

## TRANSFORMAÇÕES LINEARES EM NOVAS ESTRUTURAS DE ESPAÇOS VETORIAIS

Elzimar de Oliveira Rufino  
Universidade Federal de Roraima  
[elzimar.rufino@ufr.br](mailto:elzimar.rufino@ufr.br)

### Resumo

Uma questão de nosso interesse neste trabalho é investigar as transformações lineares em espaços vetoriais cujas estruturas são construídas via bijeções e, em particular em espaços vetoriais do tipo gráfico. Apresentamos resultados e exemplos que mostram como construir transformações lineares nos referidos espaços vetoriais.

### Abstract

A matter of our interest in this paper is to investigate linear transformations in vector spaces whose structures are constructed via bijections and, in particular, in vector spaces of the graphic type. We present results and examples that show how to construct linear transformations in these vector spaces.

## 1 Introdução

A teoria das transformações lineares está intimamente ligada à álgebra matricial. Mas o grande propulsor para o avanço dessa teoria e o surgimento da ideia de espaço vetorial, foi o estudo dos sistemas lineares.

Segundo Nogueira [7], o matemático suíço Leonhard Euler, em meados de 1770, conseguiu caracterizar as transformações ortogonais para  $n = 2$  e  $3$ , quando estudava quadrados de números similares aos quadrados mágicos. Dando continuidade ao trabalho de Euler, Joseph Louis Lagrange publicou entre 1773 e 1775, um trabalho no qual estudou a propriedade de números que são a soma de dois quadrados. Assim, foi levado a estudar os efeitos das transformações lineares com coeficientes inteiros numa forma quadrática de duas variáveis. Johann Carl Friedrich Gauss, por sua vez, também estudou a questão com duas e três variáveis. Ele apresentou uma notação similar a da matriz que caracteriza a transformação linear. Além disso, Gauss estabeleceu a fórmula e uma notação simbólica para a composição de duas transformações lineares e também

para o produto, o que marca um passo fundamental em direção ao conceito de matriz. Hermann Gunther Grassmann em uma publicação de 1844, discutiu e obteve uma boa parte dos resultados elementares da teoria atual de espaços vetoriais e de álgebra linear, além de ter conseguido algo bem próximo de uma formalização axiomática.

Segundo Boyer [1], o matemático inglês Arthur Cayley<sup>1</sup> foi um dos primeiros a estudar matrizes, definindo a ideia de operarmos as matrizes como na álgebra. Cayley descobriu a álgebra das matrizes em 1857. Ainda segundo Boyer [1], as matrizes surgiram para Cayley ligadas às transformações lineares do tipo

$$X = ax + by \quad (1.1)$$

$$Y = cx + dy \quad (1.2)$$

com  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . Pode-se pensar como a ação de uma transformação que leva o ponto  $(x, y)$  no ponto  $(X, Y)$ . Para simplificar, Cayley escrevia as equações (1.1) e (1.2) na forma matricial

$$(X, Y) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} (x, y).$$

A partir dessas duas transformações sucessivas criou a definição de produto de matrizes, como também a matriz inversa, a matriz identidade e a matriz nula. No entanto, somente três anos mais tarde introduziu-se o conceito de soma e produto de matrizes por escalares, dando ênfase para as propriedades algébricas dessas operações.

Segundo destaca Nogueira [7], Giuseppe Peano (1858-1952) publicou em 1888 uma definição axiomática do que ele chamou de “sistema linear”, que foi considerada a primeira definição axiomática de um espaço vetorial, mas a teoria de espaços vetoriais não foi desenvolvida antes de 1920.

Recentemente, Lopes (2018) [6] constrói novos exemplos de espaços vetoriais considerando como ponto de partida um espaço vetorial inicial. Em seu trabalho, faz-se uso de bijeções para a construção. Na verdade, essas ideias estão fundamentadas no teorema do isomorfismo para espaços vetoriais.

Inspirados pelo trabalho de Lopes [6] e por um exemplo do tipo gráfico (parábola) que pode ser visto em Steinbruch [3], Rufino e Naveca [5] constroem novos exemplos de espaços vetoriais do tipo gráfico utilizando os ambientes  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ . Além disso, eles também tratam sobre subespaços do tipo gráfico e ortogonalidade.

---

<sup>1</sup>Arthur Cayley nasceu em 16 de agosto de 1821 em Richmond na Inglaterra. Em 1838 começou seus estudos no Trinity College em Cambridge onde se graduou em 1842. Em 1843 trabalhou fundamentalmente em álgebra, mas, também trabalhou em geometrias não-euclidianas e geometria  $n$ -dimensional, usando determinantes como elemento essencial.

Como podemos perceber, embora seja tema bastante explorado no decorrer da história da matemática, o estudo dos espaços vetoriais e transformações lineares é uma questão de relevância na matemática e, em particular, no contexto da álgebra linear.

