

POLINÔMIOS DE TORRE E APLICAÇÕES COM IMPLEMENTAÇÕES NO SAGEMATH

Ricardo Nunes Machado Junior

Universidade Federal Rural de Pernambuco - UFRPE

ricardo.machadojunior@ufrpe.br

Gabriel Araújo Guedes

Universidade Federal Rural de Pernambuco - UFRPE

gabriel.guedes@ufrpe.br

Resumo

Neste artigo, adotamos o estilo “survey”, no qual copilamos e concatenamos os principais resultados e aplicações sobre polinômios de torre. Esse conceito da combinatória nos permite associar problemas enumerativos à distribuição de torres não atacantes em um tabuleiro. As motivações para estudar essa teoria advém da possibilidade de agregar diversos problemas combinatórios com restrições numa única técnica, além do caráter visual que pode ser empregado ao criar uma imagem do tabuleiro e sua fácil implementação computacional. Na Seção 4, exibimos a robustez do método deduzindo resultados para permutações caóticas, com elementos repetidos ou com pontos fixos, permutações k -posicionadas e permutações discordantes. O texto é repleto de bons exemplos, destacamos a resolução do problema das coincidências e o problema dos encontros. Disponibilizamos um complemento *on-line*, feito em PreTeXt, contendo os códigos das implementações em SageMath e versões interativas, que podem ser utilizados por discentes e docentes que queiram engrandecer seus trabalhos.

Palavras-Chave: Polinômio de Torre; Permutações com Restrições; Combinatória Enumerativa; Problema dos Encontros; Algoritmos em SageMath.

Abstract

In this article, we adopt the “survey” style, in which we compile and concatenate the main results and applications concern rook polynomials. This combinatorics concept allows us to associate enumeration problems with the distribution of non-attacking rooks on a board. The motivation to study this theory comes from the possibility of aggregating several combinatorial problems with restrictions in a single technique. Moreover, the visual character that can be used when creating an image of the board and its easy computational implementation. In Section 4, we show the method’s robustness

by deducing results for derangement, derangement with repeated elements, permutations with fixed points, ranks of permutations, and discordant permutations. The text is plenty of good examples, we emphasize the resolution of the problem of coincidences and the problem of encounters. We provide an online complement, made in PreTeXt, containing the implementation codes in SageMath and their interactive versions, which can be used by students and teachers who want to enhance their work.

Keywords: Rook Polynomial; Permutations with Constraints; Enumerative Combinatorics; Problem of Encounters; Algorithms in SageMath.

1 Introdução

O termo “polinômio de torre” foi cunhado pelo matemático estadunidense John Francis Riordan (1903-1988). Ele também deu origem ao termo “número de Catalan”, é autor de livros importantes de análise combinatória, como *Combinatorial Identities* e *Introduction to Combinatorial Analysis* [7], além de ter publicado mais de cem artigos acadêmicos nesta área.

Os polinômios de torre proporcionam uma técnica geral para resolver problemas de contagem de permutações com posições restritas, o que é formidável, pois sem essa teoria, precisamos de uma ideia específica para resolver cada problema. Esse conceito serve para demonstrar vários teoremas associados a permutações, além de permitir resolver problemas que não admitem uma fórmula geral, mas que, felizmente, são de fácil entendimento e implementação computacional.

Inicialmente, mostramos o conceito de polinômio de torre com exemplos de fácil assimilação, para em seguida mostrar os resultados essenciais desta teoria. O objetivo disto é resolver os problemas da seção de aplicações, usando esta técnica. Começamos com o caso mais simples, que é o de permutação simples, e progressivamente vamos adicionando restrições nos tabuleiros, de forma que possamos obter a solução dos outros problemas. Nas aplicações, abordamos problemas não muito difundidos, como permutações k -posicionadas e permutações caóticas com elementos repetidos, além de resolver o famoso problema dos encontros, que é conhecido por possuir uma demonstração complexa.

