$ e $r_x > 0$ o maior raio tal que $B(x, r_x) \subset U$. Definimos $\phi : (0, r_x) \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\phi(r) := \oint_{\partial B(x,r)} u(y) dS(y) = \frac{1}{\alpha(n)nr^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y) dS(y),$$

então, utilizando o Lema A.1, temos

$$\phi(r) = \frac{1}{\alpha(n)nr^{n-1}} \int_{\partial B(0,1)} u(x + rz)r^{n-1} dS(z),$$

ou seja,

$$\phi(r) = \frac{1}{\alpha(n)n} \int_{\partial B(0,1)} u(x + rz) dS(z).$$

Portanto

$$\phi'(r) = \frac{1}{\alpha(n)n} \int_{\partial B(0,1)} \nabla u(x + rz) \cdot z dS(z).$$

Agora, aplicando a mudança de variável $z = \frac{y - x}{r}$, temos

$$\phi'(r) = \frac{1}{\alpha(n)nr^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} \nabla u(y) \cdot \left(\frac{y - x}{r} \right) dS(y).$$

Desde que o vetor normal no ponto y é dado por $v(y) = \frac{y - x}{r}$, podemos escrever

$$\phi'(r) = \frac{1}{\alpha(n)nr^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} \frac{\partial u(y)}{\partial v} dS(y),$$

e desta forma, usando a fórmula de Green, ver apêndice C de [4], temos que

$$\phi'(r) = \frac{1}{\alpha(n)nr^{n-1}} \int_{B(x,r)} \Delta u(y) dy.$$

Como u é harmônica, então segue que

$$\frac{1}{\alpha(n)nr^{n-1}} \int_{B(x,r)} \Delta u dy = 0,$$

e concluímos que $\phi(r)$ é constante em $(0, r_x)$. Afirmamos que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \phi(t) = u(x).$$

Observamos primeiro que

$$\int_{\partial B(x,t)} dS(y) = \frac{1}{\alpha(n)nt^{n-1}} \int_{\partial B(x,t)} dS(y) = 1,$$

e portanto,

$$\left| \int_{\partial B(x,t)} u(y) dS(y) - u(x) \right| = \left| \int_{\partial B(x,t)} u(y) dS(y) - \int_{\partial B(x,t)} u(x) dS(y) \right|,$$

já que $u(x)$ não depende de y . Logo,

$$\left| \int_{\partial B(x,t)} u(y) dS(y) - u(x) \right| \leq \int_{\partial B(x,t)} |(u(y) - u(x))| dS(y).$$

Como u é uma função contínua em $\overline{B(x,t)}$, dado um $\epsilon > 0$, sempre podemos encontrar um $\delta > 0$, de tal sorte que $|(u(y) - u(x))| < \epsilon$ sempre que $|x - y| < \delta$. Assim, para $t < \delta$ temos que

$$\left| \int_{\partial B(x,t)} u(y) dS(y) - u(x) \right| < \epsilon.$$

O que prova nossa afirmação. Portanto,

$$u(x) = \int_{\partial B(x,r)} u(y) dS(y). \quad (2.2)$$

Para finalizarmos a demonstração do teorema, falta mostrarmos que

$$u(x) = \int_{B(x,t)} u(y) dy,$$

$t \in (0, r_x)$. Pela fórmula da co-área (ver apêndice C de [4]), temos que

$$\int_{B(x,t)} u(y) dy = \int_0^t \left(\int_{\partial B(x,t)} u(y) dS(y) \right) ds.$$

Usando agora (2.2), obtemos que

$$\int_0^t \alpha(n) n s^{n-1} u(x) ds = \alpha(n) t^n u(x),$$

e portanto

$$u(x) = \frac{1}{\alpha(n) t^n} \int_{B(x,t)} u(y) dy = \int_{B(x,t)} u(y) dy.$$

□

Este teorema é conhecido como a propriedade da média, pois ele garante que o valor de uma função harmônica em um ponto x é a média dos valores desta em $\partial B(x, r)$ ou em $B(x, r)$.

Sejam U aberto, conexo e limitado, e $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função harmônica. Segue da propriedade da média que se u não é constante, então ela não atinge nem máximo nem mínimo em U . Como u é contínua, e portanto deve atingir um valor de máximo e um valor de mínimo em \overline{U} , concluímos que os pontos de máximo e mínimo devem estar em ∂U , mais precisamente temos o seguinte teorema.

