

## EXPLORANDO OS TEOREMAS DE LINEARIZAÇÃO DE PHILIP-HARTMAN ATRAVÉS DE EXEMPLOS E APLICAÇÕES: CASO DISCRETO

José Vidarte

Universidade Federal de Itajubá- UNIFEI

[vidarte@unifei.edu.br](mailto:vidarte@unifei.edu.br)

Nancy Chachapoyas

Universidade Federal de Itajubá- UNIFEI

[nancy@unifei.edu.br](mailto:nancy@unifei.edu.br)

### Resumo

Este trabalho foi escrito para estudantes de matemática, física, biologia e engenharia. Em matemática, o termo não linear geralmente corresponde a uma análise mais difícil. Uma vez que os sistemas lineares são mais simples de analisar, uma maneira importante de entender os sistemas não lineares é descobrir em que condições eles podem ser bem aproximados por sistemas lineares. Nesse sentido, para auxiliar-nos, entre outros, temos os teoremas de linearização de Hartman [4, 5]. Neste trabalho, introduziremos a noção de sistemas dinâmicos discretos e conjugação dinâmica. Por meio de alguns exemplos construídos e uma revisão bibliográfica de alguns exemplos famosos na área, analisaremos a importância e as limitações dos teoremas de Hartman. Por último, estudaremos uma aplicação de Hénon, localmente, através da linearização de Hartman.

**Palavras-Chave:** Sistema dinâmicos, conjugação, linearização, exemplos, aplicações.

### Abstract

This work was written for students of mathematics, physics, biology, and engineering. In mathematics, the term nonlinear generally corresponds to a more difficult analysis. Since linear systems are easier to analyze, a key way to understand nonlinear systems is to find out where and when they can be well-approximated by linear systems. In this sense to help, among others, we have the linearization theorems of Hartman [4, 5]. In this work, we will introduce the notion of discrete dynamic systems and dynamic conjugation. Through some constructed examples and a bibliographical review of some famous examples in the field, we will analyze the importance and limitations of Hartman's theorems. Finally, we will study an application of Hénon, locally, by way of Hartman's linearization.

**Keywords:** Dynamical systems, conjugation, linearization, examples, applications.

# 1 Introdução

Estudos de modelos matemáticos realistas nos levam à reflexão do seu uso em ajudar a entender a dinâmica de processos envolvidos em áreas como física, dinâmica populacional, biologia, epidemiologia, ecologia e economia. Modelos mais realistas devem incluir alguns dos estados passados destes sistemas, em particular neste trabalho estamos interessados nos sistemas dinâmicos discretos, isto é, sistemas que evoluem segundo uma regra que liga o estado presente ao estado inicial. Em termos analíticos, procuramos entender a dinâmica da evolução da órbita  $x_n = f(x_{n-1})$ , onde  $f$  é uma função de classe  $C^k$ ,  $k \geq 0$ . A maioria desses sistemas são modelados através de funções não lineares (ver, por exemplo, [6], [3], [12]). Como pode-se observar, em geral, entender a dinâmica destes sistemas de forma global não é simples. Uma alternativa para contornar esse problema é tentar realizar um estudo local ao redor dos pontos regulares e singulares. Sabemos pelo Teorema de Retificação ([8, p. 112]), que o comportamento local em torno de pontos regulares, a menos de conjugação (“mudanças de coordenadas”) de classe  $C^k$ , é uma translação. Entretanto, determinar comportamentos dinâmicos ao redor de pontos singulares é bem mais complicado. Nesse sentido, para nos auxiliar, temos os teoremas de linearização, entre os quais destacam-se os Teoremas de Hartman [4, 5]. A teoria de linearização, a qual tenta responder se um Sistema Dinâmico em torno de uma singularidade é localmente  $C^k$  ( $k \geq 0$ ) conjugado à sua parte linear, é um dos problemas fundamentais e importantes na teoria dos sistemas dinâmicos e uma ferramenta poderosa na discussão das propriedades qualitativas, que nos ajudam a entender mediante uma conjugação (“mudanças de coordenadas”) quão parecido é nosso sistema original a seu linearizado. O resultado mais conhecido no caso de  $\mathbb{R}^n$  é o Teorema de Hartman-Grobman [4], que afirma que os difeomorfismos  $C^1$  em  $\mathbb{R}^n$  podem ser  $C^0$  linearizados próximo aos pontos fixos hiperbólicos. A conclusão deste teorema pode ser muito fraca para muitas aplicações, pois um homeomorfismo pode mapear um nó estável em foco estável, como nos mostra o Exemplo 3.11. A fim de melhorar a suavidade da conjugação no Teorema de Hartman-Grobman para preservar mais propriedades dinâmicas como a direção característica, a suavidade da variedade invariante e a taxa de convergência (ou divergência) de iteração, esforços foram feitos para suavizar a linearização. A linearização suave tem uma longa história [1]. Temos um resultado de Hartman que afirma que os difeomorfismos  $C^2$  em  $\mathbb{R}^n$  podem ser  $C^1$  linearizados próximo aos pontos fixos hiperbólicos contrativos (todos os autovalores tem norma menor que um) ou expansivos (todos os autovalores tem norma maior que um). Como consequência deste teorema, Hartman também provou que difeomorfismos de classe  $C^2$  em  $\mathbb{R}^2$  podem ser  $C^1$  linearizados próximo aos pontos fixos hiperbólicos.

Este trabalho analisa apenas os pontos básicos da teoria de sistemas dinâmicos, con-

jugação dinâmica e os teoremas de linearização de Hartman, o mais exatamente possível, evitando às vezes uma abordagem rigorosa. Na seção 2, apresentaremos, através de alguns exemplos, as noções básicas da teoria dos sistemas dinâmicos. Na Seção 3, iremos introduzir o conceito de conjugação dinâmica e suas propriedades básicas. Finalmente, por meio de alguns exemplos, ilustramos sua interpretação geométrica. Na seção 4, enunciaremos os teoremas de linearização devido a Hartman. Na Seção 5 apresentaremos alguns exemplos que nos ajudam a mostrar a importância das hipóteses dos teoremas de linearização de Hartman. Finalmente, na Seção 6, ilustramos com alguns exemplos as utilidades e limitações que os teoremas de linearização podem ter.

Gostaríamos de enfatizar que, o mesmo raciocínio ilustrado na análise linear da aplicação de Hénon, pode ser feito para outros modelos dinâmicos, como modelos em óptica não linear (aplicações de Ikeda) ([7, p. 259], [7, p. 709], [3, p. 553]), modelos ecológicos [16, p. 208] e modelos econômicos [2, p. 1].

## 2 Noção de Sistemas Dinâmicos

A teoria dos Sistemas Dinâmicos estuda o comportamento de longo prazo dos sistemas em evolução. Os modelos dinâmicos determinísticos clássicos são divididos em dois grupos os contínuos e os discretos. Neste trabalho, introduziremos a noção e algumas propriedades básicas de Sistemas Dinâmicos Discretos. Para este fim, seguiremos de maneira próxima os excelentes livros [9], [13] e [10].

### 2.1 Sistemas Dinâmicos Discretos

Alguns processos evolutivos podem ser expressos matematicamente em tempos discretos. Os sistemas discretos são descritos por aplicações (Equações a Diferenças). As composições da aplicação geram a dinâmica ou fluxo de um sistema discreto; isto é, a sequência de iterações, é gerada a partir de uma função  $f : M \rightarrow M$  e um ponto inicial  $x_0 \in M$ . A sequência de iterações é gerada

$$x_0, f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), \dots$$

Essa sequência pode ser finita ou infinita. É interessante saber como essa sequência se comporta após algumas iterações. Como motivação consideremos o seguinte exemplo.

**Exemplo 2.1.** Consideremos o tamanho de uma população, a qual assumimos ser dado pelo valor  $N_n$  em tempos discretos  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Em um modelo simples, o tamanho no tempo  $n + 1$  dependerá apenas do tamanho no tempo  $n$ .

A população é então descrita pela lei  $N_{n+1} = f(N_n)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , onde  $f$  é uma aplicação adequada. Segue-se que

$$N_n = (f \circ \dots \circ f)(N_0), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

com  $n$  aplicações da função  $f$ . Assim, o comportamento da população é completamente determinado pela população inicial  $N_0$  e a aplicação  $f$ .

De uma forma mais geral, assumimos que os possíveis estados de um sistema (físico, biológico, econômico, ... , ou abstrato) são descritos pelos elementos de um conjunto  $M$  (espaço de fase) e que a evolução do sistema é descrita por uma função  $f : M \rightarrow M$ , ou seja, se  $x_n \in M$  é o estado do sistema no tempo  $n \geq 0$ , então

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Já que queremos medir as mudanças nos valores  $x_n$ , tomamos como espaço de fase um espaço métrico (nós trabalharemos com  $\mathbb{R}^n$ ). E uma vez que queremos que pequenas mudanças em  $x_n$  resultem em pequenas mudanças em  $x_{n+1}$ , precisamos pelo menos a continuidade de  $f$ .

A seguir, introduziremos a noção de Sistema Dinâmico Discreto.