Após apresentar cada uma das aplicações e mostrar como resolvê-las, também exibimos implementações próprias em SageMath, que não ficaram muito complexas devido à existência de métodos específicos para polinômios de torre neste *software*. O SageMath é uma alternativa gratuita aos principais *softwares* matemáticos como Maple, Mathematica e Matlab (ver [8]). Ele engloba os mais sofisticados pacotes e *softwares* livres destinados à computação simbólica e numérica. O SageMath pode ser ins-

talado em computadores, ou usado gratuitamente *on-line*, por exemplo, no endereço <https://sagectu.com.br/sagecell.html>.

Igualmente focados na disseminação do conhecimento e da didática, disponibilizamos de forma *on-line*, as implementações dos algoritmos aqui apresentados, bem como, suas versões interativas. Esse material complementar está no formato PreTeXt, o qual, segundo a AMS é o futuro dos livros didáticos (ver [12]). Os interessados em desfrutar dessas implementações, podem acessar esse conteúdo utilizando o QR Code:



O artigo está organizado da seguinte maneira. Na Seção 2, exibimos como associar um problema combinatório a uma distribuição de torres não atacantes num tabuleiro. Nela, também estão as definições referentes à determinação do polinômio de torre associado a um tabuleiro e como implementar essa associação no *software* SageMath. Na Seção 3, temos a fundamentação teórica para tudo que desenvolvemos neste trabalho. A Seção 4 é a mais extensa desse artigo, na qual fizemos inúmeras aplicações, além disso, as apresentamos numa concepção moderna e atual, mostrando a inter-relação da parte teórica com a parte computacional.

2 Preliminares

O xadrez consiste em um jogo de tabuleiro que é formado por quadrados claros e escuros de forma alternada, na qual, cada uma das 8 linhas possui 8 quadrados, formando um tabuleiro 8×8 . Uma das peças do xadrez é a torre, que pode ser movida ao longo do tabuleiro, tanto na vertical como na horizontal, podendo ficar em qualquer um desses quadrados, desde que não haja alguma peça entre o quadrado de partida da torre e o quadrado de chegada.

Um polinômio de torre é um polinômio gerador do número de maneiras de colocar *torres não atacantes* em um tabuleiro, ou seja, quaisquer duas torres não podem estar na mesma linha ou coluna. Os tabuleiros, assim como os de xadrez, são formados por quadrados, porém, não há necessidade de alternância entre as cores dos quadrados, além disso, as cores possuem um significado. Usaremos azul nos quadrados em que as torres podem ser colocadas, consistindo nas posições permitidas e usaremos vermelho nos quadrados em que as torres não podem ser colocadas, consistindo nas posições proibidas (ou restrições) do tabuleiro. Outra diferença, em relação ao xadrez, é que os

tabuleiros não precisam ser 8×8 , na verdade, eles podem ser retangulares $m \times n$, com $m, n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Na Figura 1, temos um tabuleiro 3×3 com algumas posições proibidas e todas as formas de distribuir de zero a três torres não atacantes no tabuleiro.

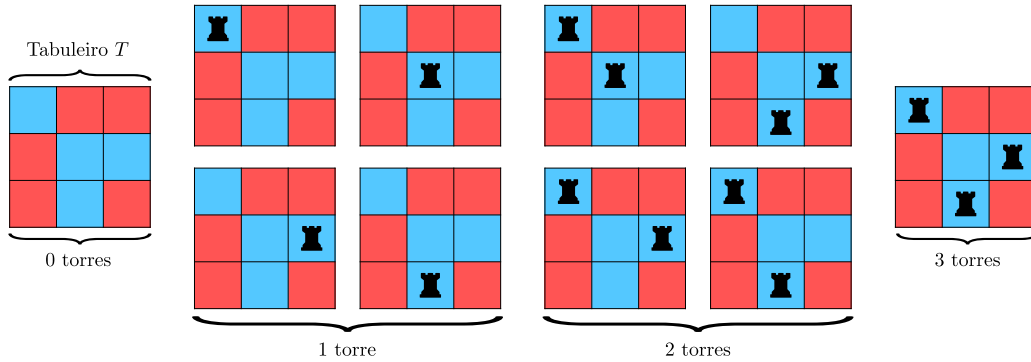


Figura 1: Tabuleiro T e todas as formas de colocar torres não atacantes.