Teorema 2.3. *Seja $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ harmônica, onde U é aberto, conexo e limitado. Então vale o seguinte.*

(i) **Princípio do Máximo Fraco.** *Vale*

$$\max_{\bar{U}} u = \max_{\partial U} u.$$

(ii) **Princípio do Máximo Forte.** *Se existe $x_0 \in U$ tal que*

$$u(x_0) = \max_{\bar{U}} u,$$

então u é constante em U .

Demonstração. A prova se resume a demonstrar o item (ii), já que, se não existir $x_0 \in U$ tal que $u(x_0) = \max_{\bar{U}} u$, então o máximo de u só pode estar em ∂U . Dessa forma, suponha que existe $x_0 \in U$ tal que $M = u(x_0) = \max_{\bar{U}} u$. Assim, como $x_0 \in U$, a propriedade do valor médio nos garante que,

$$u(x_0) = \int_{B(x_0, r)} u(y) dy = M,$$

onde $0 < r < \text{dist}(x_0, \partial U)$.

Afirmamos que $u(y) = M$, para todo $y \in B(x_0, r)$. Supomos por contradição que existe $y_0 \in B(x_0, r)$ tal que $u(y_0) \neq M$, assim $u(y_0) < M$, desde que M é o máximo de u em \bar{U} . Como u é contínua, então existe $r_1 > 0$ tal que $u(y) < M$ para todo $y \in B(y_0, r_1) \subseteq B(x_0, r)$. Daí, temos que

$$u(x_0) = \int_{B(x_0, r)} u(y) dy = \frac{1}{\alpha(n)r^n} \left(\int_{B(y_0, r_1)} u(y) dy + \int_{B(x_0, r) - B(y_0, r_1)} u(y) dy \right). \quad (2.3)$$

Como

$$\int_{B(y_0, r_1)} u(y) dy < M\alpha(n)r_1^n,$$

segue que

$$M = u(x_0) < \frac{1}{\alpha(n)r^n} \left(M\alpha(n)r_1^n + \int_{B(x_0, r) - B(y_0, r_1)} u(y) dy \right).$$

Desde que $u(y) \leq M$ para todo $y \in U$, podemos concluir que

$$\frac{1}{\alpha(n)r^n} \left(M\alpha(n)r_1^n + \int_{B(x_0, r) - B(y_0, r_1)} u(y) dy \right) \leq \frac{1}{\alpha(n)r^n} (M\alpha(n)r^n) = M,$$

o que é uma contradição com (2.3), provando nossa afirmação.

Agora, precisamos mostrar que $u(y) = M$ para todo $y \in U$. Seja

$$W = \{x \in U; u(x) = M\}.$$

Notemos que W é fechado, pois é a imagem inversa de M por u . W também é um aberto de U , pois provamos que se $x \in W$ então existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset W$. Assim, como W é simultaneamente aberto e fechado e U é conexo, então $W = U$ ou $W = \emptyset$. Porém, por hipótese $W \neq \emptyset$, o que prova o resultado. \square

Teorema 2.4. *Seja $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ harmônica, onde U é aberto, conexo e limitado, então vale o seguinte,*

(i) **Princípio do Mínimo Fraco.** *Vale*

$$\min_{\bar{U}} u = \min_{\partial U} u.$$

(ii) **Princípio do Mínimo Forte.** *Se existe $x_0 \in U$ tal que*

$$u(x_0) = \min_{\bar{U}} u,$$

então u é constante em U .

Demonstração. Definimos $v = -u$ e aplicamos o princípio do máximo. \square

Como consequência desses dois resultados, obtemos a unicidade de soluções para a equação de Poisson.

Corolário 2.5 (Unicidade de soluções). *Sejam $g \in C(\partial U)$ e $f \in C(U)$. Existe no máximo uma solução $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ do problema*

$$\begin{aligned} \Delta u &= -f, & \text{em } U, \\ u &= g, & \text{em } \partial U. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Demonstração. Vamos supor que existem duas soluções \bar{u} e u para o problema (2.4). Definimos $w = \bar{u} - u$, desta forma

$$\begin{aligned} \Delta w &= 0, & U \\ w &= 0, & \partial U \end{aligned}$$

Pelo Princípio do Máximo Fraco, temos que $\max_{\bar{U}} w = \max_{\partial U} w = 0$ e portanto $w \leq 0$. Por outro lado, pelo Princípio do Mínimo Fraco, temos $\min_{\bar{U}} w = \min_{\partial U} w = 0$ e daí segue que $w \geq 0$. Logo $w = 0$ e $u = \bar{u}$. \square