**Definição 2.2.** Considere um espaço topológico  $M$ . Chamamos sistema dinâmico discreto em  $M$  a uma função  $H : \mathbb{N} \times M \rightarrow M$  contínua que satisfaz as seguintes condições:

1.  $H(0, x) = x$ ,
2.  $H(m, H(n, x)) = H(m + n, x)$ , para  $m, n \in \mathbb{N}$  e  $x \in M$ .

*Observação 2.3.* Para cada número natural  $m \in \mathbb{N}$  podemos definir a aplicação  $H_m : M \rightarrow M$ , com  $H_m(x) = H(m, x)$ . Por definição se tem que  $H_n \circ H_m = H_{n+m}$ , para  $n, m \in \mathbb{N}$ . Assim, particularmente temos que  $f := H_1$  é aplicação contínua e cumpre  $H_n = f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n\text{-vezes}}$ . Isto nos diz que um sistema dinâmico discreto é gerado por

uma aplicação contínua  $f : M \rightarrow M$ . Assim, de agora em diante, para nós um sistema dinâmico discreto será uma função  $f : M \rightarrow M$ .

A seguir, apresentamos dois sistemas dinâmicos unidimensionais clássicos.

**Exemplo 2.4** (Função Tenda). Definimos a função tenda  $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , como

$$T(x) = 1 - |2x - 1| = \begin{cases} 2x, & x \in [0, 1/2] \\ 2 - 2x, & x \in [1/2, 1], \end{cases}$$

cujo gráfico é mostrado na Figura 1.

**Exemplo 2.5** (Função Logística). Definimos a função logística  $L : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , dada por  $L(x) = 4x(1 - x)$ , cujo gráfico é mostrado na Figura 1.

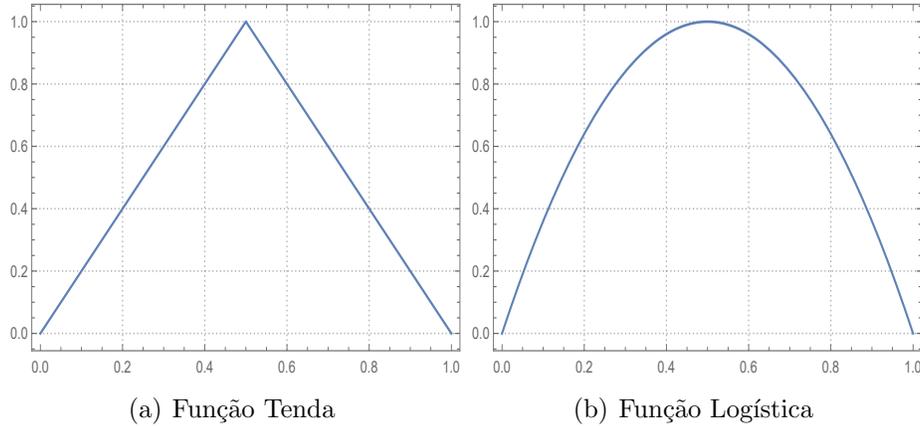


Figura 1: Gráfico das funções  $T(x)$  e  $L(x)$ .

*Observação 2.6.* Os sistemas dinâmicos anteriores, apesar de possuírem uma definição simples, possuem comportamentos dinâmicos bastante complicados, existindo na literatura diversos artigos mostrando alguns desses comportamentos.

Nas subseções a seguir, apresentaremos alguns conceitos usados em sistemas dinâmicos.

### 2.1.1 Órbitas

**Definição 2.7.** Consideremos  $f : M \rightarrow M$  um homeomorfismo,  $p \in M$ . Então, definimos os seguintes conjuntos:

1. Órbita de  $p \in M$ ,  $\mathcal{O}_f(p) := \{f^n(p) : n \in \mathbb{Z}\}$ .
2. Órbita positiva ou futura de  $p \in M$ ,  $\mathcal{O}_f^+(p) := \{f^n(p) : n \geq 0\}$ .
3. Órbita negativa ou passada de  $p \in M$ ,  $\mathcal{O}_f^-(p) := \{f^n(p) : n \leq 0\}$ .

*Observação 2.8.*

- Notemos que  $\mathcal{O}_f(p)$  descreve toda a evolução do estado  $p$  no tempo, isto é, a órbita de  $p$  descreve as diferentes posições de  $p$  com o passar do tempo, ou seja, inicia-se no ponto  $p$  e depois de percorrer  $n$  unidades de tempo teremos  $f^n(p)$ .

- Em geral omitimos o subíndice  $f$ , denotando apenas por  $\mathcal{O}(x), \mathcal{O}^+(x), \mathcal{O}^-(x)$  quando não houver dúvida sobre qual função estamos trabalhando.

**Exemplo 2.9.** Considere o seguinte homeomorfismo  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por,  $f(x) = 2x + 1$ . Temos que  $\mathcal{O}_f(1) = \{\dots, -3/4, -1/2, 0, 1, 3, 7, 15, \dots\}$

### 2.1.2 Pontos Fixos, Periódicos

**Definição 2.10.** Sejam  $f : M \rightarrow M$  uma função e  $p$  um ponto de  $M$ . Diz-se que  $p$  é um **ponto fixo** de  $f$  se  $f(p) = p$ . Dizemos que  $p$  é um **ponto periódico** de  $f$  de período  $n \in \mathbb{N}$ , se  $f^n(p) = p$  e  $f^k(p) \neq p$ , para  $k = 1, \dots, n-1$ . O conjunto dos pontos fixos de  $f$  será denotado por  $Fix(f) = \{p \in M : f(p) = p\}$  o conjunto dos pontos periódicos de período  $n$  de  $f$  será denotado por  $Per_n(f) = \{p \in M : p \text{ é um ponto periódico de período } n\}$  e por último o conjunto de todos os pontos periódicos de  $f$  será denotado por  $Per(f) := \bigcup_{n=1}^{\infty} Per_n(f)$ .

*Observação 2.11.* Da definição, podemos ver que  $Fix(f) = Per_1(f)$ .

**Exemplo 2.12.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = x^2 - 2$ . Então, pode-se verificar que  $p_1 = -1$  e  $p_2 = 2$  são os únicos pontos fixos de  $f$ . Além de isso, podemos ver que os pontos  $p_3 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$  e  $p_4 = \frac{-\sqrt{5}-1}{2}$  são os únicos pontos de período 2 de  $f$ . Também podemos ver que  $f(p_3) = p_4$  e  $f(p_4) = p_3$ .

**Definição 2.13.** Sejam  $f : M \rightarrow M$ . Dizemos que a órbita de  $p \in M$  é uma órbita periódica se  $p$  é um ponto periódico.

**Exemplo 2.14.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = x^2 - 2$ . Do Exemplo 2.12, temos que as órbitas  $p_3 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$  e  $p_4 = \frac{-\sqrt{5}-1}{2}$  são periódicas. Além disso,

$$\mathcal{O}_f(p_3) = \mathcal{O}_f(p_4) = \{p_3, p_4\}.$$

## 2.2 Retrato de Fase

Os retratos de fase são frequentemente usados em sistemas dinâmicos para representar graficamente a dinâmica de uma função. Assim, um retrato de fase consiste em um diagrama exibindo possíveis mudanças de posição de uma função do mapa e as setas indicam a mudança de posições sob iterações das funções. Considere uma aplicação unidimensional simples  $f : [0, 2\pi] \rightarrow [0, 2\pi]$  definido por  $f(\theta) = \theta + 0,3 \text{sen}(3\theta)$ . O retrato da fase desta aplicação é exibido na Figura 2. A figura mostra os seis pontos fixos  $f(\theta) = \theta$ . As setas indicam que o fluxo vai em direção aos três pontos  $\frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$  e o fluxo se afasta dos outros três pontos  $0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ . Em outras palavras, os pontos desenhados na

Figura 2 são pontos fixos e a função é monótona (crescente ou decrescente) em cada intervalo, assim a sequência de iterados é convergente e converge para o extremo do intervalo. Por exemplo, se  $x = 2,75 \in (\frac{2\pi}{3}, \pi)$ . Então, temos que

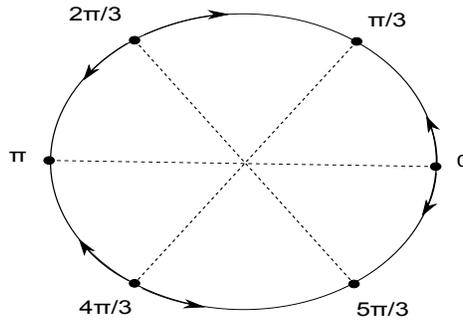


Figura 2: Retrato de fase de  $f(\theta) = \theta + 0,3 \text{ sen}(3\theta)$ .

$$\mathcal{O}_f(2,75) = \{2,75; 3,02678; 3,12808; 3,14024; 3,14146; 3,14158; 3,14159; 3,14159; 3,14159, \dots\}.$$

Aqui notamos que o ponto 2,75 através da função  $f$  converge de forma crescente ao ponto fixo  $\pi \approx 3,14159$ , isto é, a órbita de 2,75 evolui no sentido anti-horário. Ver Figura 3. Por outro lado, se tomamos  $x = 1,75 \in (\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$  temos que