Definição 2.1. Seja T um tabuleiro $m \times n$, o polinômio de torre de T é definido como

$$R(x, T) = \sum_{k=0}^{\min\{m,n\}} r_k(T)x^k,$$

no qual, $r_k(T)$ é o número de maneiras de colocar k torres não atacantes em T .

Exemplo 2.2. Determine o polinômio de torre do tabuleiro T , da Figura 1.

Solução. Para estabelecer o polinômio de torre de T vamos obter os coeficientes $r_i(T)$, com $i \in \{0, 1, 2, 3\}$. Note que não é possível colocar mais que 3 torres não atacantes em T . De acordo com a Figura 1, $r_0(T) = 1$, $r_1(T) = 4$, $r_2(T) = 4$ e $r_3(T) = 1$. Logo,

$$R(x, T) = 1 + 4x + 4x^2 + x^3.$$

Os polinômios de torre podem ser calculados facilmente usando o SageMath, para isto, precisamos inserir as informações dos tabuleiros no software. Devido a natureza dos tabuleiros, nada mais natural que usar matrizes. Para tanto, uma entrada 0 corresponde a um quadrado proibido, enquanto uma entrada 1 corresponde a um quadrado permitido. Dessa forma, a representação matricial de um tabuleiro com m linhas e n

colunas é dada por

$$T_{m \times n} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{m1} & q_{m2} & \cdots & q_{mn} \end{pmatrix}, \quad \text{com } q_{ij} \in \{0, 1\}.$$

Por exemplo, a matriz associada ao tabuleiro T da Figura 1 é dada por:

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Não faremos distinção entre tabuleiros e suas respectivas matrizes, exceto quando for necessário. Usaremos letras maiúsculas, às vezes com índice, para denotá-los. Quando quisermos especificar a ordem, ou seja, o número de linhas e colunas, usaremos o índice $m \times n$. Outra maneira de definir um tabuleiro é especificando sua ordem e um conjunto \mathcal{F} , referente às posições proibidas.

Exemplo 2.3. Estabeleça o polinômio de torre do tabuleiro $T_{2 \times 4}$ com conjunto das posições proibidas dado por $\mathcal{F} = \{(2, 3), (2, 4)\}$.

Solução. Sabemos que o termo independente do polinômio de torre $R(x, T_{2 \times 4})$ é 1 e que o coeficiente de x é 6, pois temos 6 posições disponíveis. Para determinar o coeficiente de x^2 , podemos verificar todos os casos possíveis, de acordo com a Figura 2.

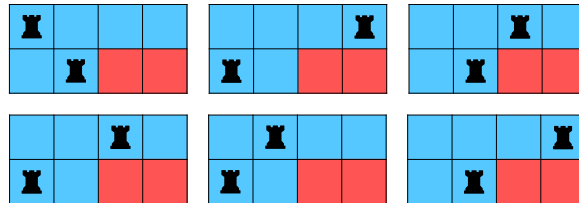


Figura 2: Tabuleiro $T_{2 \times 4}$, com $\mathcal{F} = \{(2, 3), (2, 4)\}$, e todas as formas de colocar 2 torres.

Os demais coeficientes são iguais a zero, pois não é possível colocar mais que duas torres não atacantes em $T_{2 \times 4}$. Portanto, o polinômio de torre de $T_{2 \times 4}$ é dado por

$$R(x, T_{2 \times 4}) = 1 + 6x + 6x^2.$$

Até agora, calculamos os polinômios de torre analisando todos os casos possíveis sem muita dificuldade, porém, os tabuleiros podem ser bem maiores ou mais complexos, ao passo que analisar todas as possibilidades não seja viável. Para calcular os polinômios de torres mais complexos, podemos usar os teoremas da Seção 3, a seguir, conjuntamente com o SageMath, para contornar esta adversidade. No próximo exemplo, mostramos como usar o SageMath para essa finalidade.

Exemplo 2.4. Use o SageMath para determinar o polinômio de torre do tabuleiro T , definido pela Figura 3.

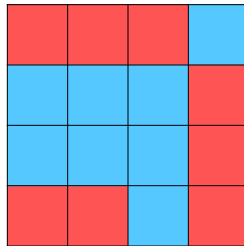


Figura 3: Tabuleiro T .