3 Resultados Principais

3.1 Algoritmo para aproximar funções harmônicas

A propriedade da média nos garante que

$$u(x) = \int_{\partial B(x,r)} u(y) dS(y).$$

Nessa seção veremos que a recíproca também é verdadeira,

Teorema 3.1. *Se $u \in C^2(U)$ satisfaz*

$$u(x) = \int_{\partial B(x,r)} u(y) dS(y)$$

para toda $B(x,r) \subset U$, então u é harmônica.

Demonstração. Definimos

$$\phi(r) := \int_{\partial B(x,r)} u(y) dS(y).$$

Por hipótese, temos que $\phi(r)$ é constante, e portanto $\phi'(r) = 0$. Por outro lado, na prova da propriedade da média, vimos que

$$\phi'(r) = \frac{1}{\alpha(n)nr^{n-1}} \int_{B(x,r)} \Delta u(y) dy.$$

Se u não for harmônica, então existe um $x \in U$ tal que, por exemplo, $\Delta u(x) > 0$, sem perda de generalidade. Desde que $u \in C^2(U)$, segue que existe um raio $r_1 > 0$ onde $\Delta u(y) > 0$, para $y \in B(x, r_1)$ e, portanto,

$$0 = \phi'(r_1) = \frac{1}{\alpha(n)nr_1^{n-1}} \int_{B(x,r_1)} \Delta u(y) dy > 0.$$

O que é uma contradição, assim $\Delta u(x) = 0$. □

A partir deste teorema, estamos em condições de construir aproximações de funções harmônicas. Consideramos uma quadra (Figura 2) e dividimos tal quadra em quadrados menores. Atribuímos o valor 0 aos quadrados que estão no bordo da quadra.

As variáveis indeterminadas serão dadas pela média dos valores dos quadrados que o cercam, assim chegaremos ao seguinte sistema linear:

0	0	0	0	0	0
0	u_1	u_5	u_8	u_{10}	0
0	u_2	0	0	u_{11}	0
0	u_3	u_6	-1	u_{12}	0
0	u_4	u_7	u_9	u_{13}	0
0	0	0	0	0	0

Figura 2: Representação da quadra na configuração de matriz de ordem 6x6.

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = (u_2 + u_5) / 8 \\ u_2 = (u_1 + u_3 + u_5 + u_6) / 8 \\ u_3 = (u_2 + u_4 + u_6 + u_7) / 8 \\ u_4 = (u_3 + u_6 + u_7) / 8 \\ u_5 = (u_1 + u_2 + u_8) / 8 \\ u_6 = (u_2 + u_3 + u_4 + u_7 - 1 + u_9) / 8 \\ u_7 = (u_3 + u_4 + u_6 - 1 + u_9) / 8 \\ u_8 = (u_5 + u_{10} + u_{11}) / 8 \\ u_9 = (u_6 + u_7 - 1 + u_{12} + u_{13}) / 8 \\ u_{10} = (u_8 + u_{11}) / 8 \\ u_{11} = (u_8 - 1 + u_{10} + u_{12}) / 8 \\ u_{12} = (-1 + u_9 + u_{11} + u_{13}) / 8 \\ u_{13} = (u_9 + u_{12}) / 8 \end{array} \right.$$

A função gerada não é uma função harmônica, porém se repetirmos o processo de subdivisões em quadrados teremos que a função limite será harmônica com os dados de bordo fornecidos. Por exemplo, do ponto de vista probabilístico, suponha que de (x, y) , uma partícula pode se mover para $(x+h, y)$, $(x-h, y)$, $(x, y+h)$ e $(x, y-h)$ com

cada movimento sendo escolhido aleatoriamente com probabilidade $1/4$ e incrementos de passo h . Assumimos que estamos em um ambiente homogêneo, que não há nenhuma direção privilegiada e que a partícula se mova independentemente de seu histórico passado de cada vez. Começando em (x, y) , seja $u_h(x, y)$ a probabilidade da partícula atingir uma certa parte da fronteira pela primeira vez que a fronteira for atingida.