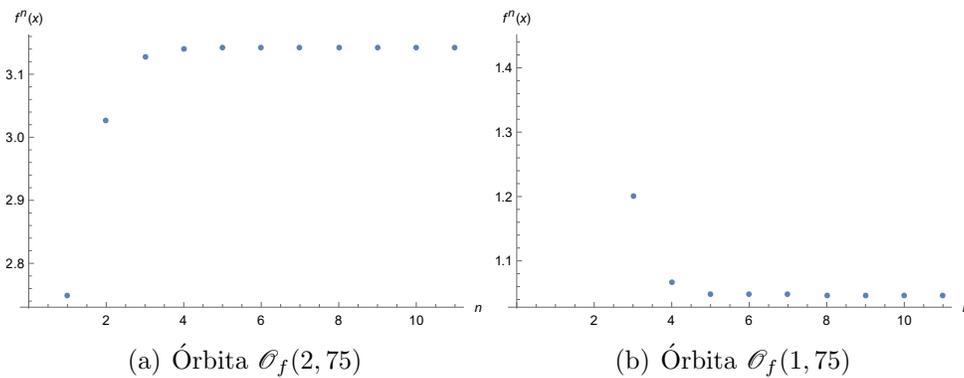


Figura 3: Comportamento de algumas órbitas de  $f(\theta) = \theta + 0,3 \text{ sen}(3\theta)$ .

$$\mathcal{O}_f(1,75) = \{1,75; 1,49232; 1,2006; 1,06736; 1,04922; 1,0474; 1,04722; 1,0472; 1,0472, \dots\}.$$

Aqui notamos que o ponto 1,75 através da função  $f$  converge decrescente ao ponto fixo  $\frac{\pi}{3} \approx 1,0472$ , isto é, a órbita de 1,75 evolui no sentido horário. Ver Figura 3.

### 3 Noção de Conjugação

A seguir, vamos definir e dar algumas propriedades de uma noção importante na área de sistemas dinâmicos, mas antes de isso definiremos o conceito de homeomorfismo.

**Definição 3.1.** Um homeomorfismo é uma função contínua  $h : M \rightarrow N$  cuja inversa  $f^{-1} : N \rightarrow M$  também é contínua.

**Exemplo 3.2.** A função  $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , definida por  $h(x) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)$  é um homeomorfismo. Com efeito,

- Temos que  $h(x)$  é contínua, pois é composição de funções contínuas.
- Temos que  $h(0) = 0, h(1) = 1$ . Logo, usando o teorema do valor intermediário, temos que para  $h(0) < d < h(1)$  existe  $c \in (0, 1)$  tal que  $f(c) = d$ , o que mostra que  $h(x)$  é sobrejetora.
- Como  $h'(x) = 2 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \frac{\pi}{2} = \sin(\pi x) \frac{\pi}{2} > 0$ , se  $0 < x < 1$  é monótona crescente, assim injetiva.
- Portanto, a função é invertível. A inversa é dada por  $h^{-1}(x) = \frac{2}{\pi} \arcsen(\sqrt{x})$ , pois  $h \circ h^{-1}(x) = x$ . Portanto, também a sua inversa é contínua.

*Observação 3.3.* Um homeomorfismo  $h : M \rightarrow M$  será chamado de classe  $C^k$  se for  $k$  vezes diferenciável ( $k \geq 1$ ) e a  $k$ -ésima derivada for contínua.

**Definição 3.4 (Conjugação).** Sejam  $M$  e  $N$  dois espaços métricos. Dizemos que dois sistemas dinâmicos  $f : M \rightarrow M$  e  $g : N \rightarrow N$  são topologicamente (respect.  $C^k$ ) conjugados, se existe um homeomorfismo (respect. um difeomorfismo  $C^k$ )  $h : M \rightarrow N$  tal que

$$h \circ f = g \circ h.$$

Neste caso dizemos que  $h$  conjugua a  $g$  com  $f$ .

*Observação 3.5.*

- Se  $f : M \rightarrow M$  e  $g : N \rightarrow N$  são topologicamente (respect.  $C^k$ ) conjugados, ou seja,  $f = h^{-1} \circ g \circ h$ . Pode-se pensar em  $h$  como uma “mudança de variáveis” que torna os dois mapas equivalentes no sentido topológico ou  $C^k$ , respectivamente. A mudança de variáveis transfere uma propriedade sobre as iterações de  $f$  começando em  $x$  para uma propriedade sobre as iterações de  $g$  começando em  $h(x)$ .

- Pode-se provar que conjugação é uma relação de equivalência.

O seguinte teorema, cuja prova pode ser encontrada no livro de Layek [10], nos mostra a importância das conjugações, ao demonstrar que as dinâmicas conjugadas preservam as mesmas propriedades.

**Teorema 3.6.** *Sejam  $M$  e  $N$  espaços métricos. Se  $f : M \rightarrow M$  e  $g : N \rightarrow N$  são duas funções contínuas tais que  $f$  e  $g$  são conjugadas mediante o homeomorfismo  $h : M \rightarrow N$ , então temos as seguintes propriedades:*

1. *A função  $h$  também é uma conjugação de  $f^n$  a  $g^n$  para cada inteiro positivo  $n$ .*
2. *A órbita  $\mathcal{O}_f(x)$  é igual a  $h^{-1}(\mathcal{O}_g(h(x)))$ .*
3. *Se  $p$  é um ponto periódico para  $f$  de período  $n$ , então  $h(p)$  é um ponto periódico para  $g$  de período  $n$ .*
4. *O conjunto  $Per(f)$  (pontos periódicos de  $f$ ) é denso em  $M$  se, e somente se, o conjunto  $Per(g)$  é denso em  $N$ .*
5.  *$B$  é um conjunto minimal para  $f$  se, e somente se,  $h(B)$  é um conjunto minimal para  $g$ . Lembrando,  $B \subset M$  é um conjunto minimal para  $f$ , se satisfaz (i)  $B$  seja um conjunto fechado, não vazio e invariante e (ii) se  $A$  é um subconjunto fechado, não vazio e invariante de  $f$ , então  $A = B$ .*
6. *Para um ponto  $x$  se define o conjunto estável como*

$$W_f^s(x) = \{y \in M : \lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(y), f^n(x)) = 0\}.$$

*Se  $f$  é inversível, o conjunto instável é definido como  $W_f^u(x) = W_{f^{-1}}^s(x)$ .*

*Temos que*

$$h(W_f^s(x)) = W_g^s(h(x)).$$

*Analogamente para o instável.*

### 3.1 Exemplos de Conjugação

A seguir, daremos alguns exemplos para ilustrar o conceito de conjugação.

**Exemplo 3.7.** As funções tenda  $T(x) = 1 - |2x - 1|$  e logística  $L(x) = 4x(1 - x)$  são topologicamente conjugadas. Vamos provar que o homeomorfismo  $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ,

$h(x) = \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)$  (ver Exemplo 3.2), é a conjugação topológica entre  $T$  e  $L$  (ver Figura 1), isto é,

$$L \circ h = h \circ T.$$

Com efeito, vamos usar  $\text{sen}(2\theta) = 2 \text{sen}(\theta) \cos(\theta)$ ,  $\text{sen}(\pi - \theta) = \text{sen}(\theta)$ . Assim,

$$\begin{aligned} L \circ h(x) &= 4h(x)(1 - h(x)) \\ &= 4 \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) \left(1 - \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right) \\ &= \left(2 \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)^2 = \begin{cases} \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}2x\right), & 0 \leq x \leq 1/2 \\ \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}(2 - 2x)\right), & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases} \\ &= h \circ T(x). \end{aligned}$$

Logo,  $L \circ h = h \circ T$ .

**Exemplo 3.8.** Seja a aplicação  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $A(x, y) = \left(\frac{7}{8}x - \frac{9}{8}y, -\frac{9}{8}x + \frac{7}{8}y\right)$ .

Temos que as órbitas desta aplicação são  $\{(x_{n+1}, y_{n+1}), n \in \mathbb{N}\}$ , onde

$$x_{n+1} = \frac{7}{8}x_n - \frac{9}{8}y_n, \quad y_{n+1} = -\frac{9}{8}x_n + \frac{7}{8}y_n.$$