Solução. Vamos inserir o tabuleiro T no Sage usando o método `matrix` conforme a linha 1 do bloco de códigos a seguir. Na linha 2, o método `rook_vector` calcula os coeficientes do polinômio de torre. Executando este código, o Sage retorna uma lista com os coeficientes do polinômio de torre de T , com graus em ordem crescente.

```
1 T = matrix([[0, 0, 0, 1],[1, 1, 1, 0],[1, 1, 1, 0],[0, 0, 1, 0]])
2 T.rook_vector()
```

```
[1, 8, 17, 12, 2]
```

Para obter o polinômio de torre no Sage, em vez de apenas os coeficientes, podemos usar os códigos anteriores combinados com o método `PolynomialRing` como pode ser estabelecido no próximo bloco de códigos.

```
1 T = matrix([[0, 0, 0, 1],[1, 1, 1, 0],[1, 1, 1, 0],[0, 0, 1, 0]])
2 R = PolynomialRing(ZZ, 'x')
3 show(R(T.rook_vector()))
```

$$2x^4 + 12x^3 + 17x^2 + 8x + 1$$

3 Resultados Principais

Esta seção possui definições e resultados que facilitam o cálculo de polinômios de torre, bem como, exemplos da aplicação destes resultados. Por fim, apresentamos o Teorema 3.10, que é essencial na aplicação dessa teoria para resolução de problemas de permutações com restrições, o que é abordado na próxima seção. As principais referências desta parte teórica são [1, 2, 4, 7].

Teorema 3.1. *Seja T um tabuleiro $m \times n$, sem restrições. O polinômio de torre de T é dado por:*

$$R(x, T) = \sum_{k=0}^{\min\{m,n\}} \binom{m}{k} \cdot \binom{n}{k} \cdot k! \cdot x^k.$$

Demonstração. Para determinar os coeficientes dos termos x^k de $R(x, T)$, começamos contando o número de maneiras de selecionar k linhas e k colunas em T . Temos $\binom{m}{k}$ maneiras de escolher k linhas e $\binom{n}{k}$ maneiras de escolher k colunas. Para cada escolha das k linhas e k colunas, temos uma equivalência com um tabuleiro $k \times k$, no qual, vamos contar o número de maneiras de colocar as k torres não atacantes. Temos $k!$ maneiras de fazer isto, e portanto, o polinômio de torre de T é

$$R(x, T) = \sum_{k=0}^{\min\{m,n\}} \binom{m}{k} \cdot \binom{n}{k} \cdot k! \cdot x^k.$$

□

Definição 3.2. *Seja T um tabuleiro.*

- a) *Um subtabuleiro T' de T é qualquer subconjunto de quadrados de T , que formam um retângulo, ou seja, a matriz associada de T' é uma submatriz de $T_{m \times n}$, construída pela escolha de m' linhas consecutivas e n' colunas consecutivas com $1 \leq m' \leq m$ e $1 \leq n' \leq n$.*
- b) *Os subtabuleiros T_1, T_2, \dots, T_k , de T são disjuntos, se nenhum quadrado de T_i está na mesma linha ou coluna que os quadrados de T_j , para $1 \leq i, j \leq k$, com $i \neq j$.*
- c) *Dizemos que o tabuleiro T pode ser particionado em subtabuleiros disjuntos T_1, T_2, \dots, T_k , se os subtabuleiros T_1, T_2, \dots, T_k são disjuntos e se todos os quadrados de T que não estão nos subtabuleiros T_i , com $i = 1, 2, \dots, k$, são quadrados proibidos.*

Exemplo 3.3. Na Figura 4 temos um tabuleiro T e uma subdivisão em subtabuleiros disjuntos T_1, T_2 e T_3 . Note que todos os quadrados de T que não estão em T_1, T_2 ou T_3 são quadrados proibidos.