Neste trabalho, vamos mostrar como construir transformações lineares em espaços vetoriais cujas estruturas são obtidas via bijeções com um espaço vetorial inicial e em particular nos espaços vetoriais do tipo gráfico. Como veremos a seguir, esses tipos de espaços vetoriais já foram tratados em outros trabalhos. No entanto, esses trabalhos não fazem menção alguma a respeito das transformações lineares nesses ambientes. Veremos que as transformações lineares estão intimamente relacionadas ao modo como foram construídas as operações de adição e multiplicação por escalar.

A seguir, na Seção 2 expomos alguns requisitos necessários para a compreensão dos resultados e na Seção 3 apresentamos os resultados principais do trabalho.

## 2 Preliminares

Nesta seção apresentaremos alguns resultados relativos à construção de espaços vetoriais, necessários para a compreensão da seção posterior. Além disso, também recordamos algumas definições importantes para nosso trabalho.

Recentemente, Lopes (2018) construiu, em [6], novos exemplos de espaços vetoriais considerando bijeções  $\varphi$  entre um espaço vetorial  $E$  e um conjunto  $F$ , apresentando o seguinte teorema.

**Teorema 2.1** (Teorema da estrutura). *Sejam  $F$  um conjunto não-vazio arbitrário e  $(E, +, \cdot)$  um espaço vetorial sobre o corpo  $K$ . Se existe uma função bijetora  $\varphi : E \rightarrow F$  então podemos definir operações  $\oplus$  e  $\odot$  em  $F$  de modo que  $(F, \oplus, \odot)$  seja também um espaço vetorial sobre o corpo  $K$ .*

As operações mencionadas no Teorema 2.1 são construídas em  $F$  via  $\varphi$  de acordo com o diagrama exposto na Figura 1 abaixo.

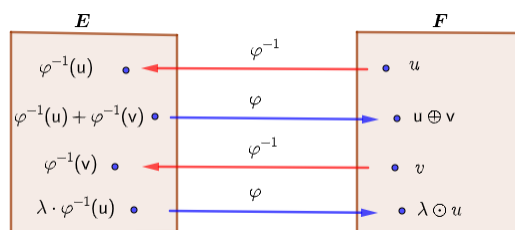


Figura 1: Diagrama de construção das operações de espaço vetorial.

Em [5], Rufino e Naveca (2021) constroem exemplos de espaços vetoriais do tipo gráfico anunciando o seguinte resultado.

**Teorema 2.2** (Rufino, Naveca). *Sejam  $(E, +, \cdot)$  um espaço vetorial  $n$ -dimensional,  $X$  um conjunto não-vazio e  $T : E \rightarrow X$  uma aplicação. Então, o gráfico de  $T$  possui uma estrutura de espaço vetorial  $n$ -dimensional.*

A prova desse resultado consiste em munir o gráfico  $G(T)$  com uma operação de adição e outra de multiplicação por escalar, satisfazendo as condições de espaço vetorial. Dados  $u, v \in E$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , a operação de adição  $\oplus : G(T) \times G(T) \rightarrow G(T)$  e a de multiplicação por escalar  $\odot : \mathbb{R} \times G(T) \rightarrow G(T)$  em  $G(T)$  são definidas por

$$\begin{aligned}(u, T(u)) \oplus (v, T(v)) &= (u + v, T(u + v)) \\ \lambda \odot (u, T(u)) &= (\lambda \cdot u, T(\lambda \cdot u)).\end{aligned}$$

Inspirados pelo trabalho de Lopes (2018) [6], Rufino e Naveca (2021) [5], apresentaram o seguinte resultado, o qual mostra como modificar a estrutura de um espaço vetorial do tipo gráfico.

**Teorema 2.3** (Rufino, Naveca). *Sejam  $(E, +, \cdot)$  um espaço vetorial,  $T : E \rightarrow X$  uma aplicação e  $\varphi : E \rightarrow E$  uma bijeção. Então, o conjunto*

$$W = G(T) = \{(v, T(v)); v \in E\}$$

*possui uma estrutura de espaço vetorial com as operações de adição e multiplicação por escalar definidas por*

$$\begin{aligned}(u, T(u)) \oplus (v, T(v)) &= (\varphi(\varphi^{-1}(u) + \varphi^{-1}(v)), T(\varphi(\varphi^{-1}(u) + \varphi^{-1}(v)))) \\ \lambda \odot (u, T(u)) &= (\varphi(\lambda\varphi^{-1}(u)), T(\varphi(\lambda\varphi^{-1}(u)))).\end{aligned}$$