Seja a aplicação linear  $B : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $B(x, y) = \left(2x, -\frac{1}{4}y\right)$  tipo “sela”. Temos que as órbitas desta aplicação são  $\{(x_{n+1}, y_{n+1}), n \in \mathbb{N}\}$ , onde

$$x_{n+1} = 2x_n, \quad y_{n+1} = -\frac{1}{4}y_n.$$

Se pode verificar que a rotação de  $45^\circ$ ,  $h(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y, -x + y)$  é uma função analítica com inversa analítica  $h^{-1}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y, x + y)$ , tal que

$$A(h(x, y)) = h(B(x, y)).$$

**Exemplo 3.9.** Seja a aplicação  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y) = (2x, \frac{1}{2}y - \frac{15}{8}x^3)$ . Temos que as órbitas desta aplicação são  $\{(x_{n+1}, y_{n+1}), n \in \mathbb{N}\}$ , onde

$$x_{n+1} = 2x_n, \quad y_{n+1} = \frac{1}{2}y_n - \frac{15}{8}x_n^3.$$

Seja a aplicação linear  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $A(x, y) = (2x, \frac{1}{2}y)$  tipo “sela”. Temos que as órbitas desta aplicação são  $\{(x_{n+1}, y_{n+1}), n \in \mathbb{N}\}$ , onde

$$x_{n+1} = 2x_n, \quad y_{n+1} = \frac{1}{2}y_n.$$

Se pode verificar que  $h(x, y) = (x, y + \frac{x^3}{4})$  é uma função analítica com inversa analítica  $h^{-1}(x, y) = (x, y - \frac{x^3}{4})$ , tal que

$$A(h(x, y)) = h(f(x, y)).$$

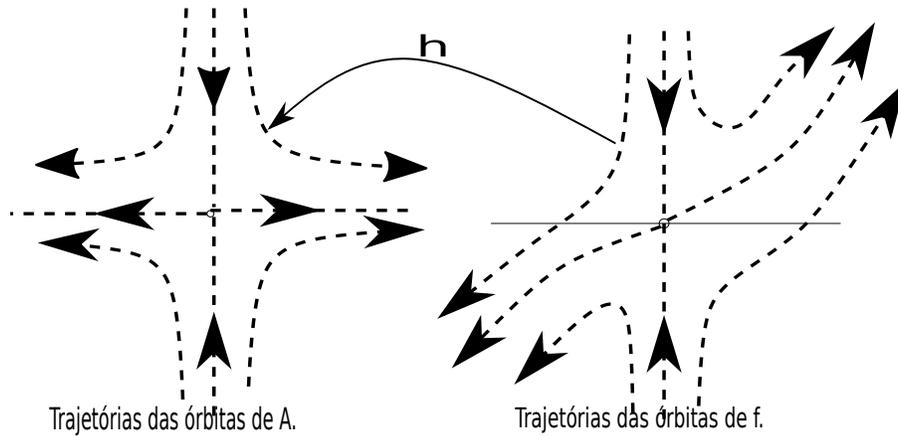


Figura 4: Conjugação das duas selas, sendo uma não-linear, do Exemplo 3.9.

### 3.1.1 Conjugação Entre Sistemas Dinâmicos Lineares Discretos

A seguir, enunciamos um dos teoremas mais importantes de sistemas dinâmicos lineares discretos.

**Teorema 3.10** ([13]). *Sejam  $A$  e  $B$  duas matrizes inversíveis  $n \times n$  de modo que todos os autovalores  $\lambda$  de  $A$  e  $\beta$  de  $B$  tenham norma menor do que um (contrações) ou todos os autovalores tenham norma maior do que um (expansões). Além disso, assumimos que o determinante de ambas matrizes é positivo ou negativo. Então as aplicações lineares  $Ax$  e  $Bx$  são topologicamente conjugadas.*

**Exemplo 3.11.** Seja a aplicação  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $A(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \left(\frac{x}{4}, \frac{y}{6}\right)$ . Neste caso, os autovalores da matriz  $A$  são  $\frac{1}{4}$  e  $\frac{1}{6}$ . Temos que a origem é um atrator (nó estável). As trajetórias se movem mais rápido na direção do eixo  $y$ , pois a razão de contração nessa direção é mais forte. Assim, temos que as órbitas desta aplicação são  $\{(x_{n+1}, y_{n+1}), n \in \mathbb{N}\}$ , onde  $x_{n+1} = \frac{1}{4}x_n$ ,  $y_{n+1} = \frac{1}{6}y_n$ . O qual tem o comportamento dinâmico como se mostra na Figura 5 (a).

Seja a aplicação  $B : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $B(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \left(-\frac{y}{2}, \frac{x}{2}\right)$ . Neste caso, os autovalores da matriz  $B$  são  $\pm \frac{i}{2}$ . Novamente, temos que a origem é um atrator. Como não existem linhas de trajetórias invariantes; o ângulo polar de cada ponto se acrescenta em  $\frac{\pi}{2}$ , em cada tempo de iteração da aplicação  $B$ . Assim, temos que as órbitas desta aplicação são  $\{(x_{n+1}, y_{n+1}), n \in \mathbb{N}\}$ , onde  $x_{n+1} = -\frac{1}{2}y_n$ ,  $y_{n+1} = \frac{1}{2}x_n$ . O qual tem o comportamento dinâmico de uma espiral (foco estável) como se mostra na Figura 5 (b). Logo, como  $A$  e  $B$  são duas matrizes invertíveis com determinante positivo que são contrações, temos pelo Teorema 3.10 que existe um homeomorfismo  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que conjuga  $A$  e  $B$ , isto é,

$$A(h(x, y)) = h(B(x, y)).$$

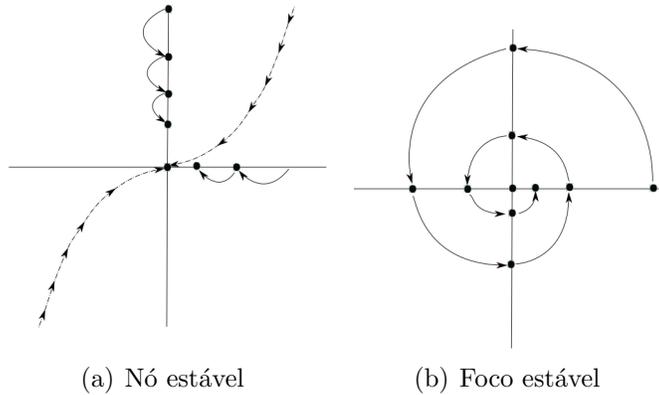


Figura 5: Trajetórias dos sistemas dinâmicos  $A$  e  $B$ , do Exemplo 3.11.

*Observação 3.12.* Dado que duas aplicações lineares contrativas são topologicamente conjugadas (ver Teorema 3.10 e Exemplo 3.11), podemos notar que uma conjugação simplesmente topológica não conserva grande parte da natureza geométrica do retrato

de fase. Por outro lado, uma conjugação diferenciável conserva grande parte desta estrutura (ver Exemplo 3.9). Como uma das ferramentas para o estudo de dinâmica não linear são as conjugações, para obter maior semelhança entre a dinâmica dos sistemas conjugados o que se procura é a regularidade da conjugação, mas infelizmente conseguir conjugações diferenciáveis nem sempre é possível (ver, Exemplos 5.1 e 5.4), são necessárias condições de “não ressonância” sobre os autovalores.

## 4 Os Teoremas de Hartman

Na continuação enunciamos, como foi dado de forma original, os teoremas principais de linearização para difeomorfismos devido a Hartman, estes teoremas se encontram nos artigos [4] e [5]. Antes disso, vamos introduzir as seguintes notações:

- O conjunto  $L(\mathbb{R}^n)$  denota toda as aplicações lineares  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  limitadas.
- O conjunto  $GL(\mathbb{R}^n)$  denota todos os elementos de  $L(\mathbb{R}^n)$  que são invertíveis.
- O conjunto  $\sigma(T)$  denota o espectro de  $T$  (conjunto de autovalores da transformação linear  $T$ ). Para mais detalhes, veja-se o livro de Santos [14, p. 394].

**Definição 4.1 (Isomorfismos Hiperbólicos).** Dizemos que  $A \in GL(\mathbb{R}^n)$  é um isomorfismo hiperbólico se  $\sigma(A) \cap \mathbb{S}^1 = \emptyset$ , onde  $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : \|z\| = 1\}$ .

**Definição 4.2.** Sejam  $W$  uma vizinhança do ponto  $z \in \mathbb{R}^n$  e  $F : W \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  um difeomorfismo sobre sua imagem. Dizemos que  $z$  é um ponto fixo hiperbólico de  $F$  se e somente se:

$$F(z) = z, \quad DF(z) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ é hiperbólica.}$$

**Teorema 4.3 (Grobman-Hartman).** *Seja  $p$  um ponto fixo hiperbólico para um difeomorfismo  $f : W \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$ , onde  $W$  é uma vizinhança de  $p$ . Então existe um homeomorfismo  $h : U \rightarrow V$ , com  $h(U) = V$ , onde  $U$  e  $V$  são, respectivamente, vizinhanças abertas de  $p$  e  $0$ , tal que*

$$h \circ f = Df(p) \circ h, \quad \text{em } U.$$

Uma fraqueza do teorema de Grobman-Hartman 4.3 é a suposição sobre os autovalores, que não pode ser evitada: quando alguns autovalores têm módulo um, o comportamento detalhado do sistema próximo ao equilíbrio pode não ser derivado da linearização, como nos mostra o Exemplo 5.1. Outra fraqueza do teorema é que a conclusão é muito fraca para muitas aplicações, pois um homeomorfismo pode mapear um nó estável em foco estável, como nos mostra o Exemplo 3.11.

Infelizmente, não podemos garantir a diferenciabilidade de  $h$  em geral. Mas os seguintes resultados, devido a Hartman [5], ajudam:

**Teorema 4.4** (Hartman). *Seja  $p$  um ponto fixo hiperbólico para um difeomorfismo  $f : W \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^2$ , onde  $W$  é uma vizinhança de  $p$ , de modo que todos os autovalores de  $Df(p)$  tem norma menor que um (ou todos tem norma maior que um). Então existe um homeomorfismo de classe  $C^1$   $h : U \rightarrow V$ , com  $h(U) = V$ , onde  $U$  e  $V$  são, respectivamente, vizinhanças abertas de  $p$  e  $0$ , tal que*

$$h \circ f = Df(p) \circ h, \quad \text{em } U.$$

Como consequência desse Teorema, Hartman obteve o seguinte resultado.