Aplicando expectativa condicional, temos

$$u_h(x, y) = \frac{1}{4}u_h(x + h, y) + \frac{1}{4}u_h(x - h, y) + \frac{1}{4}u_h(x, y + h) + \frac{1}{4}u_h(x, y - h),$$

de forma equivalente

$$0 = \{u_h(x+h, y) - 2u_h(x, y) + u_h(x-h, y)\} + \{u_h(x, y+h) - 2u_h(x, y) + u_h(x, y-h)\}. \quad (3.1)$$

Assuma que u_h converge para uma certa função u uniformemente em \bar{U} quando $h \rightarrow 0$. Essa convergência pode ser provada, veja [12]. Seja ϕ uma função suave tal que $u - \phi$ tem um mínimo estrito em $(x_0, y_0) \in U$. Então, pela convergência uniforme de u_h para u , existem pontos (x_h, y_h) tais que

$$(u_h - \phi)(x_h, y_h) \leq (u_h - \phi)(x, y) + o(h^2), \text{ para qualquer } (x, y) \in U$$

e

$$(x_h, y_h) \rightarrow (x_0, y_0) \text{ quando } h \rightarrow 0.$$

Com isso,

$$\begin{aligned} u_h(x_h + h, y_h) - u_h(x_h, y_h) &\geq \phi(x_h + h, y_h) - \phi(x_h, y_h) + o_1(h^2); \\ u_h(x_h - h, y_h) - u_h(x_h, y_h) &\geq \phi(x_h - h, y_h) - \phi(x_h, y_h) + o_2(h^2); \\ u_h(x_h, y_h + h) - u_h(x_h, y_h) &\geq \phi(x_h, y_h + h) - \phi(x_h, y_h) + o_3(h^2); \\ u_h(x_h, y_h - h) - u_h(x_h, y_h) &\geq \phi(x_h, y_h - h) - \phi(x_h, y_h) + o_4(h^2). \end{aligned}$$

Pelas desigualdades acima e (3.1), obtemos

$$\begin{aligned} 0 &\geq \{\phi(x_h + h, y_h) - 2\phi(x_h, y_h) + \phi(x_h - h, y_h)\} \\ &\quad + \{\phi(x_h, y_h + h) - 2\phi(x_h, y_h) + \phi(x_h, y_h - h)\} + o(h^2). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Agora, por expansão em Taylor

$$\phi(x_h + h, y_h) - 2\phi(x_h, y_h) + \phi(x_h - h, y_h) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x_h, y_h)h^2 + o(h^2), \quad (3.3)$$

$$\phi(x_h, y_h + h) - 2\phi(x_h, y_h) + \phi(x_h, y_h - h) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}(x_h, y_h)h^2 + o(h^2). \quad (3.4)$$

Por fim, substituindo (3.3) e (3.4) em (3.2), dividindo por h^2 e tomando o limite quando $h \rightarrow 0$, temos

$$0 \geq \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x_0, y_0) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}(x_0, y_0).$$

Com um argumento análogo, considerando ψ uma função suave tal que $u - \psi$ tem um máximo estrito em $(x_0, y_0) \in U$ mostra-se a desigualdade inversa. Portanto, sempre que uma função suave ψ toca u por cima em um ponto (x_0, y_0) , a soma das derivadas de segunda ordem puras devem satisfazer

$$0 \leq \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(x_0, y_0) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}(x_0, y_0).$$

Porém, isto é a definição de solução no sentido da viscosidade para a equação de Laplace (2.1), veja [3]. Consequentemente, o limite uniforme u da sequência de soluções u_h para o problema aproximado é uma solução de viscosidade para a equação de Laplace (e neste caso é também uma solução clássica) com as devidas condições de bordo. Assim, para um número suficientemente grande de quadrados a função gerada estará próxima de uma função harmônica e portanto, pelo princípio do máximo, Teoremas 2.3 e 2.4, a função não terá máximos ou mínimos no interior do domínio. Salientamos que todo argumento feito acima foi realizado por [12].

Na Figura 2, a região do bordo da quadra é representada por zero, o conjunto $\{u_1, u_2, \dots, u_{13}\}$ representa as variáveis a serem solucionadas, via uso de sistema linear. Os dois zeros com uma barra verde entre eles, representam os obstáculos a serem evitados pelo robô, e -1 o gol que o robô deve alcançar, contornando os referidos obstáculos.