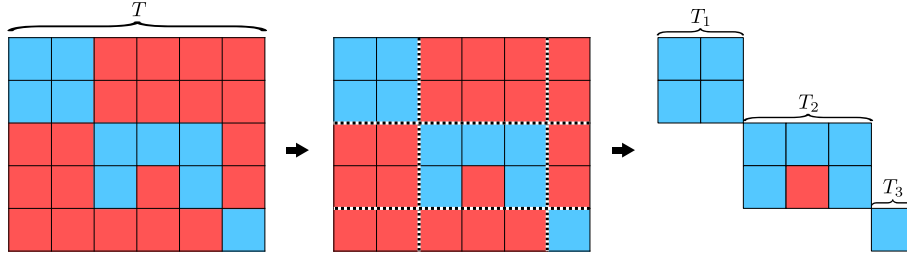


Figura 4: Tabuleiro T e divisão de T nos subtabuleiros disjuntos T_1, T_2 e T_3 .

Teorema 3.4. *Seja T um tabuleiro que pode ser particionado nos subtabuleiros disjuntos T_1, T_2, \dots, T_k . Assim, o polinômio de torre de T pode ser escrito como o produto dos polinômios de torre dos subtabuleiros T_1, T_2, \dots, T_k , ou seja:*

$$R(x, T) = R(x, T_1) \cdot R(x, T_2) \cdots R(x, T_k).$$

Demonstração. Iremos fazer indução na quantidade k de subtabuleiros disjuntos de T .

Considere T particionado nos subtabuleiros disjuntos T'_1 e T'_2 . Para colocar j torres não atacantes em T , podemos colocar $r_{j-i}(T'_1)$, com $i = 0, 1, \dots, j$, torres não atacantes em T'_1 e $r_i(T'_2)$ torres não atacantes em T'_2 . Isto posto, dados duas torres quaisquer em T , uma não pode atacar a outra. Portanto, o número de maneiras de colocar j torres não atacantes em T é dado por

$$r_j(T) = \sum_{i=0}^j r_{j-i}(T'_1) r_i(T'_2).$$

Sejam n, p e q os graus máximos dos polinômios $R(x, T)$, $R(x, T'_1)$ e $R(x, T'_2)$, respectivamente. Logo,

$$\begin{aligned} R(x, T) &= \sum_{j=0}^n r_j(T) x^j \\ &= \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^j r_{j-i}(T'_1) r_i(T'_2) x^j \\ &= \left(\sum_{s=0}^p r_s(T'_1) x^s \right) \left(\sum_{t=0}^q r_t(T'_2) x^t \right) \\ &= R(x, T'_1) \cdot R(x, T'_2). \end{aligned}$$

Nossa hipótese de indução é que o resultado é verdadeiro para todo tabuleiro T que pode ser particionado em $k - 1$ subtabuleiros disjuntos, $T'_1, T'_2, \dots, T'_{k-1}$, ou seja,

$$R(x, T) = R(x, T'_1) \cdot R(x, T'_2) \cdots R(x, T'_{k-1}).$$

Dado um tabuleiro T , que pode ser particionado em k subtabuleiros disjuntos, T_1, T_2, \dots, T_k , podemos obter, uma outra partição da seguinte maneira $S_1 = T_1, S_2 = T_2, \dots, S_{k-1} = T_{k-1} \cup T_k$, ou seja, S_{k-1} é o menor subtabuleiro de T que contém os subtabuleiros T_{k-1} e T_k . Então, pela hipótese de indução:

$$R(x, T) = R(x, S_1) \cdot R(x, S_2) \cdots R(x, S_{k-1}). \tag{3.1}$$

Pelo caso base da indução temos

$$R(x, S_{k-1}) = R(x, T_{k-1}) \cdot R(x, T_k). \tag{3.2}$$

Então, substituindo a Igualdade (3.2) em (3.1), obtemos o resultado:

$$R(x, T) = R(x, T_1) \cdot R(x, T_2) \cdots R(x, T_k).$$

□

Exemplo 3.5. Determine o polinômio de torre do tabuleiro T , do Exemplo 3.3.

Solução. Para encontrar o polinômio de torre de T , obtemos individualmente os polinômios de torre dos tabuleiros T_1, T_2 e T_3 e depois usamos o Teorema 3.4. Pelo Teorema 3.1,

$$R(x, T_1) = \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k}^2 \cdot k! \cdot x^k = 1 + 4x + 2x^2.$$

O coeficiente de x^2 do tabuleiro T_2 é 4, pois, colocando uma torre na posição (2,1), temos duas maneiras de colocar uma torre na primeira linha (posições (1,2) e (1,3)). Colocando uma torre na posição (2,3), também temos duas maneiras de colocar uma torre na primeira linha (posições (1,1) e (1,2)). Assim, no total são 4 possibilidades.