**Teorema 4.5** (Hartman). *Seja  $p$  um ponto fixo hiperbólico para um difeomorfismo  $f : W \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $C^2$ , onde  $W$  é uma vizinhança de  $p$ . Então existe um homeomorfismo de classe  $C^1$   $h : U \rightarrow V$ , com  $h(U) = V$ , onde  $U$  e  $V$  são, respectivamente, vizinhanças abertas de  $p$  e  $0$ , tal que*

$$h \circ f = Df(p) \circ h, \quad \text{em } U.$$

Como consequência destes Teoremas, se o sistema dinâmico  $f$  é de classe  $C^2$  então qualquer ponto de equilíbrio cujo linearizado é um nó ou foco é ele próprio do mesmo tipo.

Na seguinte seção, mostraremos através dos Exemplos 5.1, 5.2 e 5.4 que não importa o quão diferenciável  $f$  possa ser, podemos não ter grau mais alto de diferenciabilidade para conjugação  $h$  da que já nos dão os Teoremas 4.3, 4.5 e 4.4. E quando existem autovalores como norma menor do que um e maior do que um, em geral um homeomorfismo é tudo o que podemos esperar como mostra o Exemplo 5.4. Tudo isso poderá tornar pouco útil os Teorema de Grobman-Hartman, isso vai depender da natureza do Sistema Dinâmico, como nos mostra o Exemplo 6.1.

*Observação 4.6.* A aplicação linear  $Df(p)$  dos Teoremas 4.3, 4.4, 4.5 é chamado de linearizado do Sistema Dinâmico  $f$  ao redor do ponto fixo  $p$ .

## 5 Contra-Exemplos Para os Teoremas de Hartman

A seguir, apresentaremos alguns exemplos que nos mostram a utilidade e as limitações dos Teoremas de Hartman 4.3, 4.4 e 4.5.

O exemplo a seguir nos mostra que a condição de hiperbolicidade no Teorema de Hartman é essencial. Mostraremos uma família de aplicações analíticas que não possuem uma conjugação contínua com alguma aplicação linear.

**Exemplo 5.1.** Seja a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $f(x, y) = (y, y + \epsilon x^2)$ , onde  $\epsilon$  é uma constante diferente de zero. Então, se tem que

- (a) O ponto  $(0, 0)$  é um ponto fixo que não é hiperbólico.
- (b) Não existe uma função linear  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $f \circ h = h \circ A$  para algum homeomorfismo local  $h$  perto do ponto  $(0, 0)$ .

**Demonstração:**

- (a) Vamos provar que  $(0, 0)$  é um ponto fixo não hiperbólico.

1. Temos que  $f(0, 0) = (0, 0)$ , logo é um ponto fixo.

2. Por outro lado, temos que  $Df(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2\epsilon x & 1 \end{bmatrix}$ . Assim,

$$Df(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, se tem que 1 é um autovalor da matriz  $Df(0, 0)$ . Então, por definição temos que o ponto fixo  $(0, 0)$  não é hiperbólico.

- (b) Suponha que exista uma aplicação linear  $A$  tal que

$$f \circ h(x, y) = h \circ A(x, y). \tag{5.1}$$

Conseqüentemente, se consideramos  $h(x, y) = (h_1(x, y), h_2(x, y))$ , obtemos

$$(h_2(x, y), h_2(x, y) + \epsilon(h_1(x, y))^2) = (h_1(A(x, y)), h_2(A(x, y))).$$

Assim, temos que  $h_2(x, y) = h_1(A(x, y))$  e  $h_2(x, y) + \epsilon(h_1(x, y))^2 = h_2(A(x, y))$ . Desta última equação, temos que

$$\epsilon(h_1(x, y))^2 + h_2(x, y) - h_2(A(x, y)) = 0. \tag{5.2}$$

Fazendo,  $h_1(x, y) = z$ ,  $h_2(x, y) - h_2(A(x, y)) = c$ , temos que,

$$\epsilon z^2 + c = 0. \tag{5.3}$$

Como  $h_1$  é uma função real, se tem que  $h_1(x, y)$  assume um único valor real, isto quer dizer que a equação quadrática Eq.(5.3) possui uma única solução real, ou

equivalente o discriminante  $\Delta = -4\epsilon c = 0$ , isto é,  $-4\epsilon(h_2(x, y) - h_2(A(x, y))) = 0$ . Consequentemente, obtemos que

$$h_2(x, y) = h_2(A(x, y)). \quad (5.4)$$

Assim, substituindo na Eq. (5.2), obtemos

$$h_1(x, y) = 0. \quad (5.5)$$

Por outro lado, note que  $f$  não é uma função injetora, pois  $f(x, 0) = (0, \epsilon x^2)$ . Isto quer dizer que  $f$  não é injetiva numa vizinhança do zero, isso e a Eq. (5.1) nos levam a ver que  $A$  não é injetiva numa vizinhança do zero, pois senão  $f = h \circ A \circ h^{-1}$  seria a composição de três funções injetoras, o que levaria a  $f$  ser injetora. Como a aplicação linear  $A$  não é injetora então, existe um ponto  $(a, b) \neq (0, 0)$  suficientemente próximo de  $(0, 0)$  tal que  $A(a, b) = (0, 0)$ , pois o núcleo é não trivial. Disso e da Eq. (5.4), temos que  $h_2(a, b) = h_2(A(a, b)) = h_2(0, 0)$ . Além do mais, da Eq. (5.5) temos que  $h_1(a, b) = h_1(0, 0) = 0$ . Logo,  $h(a, b) = (h_1(a, b), h_2(a, b)) = (h_1(0, 0), h_2(0, 0)) = h(0, 0)$ , para  $(a, b) \neq (0, 0)$ , isto quer dizer que  $h$  não é uma função injetiva, o que nos leva a uma contradição, com o fato que  $h$  é um homeomorfismo numa vizinhança do zero. Isto termina o Exemplo.

No exemplo a seguir, daremos uma família de difeomorfismos locais analíticos que satisfazem as condições dos Teoremas de Hartman 4.4 e 4.5, mas que não podem ser linearizados por uma conjugação de classe  $C^2$ .

**Exemplo 5.2.** Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma função tal que  $f(x, y) = (\lambda x, \lambda^2 y + \epsilon x^2)$ , onde  $\epsilon$  e  $\lambda$  são constantes tais que  $\epsilon \neq 0$ ,  $\lambda \neq 0$  e  $\lambda \neq \pm 1$ . Então, se tem que

- (a) O ponto  $(0, 0)$  é um ponto fixo que é hiperbólico.
- (b) Não existe um difeomorfismo local  $h : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subset \mathbb{R}^2$  de classe  $C^2$  numa vizinhança da origem  $(0, 0)$  tal que  $h \circ f = Df(0, 0) \circ h$ .

**Demonstração:**

- (a) Vamos provar que  $(0, 0)$  é um ponto fixo hiperbólico.

1. Temos que  $f(0, 0) = (0, 0)$ , logo é um ponto fixo.

2. Como  $Df(x, y) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 2\epsilon x & \lambda^2 \end{bmatrix}$ . Logo,  $Df(0, 0) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}$ . Assim, se tem que  $\lambda \neq \pm 1$  e  $\lambda^2 \neq 1$  são autovalores da matriz  $Df(0, 0)$ . Logo, por definição temos que o ponto fixo  $(0, 0)$  é hiperbólico. Note-se que, pelo Teorema da Aplicação Inversa, a função  $f$  é um difeomorfismo analítico numa vizinhança de  $(0, 0)$ .

(b) Suponhamos que  $f$  seja  $C^2$  linearizável numa vizinhança de  $(0, 0)$ , isto é, existe um difeomorfismo local  $h : U \rightarrow V$  de classe  $C^2$  de modo que  $h \circ f = Df(0, 0) \circ h$ . Considerando  $h(x, y) = (h_1(x, y), h_2(x, y))$ , temos que

$$h \circ f(x, y) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1(x, y) \\ h_2(x, y) \end{bmatrix}.$$

Consequentemente,  $(h_1(\lambda x, \lambda^2 y + \epsilon x^2), h_2(\lambda x, \lambda^2 y + \epsilon x^2)) = (\lambda h_1(x, y), \lambda^2 h_2(x, y))$ . Em particular,  $h_2(\lambda x, \lambda^2 y + \epsilon x^2) = \lambda^2 h_2(x, y)$ . Derivando com respeito a  $x$ ,

$$\lambda^2 \partial_x h_2(x, y) = \lambda \partial_x h_2(\lambda x, \lambda^2 y + \epsilon x^2) + 2\epsilon x \partial_y h_2(\lambda x, \lambda^2 y + \epsilon x^2). \quad (5.6)$$