Como podemos ver nos teoremas 2.1 e 2.3 e conforme expõe Lopes em [6], as bijeções podem ser usadas para fazer um elo entre a álgebra linear e a teoria dos conjuntos. Em outras palavras, as bijeções podem induzir operações de um espaço vetorial em conjuntos específicos. A seguir, vamos ver como as bijeções podem induzir uma noção de produto interno e conseqüentemente uma noção de ângulo entre vetores em tais conjuntos. A ideia de considerar um produto interno induzido(métrica) é natural em geometria Riemanniana. Em [5], os autores usam essa ideia para estudar a ortogonalidade de subespaços vetoriais do tipo gráfico. De posse de um produto interno, ficam estabelecidas uma norma e uma função distância(métrica), como pode ser visto em Rufino e Naveca em [5]. Mais especificamente, temos a seguinte proposição.

**Proposição 2.4.** *Sejam um espaço vetorial de dimensão finita  $(E, +, \cdot)$  com produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e  $X$  um conjunto não-vazio. Se  $\varphi : E \rightarrow X$  é uma bijeção então, define-se um produto interno em  $X$  pondo-se:*

$$\langle u, v \rangle_X = \langle \varphi^{-1}(u), \varphi^{-1}(v) \rangle \text{ para } u, v \in X. \quad (2.1)$$

Além disso, esse produto interno induz em  $X$  a norma

$$\|u\|_X = \sqrt{\langle u, u \rangle_X} \quad (2.2)$$

Essa norma induz uma métrica em  $X$  pondo-se, para  $u, v \in X$ ,

$$d_X(u, v) = \|u - v\|_X. \quad (2.3)$$

Adotaremos a seguinte definição de reta em espaços vetoriais. Para mais detalhes o leitor pode consultar Lima [2], Rufino e Naveca [5].

**Definição 2.5.** *Em um espaço vetorial  $(E, +, \cdot)$ , a reta  $r$  que contém os vetores  $u$  e  $v$  de  $E$  é, por definição, o subconjunto*

$$r = \{(1 - t) \cdot u + t \cdot v; t \in \mathbb{R}\} \subset E.$$

Neste trabalho, salvo menção em contrário, iremos considerar apenas espaços vetoriais de dimensão finita. Além disso, o corpo dos escalares  $K$ , será o corpo dos números reais  $\mathbb{R}$ .

*Observação 2.6.* Os trabalhos de Lopes em [6] e Rufino e Naveca em [5] não tratam das transformações lineares. Então, uma questão natural é saber como podemos obter transformações lineares nos espaços construídos em ambos os trabalhos. Algumas transformações, como é o caso das reflexões e das rotações estão diretamente relacionadas à ideia de ângulo entre vetores. O trabalho de Rufino e Naveca em [5] explora a ideia de ortogonalidade entre subespaços vetoriais do tipo gráfico. No entanto, o exemplo dado por eles ocorre em um parabolóide elíptico, o qual é rotacionalmente simétrico<sup>2</sup>. Em nosso trabalho também exploramos aspectos em um exemplo de espaço não é rotacionalmente simétrico, possibilitando maior clareza e entendimento a respeito do assunto.

A seguir apresentamos os resultados principais de nosso trabalho.

---

<sup>2</sup>O aspecto visual do parabolóide elíptico não muda se o rotacionarmos em torno do eixo  $z$

### 3 Resultados principais

Nesta seção apresentaremos nossos resultados a respeito das transformações lineares em novas estruturas. Duas dessas estruturas se destacam, a saber, a estrutura de espaço vetorial do tipo gráfico mencionada no trabalho de Rufino e Naveca [5] e as estruturas de espaços vetoriais obtidas via bijeções conforme podem ser vistas no trabalho de Lopes [6].

A seguir apresentamos nosso primeiro resultado, o qual mostra como construir transformações lineares em espaços vetoriais do tipo gráfico.

**Teorema 3.1.** *Sejam  $(E, +, \cdot)$  um espaço vetorial,  $L : E \rightarrow E$  uma transformação linear,  $F : E \rightarrow X$  uma aplicação e  $G(F) = \{(u, F(u)), u \in E\}$  o gráfico de  $F$  com as operações definidas por*

$$\begin{aligned}(u, F(u)) \oplus (v, F(v)) &= (u + v, F(u + v)) \\ \lambda \odot (u, F(u)) &= (\lambda u, F(\lambda u)).\end{aligned}$$

Então, a aplicação  $T : G(F) \rightarrow G(F)$  definida por  $T(u, F(u)) = (L(u), F(L(u)))$  é uma transformação linear.