A resolução do sistema linear acima, foi executada via GeoGebra que é um software de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que engloba geometria, álgebra, planilhas, gráficos, estatística e cálculo, de acordo com [6]. Conhecendo os valores das variáveis do sistema linear, podemos estimar a trajetória do robô e como já dito, sua construção é baseada na Propriedade da Média, que é capaz de prever o valor da função na quadra a partir da média do valor das funções nas quadras vizinhas. A resolução do dito sistema, está representada na Figura abaixo, a qual foi concebida utilizando o recurso de escala tricolor, disponibilizado pelo software Excel. Tal recurso é gerado com base em dados mínimo, máximo e de percentil do ponto médio, fixados em determinadas cores.

A escala tricolor transmite uma representação bidimensional do estudo, ou seja, a ilustração da trajetória do robô até o gol, por meio da variação de cores ao longo da quadra. Cabe salientar que os valores calculados numericamente são negativos, pois

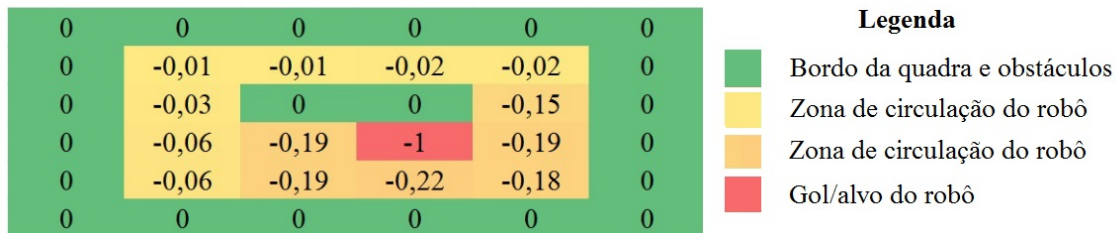


Figura 3: Representação da trajetória do robô em escala tricolor, em matriz 6x6.

fazem menção ao gradiente negativo, que é responsável pelo percurso do robô, tendo em vista que a direção do gradiente é a de crescimento mais rápido, ver [9] (cap. 3). Todavia, como o gol/alvo que o robô precisa atingir é simbolizado pelo menor valor da matriz que representa a quadra, precisamos de direções para o robô em que há um decréscimo mais rápido (melhor decréscimo possível, no contexto desse modelo), isto é, a direção do gradiente negativo.

A trajetória do robô ao gol, também pode ser ilustrada quando observamos a Figura 4.

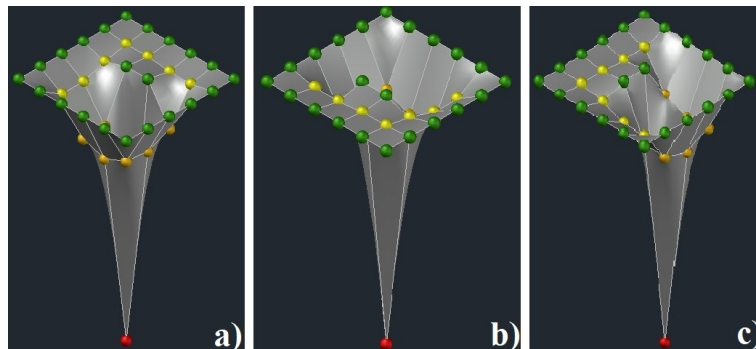


Figura 4: a), b) e c) Representação de modelagem em matriz 6x6 em diferentes perspectivas, respectivamente.

As ilustrações das Figuras 4, 6, 8 e 10, foram elaboradas a partir do software AutoCAD. É importante comentar que o percurso até o gol (ilustrado pela bola de cor vermelho) é descrito por uma superfície de cor cinza. Os dois obstáculos postos na quadra, assim como o bordo da mesma são marcados por bolas de cor verde, e as bolas de cor amarelo e laranja, simbolizam a zona de circulação do robô. Vale a pena salientar, que a resolução de cada variável no sistema linear, culmina numa representação da altura de cada bola em relação à quadra, ou seja, a altura das bolas em relação ao eixo z no \mathbb{R}^3 .

As próximas Figuras trazem mais exemplos de como o caso em estudo se comporta em matrizes de maior ordem. A título de esclarecimento, não foram adicionadas novas figuras das configurações das quadras, pois fica nítido que as representações das trajetórias do robô em escala tricolor cumprem essa função, dado que os quadrantes que contêm zero no interior da quadra, ilustram os obstáculos dispostos no mesmo.