Em particular para  $(x, y) = (0, 0)$  se tem que  $\lambda \partial_x h_2(0, 0) = \lambda^2 \partial_x h_2(0, 0)$  ou equivalentemente  $0 = (\lambda^2 - \lambda)(\partial_x h_2(0, 0))$ . Como,  $\lambda$  é diferente de 0 e 1, então  $(\lambda^2 - \lambda) \neq 0$ . Portanto,

$$\partial_x h_2(0, 0) = 0. \quad (5.7)$$

Derivando ambos lados da Eq. (5.6) com respeito a  $x$ ,

$$\begin{aligned} \lambda^2 \partial_{xx}^2 h_2(x, y) &= [\lambda^2 \partial_{xx}^2 h_2(\lambda x, \lambda^2 y + \epsilon x^2) + 4\epsilon x \lambda \partial_{yx}^2 h_2(\lambda x, \lambda^2 y + \epsilon x^2)] \\ &\quad + 2\epsilon \partial_y h_2(\lambda x, \lambda^2 y + \epsilon x^2) + 4\epsilon^2 x^2 [\partial_{yy}^2 h_2(\lambda x, \lambda^2 y + \epsilon x^2)]. \end{aligned}$$

Daqui, tomando  $(x, y) = (0, 0)$  e do fato que  $\epsilon \neq 0$ , obtemos que

$$\partial_y h_2(0, 0) = 0. \quad (5.8)$$

Então das Eqs. (5.7) e (5.8) obtém-se que  $Dh(0, 0)$  não é invertível pois

$$Dh(0, 0) = \begin{bmatrix} \partial_x h_1(0, 0) & \partial_y h_1(0, 0) \\ \partial_x h_2(0, 0) & \partial_y h_2(0, 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_x h_1(0, 0) & \partial_y h_1(0, 0) \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Assim, temos que o determinante do Jacobiano é igual a zero, que é uma contradição com o fato de que  $h$  é um difeomorfismo numa vizinhança do zero. Isto nos mostra que  $f$  não pode ter uma conjugação de classe  $C^2$ .

*Observação 5.3.* A versão do Exemplo 5.2 para o caso de  $\epsilon = 1$ , aparece originalmente, onde se encontra um esboço da prova, no artigo de Stenberg [15, p. 812].

O seguinte Exemplo, devido a Hartman nos mostra que sob as hipóteses do Teorema de Grobman-Hartman 4.5 mesmo sendo  $f$  uma função analítica pode não existir uma conjugação de classe  $C^1$  com a parte linear  $Df(0)$ . Este exemplo aparece originalmente, onde se encontra um esboço da prova, nos artigos de Hartman [4, p. 619] e [4, p. 240].

**Exemplo 5.4.** Seja  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma função, definida por  $f(x, y, z) = (ax, ac(y + \epsilon xz), cz)$ , com  $\epsilon$  uma constante diferente de zero e  $a > 1 > c > 0$  e  $ac > 1$ . Então, se tem que

- (a) O ponto  $(0, 0, 0)$  é um ponto fixo hiperbólico.
- (b) Não existe um difeomorfismo local  $h : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow V \subset \mathbb{R}^3$  de classe  $C^1$  numa vizinhança da origem  $(0, 0, 0)$  tal que  $f \circ h = h \circ Df(0, 0, 0)$ .

**Demostração:**

- (a) Vamos provar que  $(0, 0, 0)$  é um ponto fixo hiperbólico.

1. Temos que  $f(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$ , logo  $(0, 0, 0)$  é um ponto fixo.

2. Por definição, temos que  $Df(x, y, z) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ ac(\epsilon z) & ac & ac\epsilon x \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$  de modo que

$$Df(0, 0, 0) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & ac & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}.$$

Portanto, se tem que  $a > 1$ ,  $ac > 1$  e  $c < 1$  são autovalores da matriz  $Df(0, 0, 0)$ . Assim, por definição temos que o ponto fixo  $(0, 0, 0)$  é hiperbólico. Note-se que, pelo Teorema da Aplicação Inversa a função  $f$  é um difeomorfismo analítico numa vizinhança de  $(0, 0, 0)$ .

- (b) Suponhamos que  $f$  seja  $C^1$  linearizável numa vizinhança de  $(0, 0, 0)$ , ou seja, existe um difeomorfismo local  $h : U \rightarrow V$  de modo que  $f \circ h = h \circ Df(0, 0, 0)$ .

Seja  $h = (h_1, h_2, h_3)$ . Agora o objetivo é mostrar que a derivada parcial

$$\frac{\partial h_2(0, 0, w)}{\partial u} \quad \text{não existe para todo } w \neq 0$$

ou

$$\frac{\partial h_2(u, 0, 0)}{\partial w} \quad \text{n\~{a}o existe para todo } u \neq 0.$$

As contas que vamos fazer a seguir s\~{a}o para  $v = 0$  e  $(\|u\|, \|w\|)$  suficientemente pequenos. Para simplificar a notaç\~{a}o, para qualquer funç\~{a}o  $J$  vamos denotar

$$J(u, w) := J(u, 0, w).$$

Por hip\~{o}tese temos que  $h \circ Df(0, 0, 0) = f \circ h$ . Assim,

$$(h_1(au, acv, cw), h_2(au, acv, cw), h_3(au, acv, cw)) = (ah_1, ac(h_2 + \epsilon h_1 h_3), ch_3).$$

Ent\~{a}o, se  $v = 0$ , temos que

$$\begin{aligned} ah_1 &= h_1(au, cw), \\ ac(h_2 + \epsilon h_1 h_3) &= h_2(au, cw), \\ ch_3 &= h_3(au, cw). \end{aligned}$$

De forma similar e usando o fato que  $h \circ Df(0, 0, 0)^n = f^n \circ h$  (ver Teorema 3.6), obtemos que

$$a^n h_1 = h_1(a^n u, c^n w) \tag{5.9}$$

$$a^n c^n (h_2 + n \epsilon h_1 h_3) = h_2(a^n u, c^n w). \tag{5.10}$$

$$c^n h_3 = h_3(a^n u, c^n w). \tag{5.11}$$

Para  $\|u\|$  e  $\|w\|$  pequenos. Como  $a > 1$  e pela Eq. (5.9) temos que

$$h_1(0, w) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_1(0, w) = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{-n} h_1(0, c^n w) = 0. \tag{5.12}$$

Logo, usando a Eq. (5.10) e  $ac > 1$ , de forma similar ao passo anterior, obtemos

$$h_2(0, w) = 0. \tag{5.13}$$

Agora, usando a mudan\~{c}a de vari\~{a}vel  $u$  por  $u/a^n$  na Eq. (5.11), obtemos

$$c^n h_3\left(\frac{u}{a^n}, 0\right) = h_3(u, 0).$$

Fazendo  $n \rightarrow \infty$  na equaç\~{a}o anterior, temos

$$h_3(u, 0) = 0. \tag{5.14}$$

Da Eq. (5.10) temos que

$$h_1(u, w) = a^{-n}h_1(a^nu, c^nw) \quad (5.15)$$

Se substituirmos a Eq. (5.15) em Eq. (5.10), dividimos por  $c^n$  e usando a mudança de variável  $u$  por  $u/a^n$ , obtém-se

$$a^n h_2(u/a^n, w) + n\epsilon h_1(u, c^n w)h_3(u/a^n, w) = c^{-n}h_2(u, c^n w). \quad (5.16)$$

Agora, suponhamos que existam as seguintes derivadas parciais

$$\frac{\partial h_2(0, w)}{\partial u} \quad \text{e} \quad \frac{\partial h_2(u, 0)}{\partial w}.$$

Então,  $\frac{\partial h_2(0, w)}{\partial u} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{h_2((0, w) + t(u, 0)) - h_2(0, w)}{t}$ . Como  $h_2(0, w) = 0$ , obtemos que  $\frac{\partial h_2(0, w)}{\partial u} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{h_2(tu, w)}{t}$ . Como  $a > 1$ , segue que se  $x_n = (\frac{1}{a})^n$  então  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ , logo usando a caracterização do limite por sequências, temos que

$$\frac{\partial h_2(0, w)}{\partial u} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h_2\left(\frac{u}{a^n}, w\right)}{\frac{1}{a^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^n h_2\left(\frac{u}{a^n}, w\right). \quad (5.17)$$

Fazendo  $w = 0$  na Eq. (5.16), obtemos

$$a^n h_2\left(\frac{u}{a^n}, 0\right) + n\epsilon h_1(u, 0)h_3\left(\frac{u}{a^n}, 0\right) = c^{-n}h_2(u, 0). \quad (5.18)$$

Da Eq. (5.14) temos que  $h_1(u, 0)h_3\left(\frac{u}{a^n}, 0\right) = 0$ . Agora, usando Eq. (5.18), chegamos a

$$a^n \left( h_2\left(\frac{u}{a^n}, 0\right) \right) = c^{-n}h_2(u, 0). \quad (5.19)$$

Além disso, da Eq. (5.17), no caso  $w = 0$ , deduzimos que

$$\frac{\partial h_2(0, 0)}{\partial u} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^n h_2\left(\frac{u}{a^n}, 0\right).$$

Logo, usando a Eq. (5.19), obtemos

$$\frac{\partial h_2(0, 0)}{\partial u} = \lim_{n \rightarrow \infty} c^{-n}h_2(u, 0). \quad (5.20)$$

Para provar que  $h_2(u, 0) = 0$ . Notemos que,  $h_2(u, 0) = h_2(u, 0)c^{-n}c^n$ ,  $0 < c < 1$ . Assim,

$$h_2(u, 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} (h_2(u, 0)c^{-n}c^n).$$