*Demonstração.* Sejam  $\mathbf{u} = (u, F(u))$ ,  $\mathbf{v} = (v, F(v)) \in G(F)$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Temos que:

i)

$$\begin{aligned}T(\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) &= T(u + v, F(u + v)) \\ &= (L(u + v), F(L(u + v))) \\ &= (Lu + Lv, F(Lu + Lv)) \\ &= (Lu, F(Lu)) \oplus (Lv, F(Lv)) \\ &= T(u, F(u)) \oplus T(v, F(v)) \\ &= T(\mathbf{u}) \oplus T(\mathbf{v}).\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}T(\lambda \odot \mathbf{u}) &= T(\lambda \cdot u, F(\lambda \cdot u)) \\ &= (L(\lambda \cdot u), F(L(\lambda \cdot u))) \\ &= (\lambda \cdot Lu, F(\lambda \cdot Lu)) \\ &= \lambda \odot (Lu, F(Lu)) \\ &= \lambda \odot T(u, F(u)) \\ &= \lambda \odot T(\mathbf{u}).\end{aligned}$$

□

No seguinte exemplo vamos construir transformações lineares na estrutura de espaço vetorial do parabolóide descrita por Rufino e Naveca em [5].

**Exemplo 3.2.** Seja o parabolóide  $V = \{(x, y, x^2 + y^2); x, y \in \mathbb{R}\}$  com a estrutura de espaço vetorial dadas pelas operações

$$\begin{aligned} (x, y, x^2 + y^2) \oplus (z, w, z^2 + w^2) &= (x + z, y + w, (x + z)^2 + (y + w)^2) \\ \lambda \odot (x, y, x^2 + y^2) &= ((\lambda x, \lambda y, \lambda^2(x^2 + y^2))). \end{aligned}$$

A aplicação  $T : V \rightarrow V$  definida por

$$T(x, y, x^2 + y^2) = (ax + by, cx + dy, (ax + by)^2 + (cx + dy)^2),$$

com  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ , é uma transformação linear.

De fato, basta ver que  $T(u, F(u)) = (L(u), F(L(u)))$  onde  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é definida por  $L(x, y) = (ax + by, cx + dy)$  e  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é definida por  $F(x, y) = x^2 + y^2$ . Como  $L$  é uma transformação linear no espaço  $\mathbb{R}^2$  canônico, o resultado segue imediatamente do Teorema 3.1. Em particular se  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  for dada por  $L(x, y) = (-x, -y)$ , então  $T : V \rightarrow V$  definida por  $T(x, y, x^2 + y^2) = (-x, -y, x^2 + y^2)$  é a simetria em relação à origem  $(0, 0, 0)$  do parabolóide, induzida por  $L$ . A Figura 2 descreve essa situação.

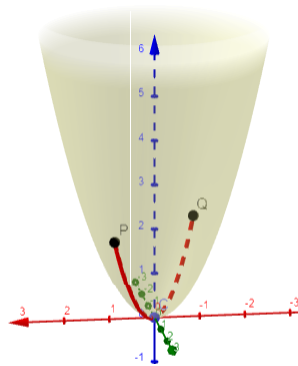


Figura 2: Pontos simétricos em relação à origem.

Por outro lado, se considerarmos a reflexão  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  em torno do eixo  $x$  definida por  $L(x, y) = (x, -y)$  obtemos a transformação linear  $T : V \rightarrow V$  definida por  $T(x, y, x^2 + y^2) = (x, -y, x^2 + y^2)$ , a qual é a reflexão em torno da reta  $r = \{(x, 0, x^2); x \in \mathbb{R}\}$  do parabolóide.

Na Figura 3.2, podemos ver a reta  $r$ , os pontos  $A = (2, -1, 5)$ ,  $B = (2, 1, 5)$  e a reta que passa por  $A$  e  $B$ .

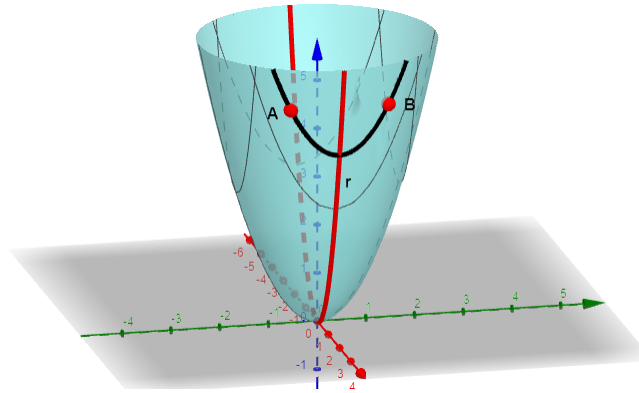


Figura 3: Reflexão em torno de reta  $(x, 0, x^2)$  no parabolóide.