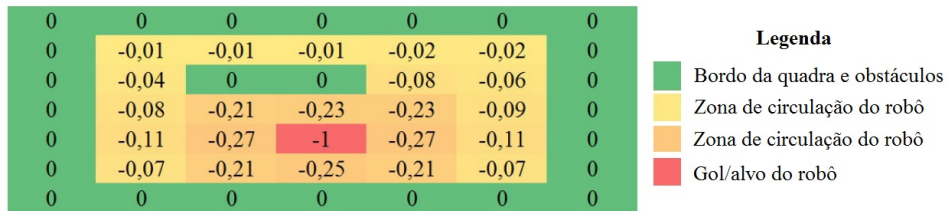


Figura 5: Representação da trajetória do robô em escala tricolor, em matriz 7x7.

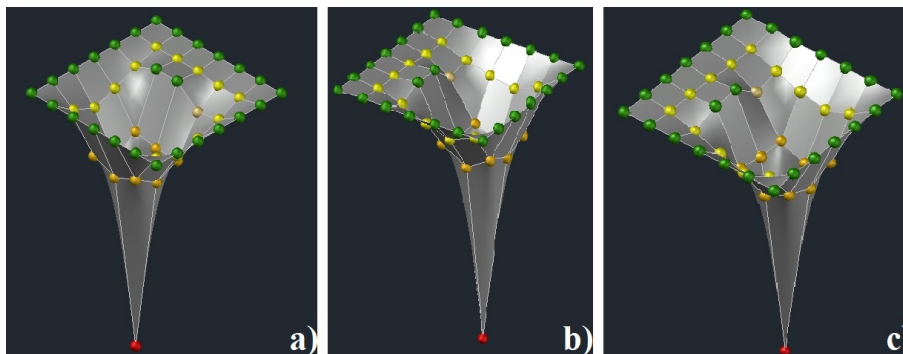


Figura 6: a), b) e c) Representação de modelagem em matriz 7x7 em diferentes perspectivas, respectivamente.

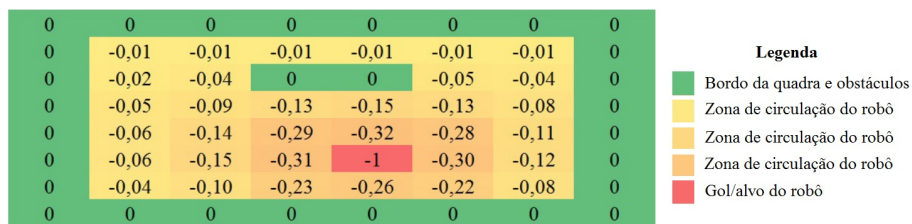


Figura 7: Representação da trajetória do robô em escala tricolor, em matriz 8x8.

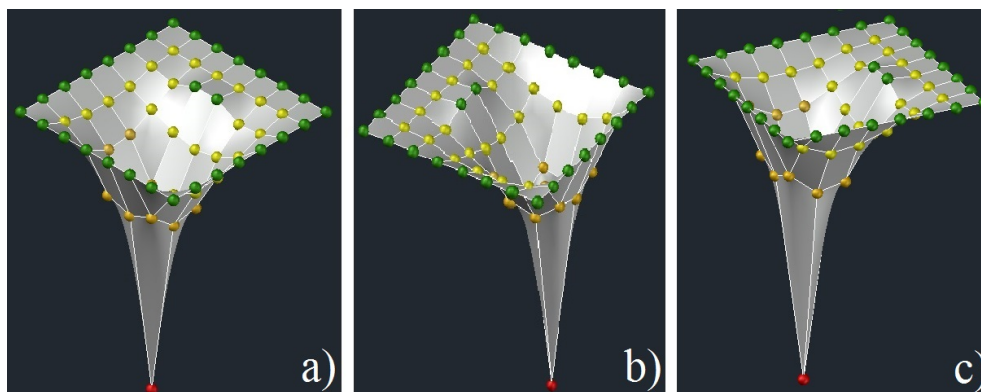


Figura 8: a), b) e c) Representação de modelagem em matriz 8x8 em diferentes perspectivas, respectivamente.