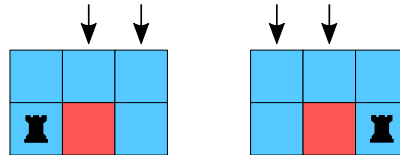


Figura 5: Tabuleiro T_2 e as indicações das 4 possibilidades de colocar duas torres.

O coeficiente de x é claramente 5, pois existem cinco quadrados permitidos e consequentemente 5 formas de colocar uma torre neste tabuleiro. Por fim, o coeficiente de x^0 é 1, pois existe uma única maneira de deixar o tabuleiro vazio. Logo,

$$R(x, T_2) = 1 + 5x + 4x^2.$$

O polinômio de torre de T_3 é claramente

$$R(x, T_3) = 1 + x.$$

Portanto, pelo Teorema 3.4, temos

$$\begin{aligned} R(x, T) &= R(x, T_1) \cdot R(x, T_2) \cdot R(x, T_3) \\ &= (1 + 4x + 2x^2)(1 + 5x + 4x^2)(x + 1) \\ &= 8x^5 + 34x^4 + 52x^3 + 35x^2 + 10x + 1. \end{aligned}$$

Teorema 3.6. *Sejam T e T' tabuleiros $m \times n$, tais que um pode ser obtido do outro permutando linhas ou colunas. Então T e T' possuem o mesmo polinômio de torre.*

Demonstração. Permutando linhas e colunas, dados dois quadrados que estão inicialmente em linhas e colunas diferentes, eles ficarão em linhas e colunas diferentes e vice-versa. Portanto, existe uma bijeção entre as maneiras de colocar um determinado número de torres não atacantes no tabuleiro inicial e as formas de colocá-las no tabuleiro final. Logo, ambos tabuleiros têm os mesmos polinômios de torre. \square

Exemplo 3.7. Determine o polinômio de torre do tabuleiro B , definido na Figura 6.

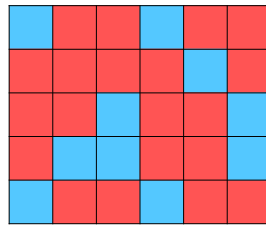


Figura 6: Tabuleiro B.

Solução. Pelo Teorema 3.6, os polinômios de torre de todos os tabuleiros da Figura 7 são iguais, pois, um pode ser obtido do outro permutando linhas ou colunas.

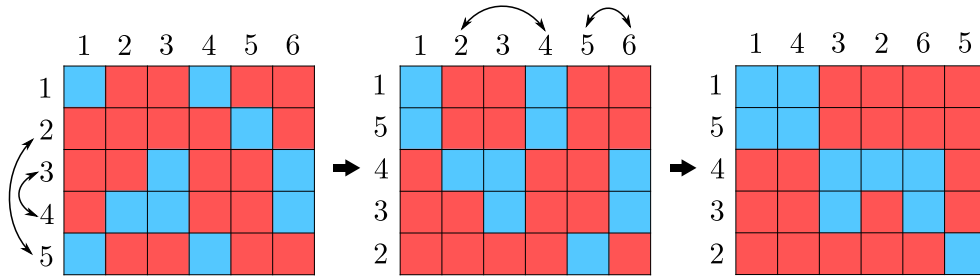


Figura 7: Do tabuleiro B ao tabuleiro T da Figura 4.

No entanto, o polinômio de torre do tabuleiro T , o mais à direita da Figura 7, já foi calculado no Exemplo 3.5. Portanto,

$$R(x, B) = R(x, T) = 8x^5 + 34x^4 + 52x^3 + 35x^2 + 10x + 1.$$

Teorema 3.8. *Sejam T um tabuleiro e q_{ij} um quadrado permitido de T .*

- Considere T_1 , obtido como uma cópia de T , na qual a única diferença é que o quadrado q_{ij} passa a ser proibido;
- Considere T_2 , obtido por deletar a linha e a coluna do quadrado q_{ij} no tabuleiro T .