*Observação 3.3.* A simetria rotacional do espaço dá impressão que a  $A$  e  $B$  são o reflexo um do outro em relação à reta  $r = \{(x, 0, x^2); x \in \mathbb{R}\}$  pelo fato de que a distância euclidiana de  $A$  até  $r$  seja igual à distância euclidiana de  $B$  até  $r$ . Embora, neste caso, isso seja uma verdade, a distância a ser considerada é a induzida pelo produto interno dado na Proposição 2.4.

O próximo exemplo retrata uma situação de um espaço que não é rotacionalmente simétrico.

**Exemplo 3.4.** Seja  $(G(F), \oplus, \odot)$  o gráfico da aplicação  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $F(x, y) = e^{x+y}$ , dotado das operações

$$(x, y, e^{x+y}) \oplus (z, w, e^{z+w}) = (x + z, y + w, e^{(x+z)+(y+w)}) \quad (3.1)$$

$$\lambda \odot (x, y, e^{x+y}) = (\lambda x, \lambda y, e^{(\lambda x)+(\lambda y)}). \quad (3.2)$$

A reflexão em torno da origem  $\mathbf{0} = (0, 0, 1)$  de  $G(F)$  é dada por  $T(x, y, e^{x+y}) = (-x, -y, e^{-x-y})$ . Se  $P = (\frac{4}{5}, \frac{4}{5}, e^{\frac{8}{5}})$  então  $-P = T(P) = (-\frac{4}{5}, -\frac{4}{5}, e^{-\frac{8}{5}})$ . Na Figura 4 temos a representação da reta que passa pelos pontos  $P$  e  $-P$ .

Os pontos  $P$  e  $-P$  são simétricos em relação à origem  $\mathbf{0} = (0, 0, 1)$ . Note que, do ponto de vista do  $\mathbb{R}^3$  canônico,  $d(P, 0) \neq d(0, -P)$ , onde  $d$  é a distância euclidiana. No entanto, a função distância correta a ser utilizada é a induzida pelo produto interno da Equação 2.1. Considerando a bijeção  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow G(F)$  dada por  $\varphi(x, y) = (x, y, F(x, y))$ , cuja inversa é a projeção  $\pi_1$  no primeiro fator, temos que

$$d_X(0, P) = \|P\|_{G(F)} = \sqrt{\langle P, P \rangle_{G(F)}} = \sqrt{\langle \pi_1(P), \pi_1(P) \rangle} = \sqrt{\langle (\frac{4}{5}, \frac{4}{5}), (\frac{4}{5}, \frac{4}{5}) \rangle} = \frac{4\sqrt{2}}{5}.$$

De modo análogo obtemos  $d_{G(F)}(0, -P) = \frac{4\sqrt{2}}{5}$ . Assim,  $d_{G(F)}(0, P) = d_{G(F)}(0, -P)$ . Isso explica o sentido da simetria em relação à origem em  $G(F)$ .



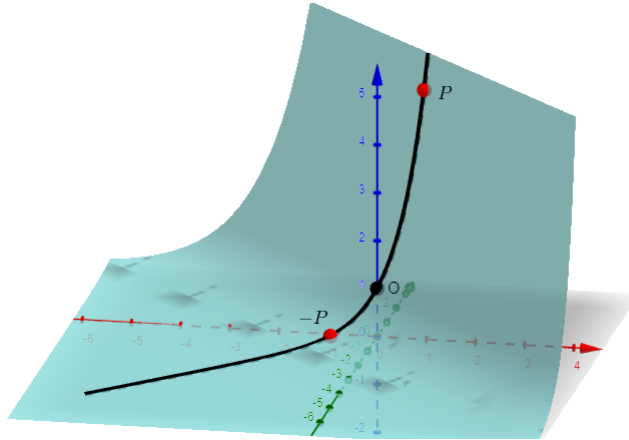


Figura 4: Reflexão em torno da origem de  $G(T)$ .

O próximo resultado está relacionado à estrutura de espaço vetorial obtida via bijeções, considerada por Lopes [6], em conformidade com o diagrama dado pela Figura 1.

**Teorema 3.5.** *Sejam  $E = (E, +, \cdot)$  um espaço vetorial e  $F = (F, \oplus, \odot)$  o espaço vetorial com a estrutura definida por uma bijeção  $\varphi : E \rightarrow F$ . Se  $L : E \rightarrow E$  é uma transformação linear, então  $T : F \rightarrow F$  definida por*

$$T = \varphi \circ L \circ \varphi^{-1}$$

*é uma transformação linear. Reciprocamente, se  $T : F \rightarrow F$  é uma transformação linear, então  $L : E \rightarrow E$  definida por*

$$L = \varphi^{-1} \circ T \circ \varphi$$

*é uma transformação linear.*

*Demonstração.* Sejam  $u, v \in F$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Temos que

i)