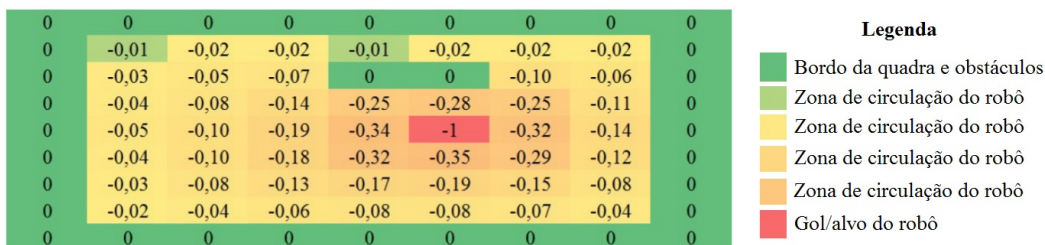


Figura 9: Representação da trajetória do robô em escala tricolor, em matriz 9x9.

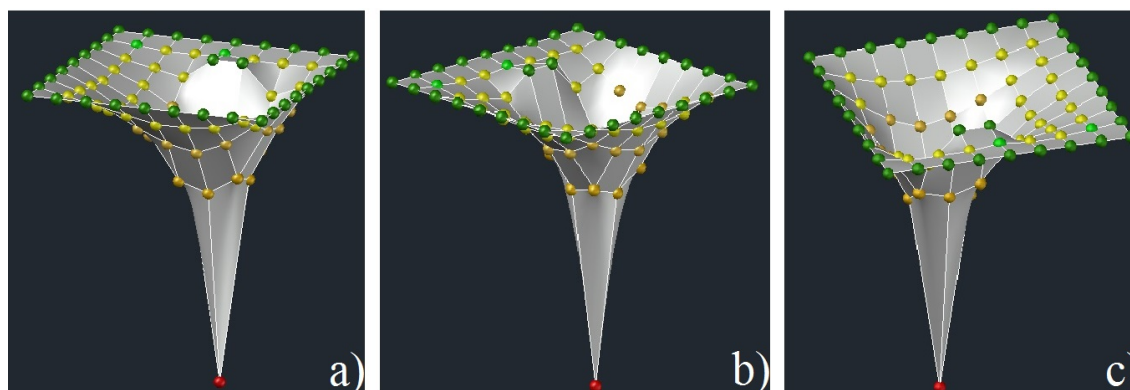


Figura 10: a), b) e c) Representação de modelagem em Matriz 9x9 em diferentes perspectivas, respectivamente.

Observe que fica cada vez mais evidente, nas Figuras 3, 5, 7 e 9 que a região próxima

ao gol é que mais atrai o robô, tendo em vista a mudança perceptível de cor no local, isto é, as cores tendem a elevar sua tonalidade, quando se aproximam de -1 , indicando que o robô está próximo de atingir seu objetivo, fato que já era esperado. Convém notar também que nessas Figuras supracitadas, principalmente as que abordam simulações em matrizes de maior ordem, que a distância dos valores em redor do gol -1 é baixa, isso mostra que o robô quando próximo ao gol tende à estabilidade, ou seja, se aproxima de forma suave do alvo. Já quando se olha para a distância dos valores a partir do gol até as demais variáveis, temos uma grande variação entre os dados, o que evidencia que quando muito afastado do gol, o robô se move com maior velocidade. Observe que essa análise faz total sentido do ponto de vista físico, portanto infere-se que este argumento resolve o problema da velocidade do robô perto do gol.

Ademais, se faz necessário comentar que as modelagens no AutoCAD ilustram com maior clareza a importância do gradiente negativo para guiar o robô ao alvo, visto que este aponta diretamente para o gol.

Por fim, levando em conta a necessidade de se conhecer a trajetória do robô ao gol, trajetória esta que evita obstáculos, é que se fez necessário comentar sobre funções harmônicas, já que como lembrado por [2], estas fornecem um meio robusto de controlar um manipulador (robô) para os estados-objetivo (gol) na presença de obstáculos, forças externas e incerteza ambiental.

Agradecimentos

Os autores gostariam de agradecer aos professores Disson dos Prazeres, e Arlúcio da Cruz Viana pelos comentários e sugestões que ajudaram a melhorar a versão final deste artigo, e ao Departamento de Matemática da UFS por fornecer um excelente ambiente de trabalho. Também agradecemos aos avaliadores anônimos pelas sugestões que enriqueceram o artigo. Este trabalho foi parcialmente financiado pela Capes, Copes/UFS e CNPq.