Pela Eq. (5.20) e o fato que  $\lim_{n \rightarrow \infty} c^n = 0$ , obtemos

$$h_2(u, 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} (h_2(u, 0)c^{-n}) \lim_{n \rightarrow \infty} c^n = \frac{\partial h_2(0, 0)}{\partial u} \lim_{n \rightarrow \infty} c^n = 0. \quad (5.21)$$

Agora, assumindo que  $\frac{\partial h_2(u, 0)}{\partial w}$  existe e usando a Eq. (5.21) deduzimos que

$$\frac{\partial h_2(u, 0)}{\partial w} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{h_2((u, 0) + t(0, w)) - h_2(u, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{h_2((u, 0) + t(0, w))}{t}.$$

Assim, como  $c < 1$  temos  $\lim_{n \rightarrow \infty} c^n = 0$ . Logo, pela caracterização do limite pela sequencias, obtemos

$$\frac{\partial h_2(u, 0)}{\partial w} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h_2(u, c^n w)}{c^n}. \quad (5.22)$$

Da Eq. (5.16), obtemos

$$\frac{1}{n} a^n h_2(u/a^n, w) + \epsilon h_1(u, c^n w) h_3(u/a^n, w) = \frac{1}{n} c^{-n} h_2(u, c^n w).$$

Assim, fazendo  $n \rightarrow \infty$  e usando as Eqs. (5.17) e (5.22), a continuidade das funções  $h_1, h_2$  e  $h_3$ , as condições  $a > 1$ , e  $c < 1$ , tem-se  $\epsilon h_1(u, 0) h_3(0, w) = 0$ , o qual é impossível para  $uw \neq 0$ . Pois, por exemplo se  $h_1(u, 0) = 0$  e  $u \neq 0$ , então por Eq. (5.14) e Eq. (5.21), respectivamente, obtemos  $h_2(u, 0) = 0, h_3(u, 0) = 0$ . Consequentemente,  $h_1 = h_2 = h_3 = 0$ , para  $(u, 0, 0) \neq (0, 0, 0)$ , o que contradiz o fato que  $h$  é injetiva. Por outro lado, se  $h_3(0, w) = 0$ , juntamente com as Eqs. (5.12) e (5.13), obtemos novamente que  $h_1 = h_2 = h_3 = 0$ , quando  $(0, 0, w) \neq (0, 0, 0)$  o que contradiz o fato que  $h$  é injetiva. Logo, essa contradição vem do fato de assumir a existência de uma conjugação  $h$  de classe  $C^1$ . Portanto, não existe uma conjugação  $h$  de classe  $C^1$  que linearize a função  $f$  numa vizinhança do ponto fixo hiperbólico  $(0, 0, 0)$ . Concluindo a prova do Exemplo.

## 6 Exemplo de Aplicação

A seguir, para ilustrar os Teoremas de Hartman, daremos uma aplicação para o mapa de Hénon.

### 6.1 A Aplicação de Hénon

O mapa de Hénon, foi proposto em 1976 pelo astrônomo francês Michel Hénon como um modelo para a seção de Poincaré do sistema de Lorenz. O mapa de Hénon

$H_{ab} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é definido pelo seguinte conjunto de equações:

$$H_{ab}(x, y) = (-ax^2 + 1 + y, bx),$$

onde  $a$  é o parâmetro de não-linearidade,  $b$  o parâmetro de dissipação do sistema. É um dos exemplos mais estudados de sistemas dinâmicos pois, apesar de ser descrito por um conjunto de equações bastante simples, o mapa de Hénon apresenta uma dinâmica extremamente rica. Por exemplo, para os valores dos parâmetros  $a = 1,4$  e  $b = 0,3$ , que são os valores utilizados por M. Hénon em seu trabalho, o mapa apresenta um comportamento “caótico”. No entanto, para outros conjuntos de valores de parâmetros, o mapa de Hénon pode convergir para uma órbita periódica, caótica ou mesmo divergir.

**Exemplo 6.1 (Algumas propriedades da aplicação de Hénon).** A aplicação de Hénon  $H_{ab}$  tem as seguintes propriedades:

1. Tem-se que  $H_{ab} = f_3 \circ f_2 \circ f_1$ , onde

$$f_1(x, y) = (x, -ax^2 + y + 1), \quad f_2(x, y) = (bx, y), \quad f_3(x, y) = (y, x).$$

2. A aplicação  $H_{ab}$  é injetiva, se  $b \neq 0$ , cuja inversa é

$$H_{ab}^{-1}(x, y) = \left( \frac{1}{b}y, -1 + \frac{a}{b^2}y^2 + x \right).$$

3. A função do  $H_{ab}$  tem os seguintes pontos fixos.

$$p^\pm = \frac{1}{2a} \left( b - 1 \pm \sqrt{4a + (1 - b)^2} \right) (1, b). \quad (6.1)$$

Portanto, para cada  $b$  existe  $a_0(b) = -\frac{1}{4}(1 - b)^2$  de modo que:

- (i) Se  $a < a_0(b)$ , então a função  $H_{ab}$  não tem pontos fixos.
- (ii) Se  $a = a_0(b)$ , então a função  $H_{ab}$  tem um ponto fixo.
- (iii) Se  $a > a_0(b)$  então a função  $H_{ab}$  tem dois pontos fixos  $p^+$  e  $p^-$ .

4. Temos que os auto-valores da matriz jacobiana de  $H_{ab}$  no ponto  $(x_0, y_0)$  são

$$\lambda_{1,2} = -ax_0 \pm \sqrt{(a^2x_0^2 + b)}. \quad (6.2)$$

Assim,

- (i) se  $a > a_0$ , então  $p^-$  é um ponto de sela;
- (ii) se  $a_1(b) = \frac{3}{4}(1-b)^2 > a_0(b)$ , então  $p^+$  é um ponto atrator se  $a_0 < a < a_1$  e para  $p^-$  é um ponto de sela.

**Exemplo 6.2.** Considere a aplicação de Hénon no caso  $a = 1,4$  e  $b = 0,3$ , ou seja,

$$H_{ab}(x, y) = (1 + y - 1, 4x^2; 0, 3x).$$

Observe que as órbitas da aplicação de Hénon são  $\{(x_{n+1}, y_{n+1})\}$ , onde

$$x_{n+1} = 1 + y_n - 1, 4x_n^2; \quad y_{n+1} = 0, 3x_{n+1}.$$

Usando a Eq. (6.1), temos que  $H_{ab}$  tem dois pontos fixos

$$\left( \frac{1}{28} \left( -\sqrt{609} - 7 \right), \frac{3}{280} \left( -\sqrt{609} - 7 \right) \right) \approx (-1, 13135; -0, 339406) \quad e$$

$$\left( \frac{1}{28} \left( \sqrt{609} - 7 \right), \frac{3}{280} \left( \sqrt{609} - 7 \right) \right) \approx (0, 631354; 0, 189406).$$

- Usando a Eq. (6.2), obtemos que o espectro  $\sigma(DH_{ab}(-1, 13135; -0, 339406))$  é formado pelos pontos

$$\lambda_1 = \frac{1}{20} \left( \sqrt{609} + \sqrt{\left( -\sqrt{609} - 7 \right)^2 + 120 + 7} \right) \approx 3, 25982,$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{20} \left( \sqrt{609} - \sqrt{\left( -\sqrt{609} - 7 \right)^2 + 120 + 7} \right) \approx -0, 0920296.$$

- Além disso, temos que espectro  $\sigma(DH_{ab}(0, 631354; 0, 189406))$  é formado pelos pontos

$$\lambda_1 = \frac{1}{20} \left( -\sqrt{609} - \sqrt{\left( \sqrt{609} - 7 \right)^2 + 120 + 7} \right) \approx -1, 92374,$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{20} \left( -\sqrt{609} + \sqrt{\left( \sqrt{609} - 7 \right)^2 + 120 + 7} \right) \approx 0, 155946.$$

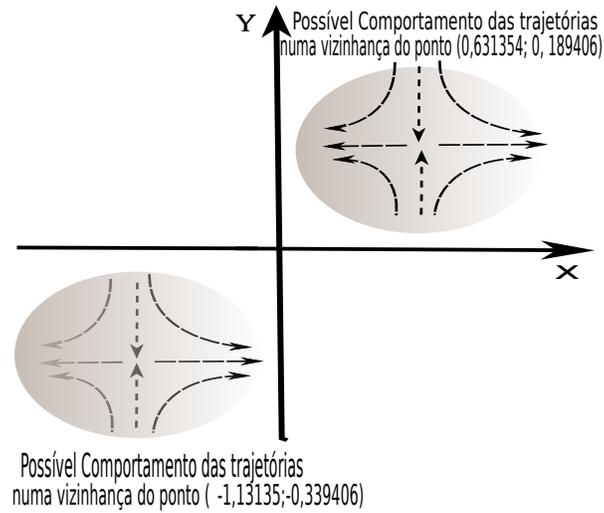


Figura 6: Possível comportamento da aplicação  $H_{ab}$  em torno dos pontos fixos.