$$\begin{aligned} T(u \oplus v) &= \varphi(L(\varphi^{-1}(u \oplus v))) \\ &= \varphi(L(\varphi^{-1}(\varphi(\varphi^{-1}(u) + \varphi^{-1}(v)))))) \\ &= \varphi(L(\varphi^{-1}(u) + \varphi^{-1}(v))) \\ &= \varphi(L(\varphi^{-1}(u)) + L(\varphi^{-1}(v))) \\ &= \varphi(\varphi^{-1}(\varphi(L(\varphi^{-1}(u)))) + \varphi^{-1}(\varphi(L(\varphi^{-1}(v)))))) \\ &= \varphi(L(\varphi^{-1}(u))) \oplus \varphi(L(\varphi^{-1}(v))) \\ &= T(u) \oplus T(v). \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
 T(\lambda \odot u) &= \varphi(L(\varphi^{-1}(\lambda \odot u))) \\
 &= \varphi(L(\varphi^{-1}(\varphi(\lambda\varphi^{-1}(u)))))) \\
 &= \varphi(\lambda\varphi^{-1}(\varphi(L(\varphi^{-1}(u)))))) \\
 &= \lambda \odot T(u)
 \end{aligned}$$

Supondo  $T$  linear, a prova de que  $L = \varphi^{-1} \circ T \circ \varphi$  é linear se faz de modo análogo.  $\square$

A Figura 5 mostra um diagrama de composição das transformações do Teorema 3.5.

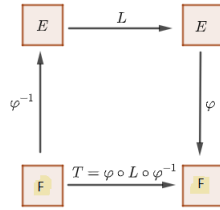


Figura 5: Diagrama de composição das transformações do Teorema 3.5.

**Exemplo 3.6.** Seja  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a bijeção definida por  $\varphi(x, y) = (x, y^3)$ . É fácil ver que a inversa  $\varphi^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de  $\varphi$  é dada por  $\varphi^{-1}(x, y) = (x, \sqrt[3]{y})$ . Agora estamos prontos para obtermos as novas operações para  $\mathbb{R}^2$ .

Dados  $u = (x, y)$  e  $v = (z, w)$ , a operação de adição é obtida como segue:

$$\begin{aligned}
 u \oplus v &= \varphi(\varphi^{-1}(x, y) + \varphi^{-1}(z, w)) \\
 &= \varphi((x, \sqrt[3]{y}) + (z, \sqrt[3]{w})) \\
 &= \varphi(x + z, \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{w}) \\
 &= (x + z, (\sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{w})^3)
 \end{aligned}$$

A operação de multiplicação por escalar obtém-se fazendo

$$\begin{aligned}
 \lambda \odot u &= \varphi(\lambda\varphi^{-1}(u)) \\
 &= \varphi(\lambda(x, \sqrt[3]{y})) \\
 &= \varphi(\lambda x, \lambda\sqrt[3]{y}) \\
 &= (\lambda x, (\lambda\sqrt[3]{y})^3).
 \end{aligned}$$

Com as operações  $\oplus$  e  $\odot$  obtidas,  $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$  é um espaço vetorial. Sendo  $L : (\mathbb{R}^2, +, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$  a transformação linear definida por

$$L(x, y) = (ax + by, cx + dy),$$

vamos calcular  $\varphi \circ L \circ \varphi^{-1}$ . Temos que

$$\begin{aligned} L \circ \varphi^{-1}(x, y) &= L(x, \sqrt[3]{y}) \\ &= (ax + b\sqrt[3]{y}, cx + d\sqrt[3]{y}). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \varphi \circ L \circ \varphi^{-1}(x, y) &= \varphi(ax + b\sqrt[3]{y}, cx + d\sqrt[3]{y}) \\ &= (ax + b\sqrt[3]{y}, (cx + d\sqrt[3]{y})^3). \end{aligned}$$

De acordo com o Teorema 3.5,  $T : (\mathbb{R}^2, \oplus, \odot) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$  definida por

$$T(x, y) = (ax + b\sqrt[3]{y}, (cx + d\sqrt[3]{y})^3)$$

é uma transformação linear. Em particular, quando  $a = d = k \in \mathbb{R}$  e  $b = c = 0$ , obtemos a homotetia

$$T(x, y) = (kx, k^3y) = k \odot (x, y).$$

Usando a notação  $\overline{\mathbb{R}^2} = (\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$  observe que

$$\|T(x, y)\|_{\overline{\mathbb{R}^2}} = |k| \cdot \|(x, y)\|_{\overline{\mathbb{R}^2}}.$$