A Resultado auxiliar

Lema A.1. *Seja $u \in C^1(\bar{B}(x_0, r))$, para algum $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e algum $r > 0$. Então,*

$$\int_{\partial B(x_0, r)} u(y) dS(y) = \int_{\partial B(0, 1)} u(x_0 + rz) r^{n-1} dS(z).$$

Demonstração. Com efeito, pela fórmula de coordenadas polares (ver Apêndice C de [4]) e fazendo a mudança de variável $h(z) = x_0 + rz$, temos

$$\int_{\partial B(x,r)} u \, dS = \frac{d}{dr} \left(\int_{B(x,r)} u(y) \, dy \right) = \frac{d}{dr} \left(\int_{B(0,1)} u(x + rz) r^n \, dz \right).$$

Devemos mostrar que

$$\frac{d}{dr} \left(\int_{B(0,1)} u(x + rz) r^n \, dz \right) = \int_{\partial B(0,1)} u(x + rz) r^{n-1} \, dS(z).$$

De fato,

$$\frac{d}{dr} \left(\int_{B(0,1)} u(x + rz) r^n \, dz \right) = \int_{B(0,1)} \nabla u(x + rz) \cdot z r^n \, dz + \int_{B(0,1)} u(x + rz) n r^{n-1} \, dz. \quad (\text{A.1})$$

Fazendo a integração por partes (ver Apêndice C de [4]), tem-se

$$\int_{B(0,1)} \partial_i u(x + rz) \cdot z_i r^n \, dz = - \int_{B(0,1)} u(x + rz) r^{n-1} \, dz + \int_{\partial B(0,1)} u(x + rz) r^{n-1} z_i^2 \, dS(z),$$

com isso,

$$\begin{aligned} \int_{B(0,1)} \nabla u(x + rz) \cdot z r^n \, dz &= -n \int_{B(0,1)} u(x + rz) r^{n-1} \, dz + \int_{\partial B(0,1)} u(x + rz) r^{n-1} |z|^2 \, dS(z) \\ &= -n \int_{B(0,1)} u(x + rz) r^{n-1} \, dz + \int_{\partial B(0,1)} u(x + rz) r^{n-1} \, dS(z). \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Substituindo (A.2) em (A.1), obtemos

$$\frac{d}{dr} \left(\int_{B(0,1)} u(x + rz) r^n \, dz \right) = \int_{\partial B(0,1)} u(x + rz) r^{n-1} \, dS(z).$$

□

Referências

- [1] D. Borthwick, *Introduction to partial differential equations*, Universitext, Springer, Cham, 2016.

- [2] Connolly, Christopher I.; Grupen, Roderic A.: The Applications of Harmonic Functions to Robotics. *Journal of Robotic Systems*. **10** (1993), no. 7, 931-946.
- [3] Crandall, M. G.; Ishii, H.; Lions, P. L. User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. *Bull. Am. Math. Soc.* **27** (1992), 1–67.
- [4] L. C. Evans, *Partial differential equations*, second edition, Graduate Studies in Mathematics, 19, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.
- [5] Funke, Simon W. *The automation of PDE-constrained optimisation and its applications*. 2012. Thesis (Degree of Doctor of Philosophy in Computational Physics) - Department of Earth Science & Engineering, Imperial College London, 2012.
- [6] GeoGebra. O que é o GeoGebra?. Disponível em : www.geogebra.org/about. Acesso em: 09 de mar. 2022.
- [7] R. Isaacs, *Differential games. A mathematical theory with applications to warfare and pursuit, control and optimization*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1965.
- [8] Khatib, Oussama.: Real-time obstacle avoidance for manipulators and mobile robots. *The International Journal of Robotics Research*. **5** (1986), no. 1, 90-98.
- [9] LIMA, Elon L. *Análise real. Vol. 2*, Elon Lages Lima. Rio de Janeiro: IMPA, 2004.
- [10] Liu, Jian P.; Ye, Bang Y.; Li, G. W.: Application of Finite Element Analysis in Automotive Wheel Design. *Key Engineering Materials*. **455** (2010), 350-354.
- [11] Logg, Anders.: Automated solution of differential equations. *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*. **7** (2007), no. 1, 1010601–1010602.
- [12] J. D. Rossi, Tug-of-war games and PDEs, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* **141** (2011), no. 2, 319–369.

Submetido em 24 de Novembro de 2021.

Aceito em 03 de Maio de 2022.