Então, usando o Teorema de Linearização de Hartman 4.5 temos que existem conjugações  $h_1$  e  $h_2$  de classe  $C^1$ , de modo que

$$h_1 \circ H_{ab} = DH_{ab}(-1, 13135; -0, 339406) \circ h_1 \quad \text{e} \quad h_2 \circ H_{ab} = DH_{ab}(0, 631354; 0, 189406) \circ h_2.$$

Isso significa que nas vizinhanças de  $(-1, 13135; -0, 339406)$  e  $(0, 631354; 0, 189406)$ , a menos de difeomorfismos de classe  $C^1$ , o comportamento da aplicação  $H_{ab}$  são do tipo “sela” (Ver Figura 6).

*Observação 6.3.* Gostaríamos enfatizar novamente, agora com um exemplo concreto, que os Teoremas de Hartman são de natureza local e a ajuda que nos pode brindar para entender o comportamento das órbitas ao redor dos pontos fixos hiperbólicos vai depender da natureza do sistema dinâmico. No exemplo do Mapa de Hénon nos parâmetros  $a = 1,4$  e  $b = 0,3$  temos que tal mapa tem sensibilidade com respeito às condições iniciais, assim o comportamento tipo sela do mapa de Hénon, portanto a visão local, perde-se rapidamente como nos mostra a Figura 7.

*Observação 6.4.* Destacamos que o mesmo raciocínio ilustrado na análise linear da aplicação de Hénon, pode ser feito para outros modelos dinâmicos, como por exemplo (aplicações de Ikeda [7, p. 259],[7, p. 709], [3, p. 553]), modelos ecológicos [16, p. 208] e econômicos [2, p. 1].

*Observação 6.5.* Uma das vantagens das equações a diferenças, em particular os sistemas dinâmicos discretos, é que elas prontamente cedem à exploração numérica, seja

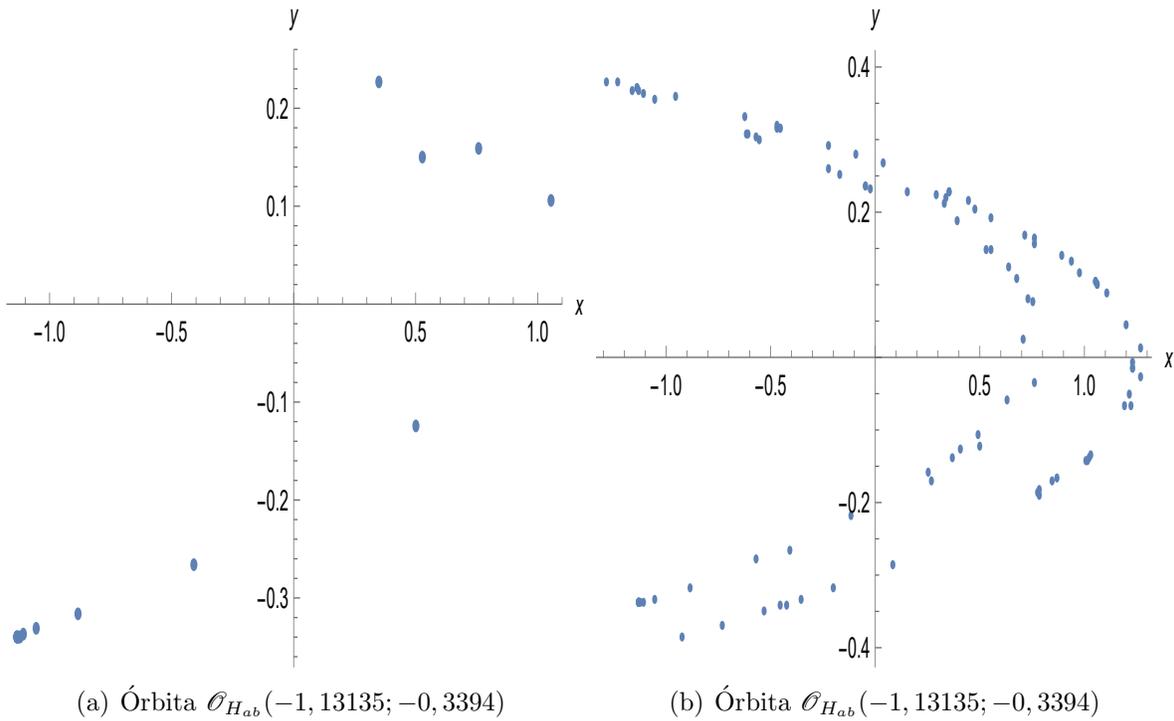


Figura 7: Órbita  $\mathcal{O}_{H_{ab}}(-1, 13135; -0, 3394)$  com 15 e 100 iterações, respectivamente.

por calculadora ou com um computador digital. Esta propriedade não é compartilhada com as equações diferenciais contínuas. Soluções para equações a diferenças podem ser obtidas por operações aritméticas sequenciais, uma tarefa para a qual o computador é precisamente adequado. Na verdade, a principal estratégia para lidar com as equações diferenciais contínuas mais problemáticas por meio de cálculos numéricos é encontrar uma equação a diferença de aproximação confiável para resolver. Isso torna particularmente importante apreciar as propriedades e excentricidades dessas equações.

## 7 Conclusões

Neste trabalho apresentamos uma breve introdução aos sistemas dinâmicos discretos e exemplos que nos mostram que a regularidade da conjugação dos Teoremas de Hartman não pode ser melhorada usando as hipóteses originais. Por outro lado, estes exemplos também nos mostram que se queremos ter uma regularidade melhor nas conjugações, além da regularidade do Sistema Dinâmico, estas também vão depender dos

autovalores do linearizado (condições de não ressonância).

Em forma prática estes exemplos nos ajudam a entender que devemos ter alguns cuidados no momento de fazer algum tipo de interpretação para o Sistema Dinâmico Não Linear baseado no Linearizado, pois as conjugações topológicas podem ser muito fracas, pois um homeomorfismo pode mapear um nó estável em um foco estável, como nos mostra o Exemplo 3.11. Nesse sentido a teoria de linearização, a qual tenta responder, se um Sistema Dinâmico ao redor de uma singularidade é localmente conjugado de forma suave à sua parte linear, é um dos problemas fundamentais e importantes na teoria dos sistemas dinâmicos. É também, uma ferramenta poderosa na discussão das propriedades qualitativas locais pois nos ajudam a entender mediante a regularidade da conjugação quão parecido é nosso sistema original a seu linearizado (Ver Exemplo 6.1).

## Referências

- [1] Bronshtein, I. U.; Kopanskii, A. Y. *Smooth Invariant Manifolds and Normal Forms*, Bronshtein, I. U.; Kopanskii, A. Y. World Scientific Series on Nonlinear Science. Series a, Monographs and Treatises, V. 7: World Scientific Pub Co Inc, 1994.
- [2] Elettrey, H.; El-Metwally, F.: On a system of difference equations of an economic model. *Discrete Dynamics in Nature and Society* (2013), 1–6.
- [3] Hammel, S. M.; Jones, C. K.R.T.; Moloney, J. V.: Global dynamical behavior of the optical field in a ring cavity. *J. Opt. Soc. Am. B* **2** (1985), no. 4, 552–564.
- [4] Hartman, P.: A lemma in the theory of structural stability of differential equations. *Proc. Amer. Math. Soc.* **11** (1960), 610–620.
- [5] Hartman, P.: On local homeomorphisms of Euclidean spaces. *Bol. Soc. Mat. Mexicana.* **2** (1960), no. 5, 610–620.
- [6] Hénon, M.: A two-dimensional mapping with a strange attractor. *Comm. Math. Phys.* **50** (1976), no. 5, 69–77.
- [7] Ikeda, Kensuke.: Multiple-valued stationary state and its instability of the transmitted light by a ring cavity system. *Optics Communications.* **30** (1979), no. 5, 257 – 261.

- [8] Irwin, Michael Ch. *Smooth dynamical systems*, Michael Charles Irwin. Advanced series in nonlinear dynamics 17. World Scientific, 2001.
- [9] Katok, Anatole.; Hasselblatt, Boris. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Anatole Katok.; Boris Hasselblatt. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 54, With a supplementary chapter by Katok and Leonardo Mendoza. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [10] Layek, G. C. *An Introduction to Dynamical Systems and Chaos*, G.C. Layek. Springer, 1 edition, 2015.
- [11] Medio, A.; Lines, M. *Nonlinear Dynamics: A Primer*, A. Medio.; M. Lines. Cambridge University Press, 2001.
- [12] Pasemann, F.; Stollenwerk, N.: Attractor switching by neural control of chaotic neurodynamics. *Network*. **9** (1998), no. 4, 549–561.
- [13] Robinson, C. *Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics and Chaos*, C. Robinson. Studies in Advanced Mathematics. CRC-Press, 1995.
- [14] Santos, Reginaldo. J. *Introdução à álgebra linear, volume Único*, Reginaldo J. Santos. Imprensa Universitaria da UFMG, 2013.
- [15] Sternberg, Shlomo.: Local contractions and a theorem of Poincaré. *American Journal of Mathematics*. **79** (1957), 809–824.
- [16] Tilma, David.; Wedin, David.: Oscillations and chaos in the dynamics of a perennial grass. **353** (1991), 653–655.

**Submetido em 04 de Dezembro de 2021.**

**Aceito em 17 de Fevereiro de 2023.**