De fato: usando a Proposição 2.4 temos

$$\begin{aligned} \|T(x, y)\|_{\overline{\mathbb{R}^2}} &= \sqrt{\langle \varphi^{-1}(T(x, y)), \varphi^{-1}(T(x, y)) \rangle} \\ &= \sqrt{\langle \varphi^{-1}(kx, k^3y), \varphi^{-1}(kx, k^3y) \rangle} \\ &= \sqrt{\langle (kx, k\sqrt[3]{y}), (kx, k\sqrt[3]{y}) \rangle} \\ &= \sqrt{k^2x^2 + k^2(\sqrt[3]{y})^2} \\ &= |k| \cdot \sqrt{x^2 + (\sqrt[3]{y})^2} \\ &= |k| \cdot \|(x, y)\|_{\overline{\mathbb{R}^2}} \end{aligned}$$

Por outro lado, se  $a = d = 0$  e  $b = -c = -1$  temos a rotação

$$R_{\frac{\pi}{2}}(x, y) = (-\sqrt[3]{y}, x^3).$$

Note que se  $\theta$  é o ângulo entre  $(x, y) \neq (0, 0)$  e  $(-\sqrt[3]{y}, x^3)$  então, considerando o produto interno dado pela Proposição 2.4, obtemos

$$\cos \theta = \frac{\langle \varphi^{-1}(x, y), \varphi^{-1}(-\sqrt[3]{y}, x^3) \rangle}{\|\varphi^{-1}(x, y)\|_{\mathbb{R}^2} \cdot \|\varphi^{-1}(-\sqrt[3]{y}, x^3)\|_{\mathbb{R}^2}} = \frac{-x\sqrt[3]{y} + x\sqrt[3]{y}}{\|\varphi^{-1}(x, y)\|_{\mathbb{R}^2} \cdot \|\varphi^{-1}(-\sqrt[3]{y}, x^3)\|_{\mathbb{R}^2}} = 0.$$

Portanto,  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

Na Figura 6, temos uma ilustração onde os elementos  $A = (1.25, 0)$ ,  $B = R_{\frac{\pi}{4}}(A)$ ,  $C = R_{\frac{\pi}{2}}(A)$ ,  $D = R_{\frac{3\pi}{4}}(A)$ ,  $E = R_{\pi}(A)$ ,  $F = R_{\frac{5\pi}{4}}(A)$ ,  $G = R_{\frac{3\pi}{2}}(A)$  e  $H = R_{\frac{7\pi}{4}}(A)$  possuem o mesmo comprimento, isto é, a mesma norma.

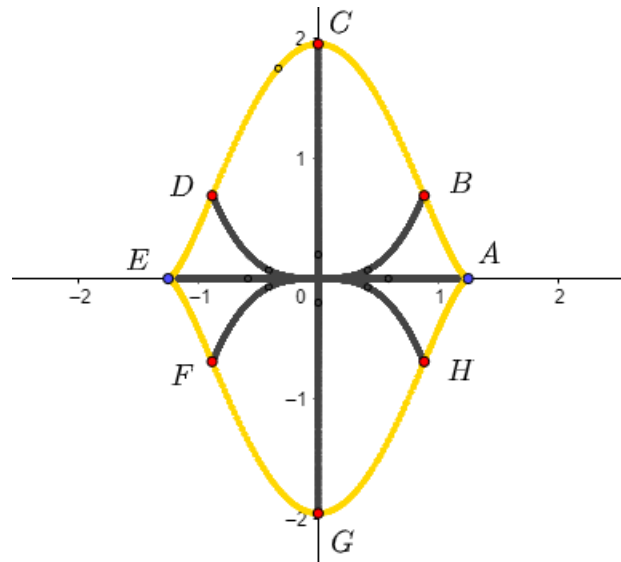


Figura 6: Rotações de segmentos em  $\overline{\mathbb{R}^2}$ .

Na Figura 6, a linha destacada em amarelo é a circunferência de centro na origem e raio  $r = \|OA\|_{\overline{\mathbb{R}^2}}$ . Embora não faça sentido do ponto de vista euclidiano, temos que  $\|OA\|_{\overline{\mathbb{R}^2}} = \|OB\|_{\overline{\mathbb{R}^2}} = \|OC\|_{\overline{\mathbb{R}^2}} = \|OD\|_{\overline{\mathbb{R}^2}} = \|OE\|_{\overline{\mathbb{R}^2}} = \|OF\|_{\overline{\mathbb{R}^2}} = \|OG\|_{\overline{\mathbb{R}^2}} = \|OH\|_{\overline{\mathbb{R}^2}}$ . Esses segmentos foram construídos considerando a Definição 2.5 de reta<sup>3</sup> e o controle deslizante do software GeoGebra.

<sup>3</sup>Em geometria riemanniana, a ideia de reta está em consonância com conceito de geodésica. Por exemplo, as geodésicas da geometria esférica são círculos máximos. No modelo da geometria hiperbólica dado pelo disco de Poincaré são semicircunferências que tangenciam ortogonalmente o bordo do disco. As geodésicas minimizam localmente a distância entre dois pontos.

Nos seguintes exemplos, quando mencionarmos uma rotação estaremos nos referindo a uma rotação em torno da origem e no sentido anti-horário.

**Exemplo 3.7.** Vamos obter a expressão da rotação de  $\frac{\pi}{2}$  no espaço vetorial  $G(F)$  do Exemplo 3.4. Sejam a bijeção  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow G(F)$  definida por  $\varphi(x, y) = (x, y, e^{x+y})$ , sua inversa (projecção no primeiro fator)  $\pi_1 : G(F) \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a rotação (de  $\frac{\pi}{2}$ ) definida por  $L(x, y) = (-y, x)$ . Pelo Teorema 3.5 a aplicação  $R_{\frac{\pi}{2}} = \varphi \circ L \circ \pi_1$  é a rotação de  $\frac{\pi}{2}$  em  $G(F)$ . Neste caso,

$$\begin{aligned} R_{\frac{\pi}{2}}(x, y, e^{x+y}) &= (\varphi \circ L \circ \pi_1)(x, y, e^{x+y}) \\ &= \varphi \circ L(x, y) \\ &= \varphi(-y, x) \\ &= (-y, x, e^{x-y}). \end{aligned}$$

No próximo exemplo vamos utilizar uma rotação de  $\frac{\pi}{2}$  para obter dois subespaços ortogonais.

**Exemplo 3.8.** Sejam  $G(F)$  o espaço vetorial do Exemplo 3.7 e seu subespaço  $W$  gerado pelo elemento  $(1, -2, e^{-1})$ , isto é,  $W = \{(x, -2x, e^{-x})/x \in \mathbb{R}\}$ . Pelo Exemplo 3.7 o subespaço  $W^\perp$  ortogonal a  $W$  é dado por  $W^\perp = R_{\frac{\pi}{2}}(W) = \{(2x, x, e^{3x})/x \in \mathbb{R}\}$ . A Figura 7 mostra os subespaços ortogonais  $W$  e  $W^\perp$  em  $G(F)$ .

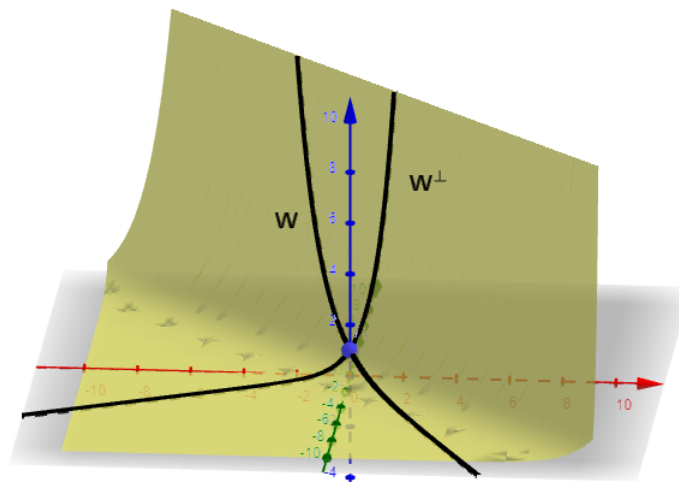


Figura 7: Subespaços ortogonais em  $G(T)$ .

## Considerações finais

Em nosso trabalho obtivemos resultados que mostram como obter transformações lineares em espaços vetoriais construídos via bijeções e, em particular nos espaços vetoriais do tipo gráfico. Não temos conhecimento desse tipo de resultado na literatura. Além disso, deixamos claro qual norma e por consequência, qual função distância devem ser utilizadas de modo natural nos referidos espaços. Acreditamos que o trabalho seja útil aos interessados pelo assunto e aos estudantes da disciplina álgebra linear a nível de graduação.

## Referências

- [1] Boyer C. *História da Matemática* São Paulo, Edgard Blucher, 1974.
- [2] Lima, E. L. *Álgebra linear*. Rio de Janeiro. IMPA. 2009.
- [3] Steinbruch, A., Winterle, P. *Álgebra linear* 2. ed., São Paulo, Pearson Makron Books, 1987.
- [4] Anton, H. *Álgebra linear com aplicações* 10 ed., Porto Alegre, Bookman, 2012.
- [5] Rufino, E.O., Naveca, K.D.A. *Novos exemplos de espaços vetoriais do tipo gráfico*. Revista de Ciência e Tecnologia - RCT-UFRR, 2021
- [6] Lopes, T. A. *Uma conexão entre a álgebra Linear e a Teoria dos Conjuntos*. [Recurso eletrônico] Disponível em: <<http://hdl.handle.net/11449/157201>>.
- [7] Nogueira, L.O. *Transformações lineares no plano e aplicações*. Trabalho de conclusão de curso. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás, 2013.