Então,

$$R(x, T) = R(x, T_1) + xR(x, T_2).$$

Demonstração. Precisamos mostrar que para qualquer k , o coeficiente de x^k é igual para os dois lados da igualdade.

O coeficiente de x^k em $R(x, T)$ é igual ao número de maneiras de colocar k torres não atacantes em T , sem usar o quadrado q_{ij} mais o número de maneiras de colocar k torres não atacantes em T , usando q_{ij} todas as vezes. O número de maneiras de colocar k torres não atacantes em T , sem usar o quadrado q_{ij} , é igual a $r_k(T_1)$. O número de maneiras de distribuir k torres não atacantes em T , no qual estamos fixando uma torre no quadrado q_{ij} é igual a $r_{k-1}(T_2)$. Portanto,

$$r_k(T) = r_k(T_1) + r_{k-1}(T_2).$$

Como k foi arbitrário, obtemos o resultado. \square

Definição 3.9. *Seja T um tabuleiro $m \times n$ com posições proibidas \mathcal{F} , definimos o tabuleiro complementar de T , como o tabuleiro que tem as posições permitidas \mathcal{F} . Isto é, o que era permitido será proibido e vice-versa. De outra forma, os quadrados vermelhos ficarão azuis e os que são azuis ficarão vermelhos. Denotaremos o tabuleiro complementar de T por T^c . Observe que $(T^c)^c = T$.*

Teorema 3.10. *Seja T um tabuleiro $n \times n$, então, o número de maneiras de colocar n torres não atacantes em T é dado por:*

$$r_n(T) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot (n-k)! \cdot r_k(T^c). \quad (3.3)$$

Demonstração. Vamos usar o Princípio da Inclusão-Exclusão, portanto vamos contar o total de maneiras de colocar as torres não atacantes, sem impor restrições e retirar a quantidade de configurações que contém torres em posições proibidas.

Considere L_k , com $k = 1, 2, \dots, n$, o conjunto das distribuições de n torres não atacantes em T , na qual, a torre da linha k está em uma posição proibida. Observe que

$$r_n(T) = \# \left(\bigcup_{k=1}^n L_k \right)^c,$$

pois $\#(\bigcup_{k=1}^n L_k)$ é o número de maneiras de colocar n torres não atacantes em T de modo que pelo menos uma torre ocupe uma posição proibida. Então, o valor do conjunto complementar é o número que procuramos, $r_n(T)$.

A cardinalidade do conjunto $(\bigcup_{k=1}^n L_k)^c$ é igual ao número total de maneiras de colocar n torres não atacantes em T , ignorando as posições proibidas, menos $\#(\bigcup_{k=1}^n L_k)$, ou seja,

$$\# \left(\bigcup_{k=1}^n L_k \right)^c = n! - \# \left(\bigcup_{k=1}^n L_k \right).$$

Pelo Princípio da Inclusão-Exclusão

$$r_n(T) = n! - \sum_{k=1}^n \#L_k + \sum_{0 < k_1 < k_2 \leq n} \#(L_{k_1} \cap L_{k_2}) + \dots + (-1)^n \#(L_1 \cap \dots \cap L_n). \quad (3.4)$$

Precisamos calcular as cardinalidades dos conjuntos acima. A quantidade de elementos de L_k é o número de maneiras de colocar uma torre em uma posição proibida na linha k vezes $(n-1)!$. O total de maneiras de colocar uma torre em uma posição proibida em T é $r_1(T^c)$, logo

$$\sum_{k=1}^n \#L_k = (n-1)! \cdot r_1(T^c).$$

Analogamente, na interseção de i conjuntos, $L_{k_1} \cap \dots \cap L_{k_i}$, ficamos com $(n - i)!$ vezes $r_i(T^c)$. Portanto,

$$\begin{aligned} \sum_{0 < k_1 < k_2 \leq n} \#(L_{k_1} \cap L_{k_2}) &= (n - 2)! \cdot r_2(T^c) \\ &\vdots = \vdots \\ \sum_{0 < k_1 < \dots < k_i \leq n} \#(L_{k_1} \cap \dots \cap L_{k_i}) &= (n - i)! \cdot r_i(T^c) \\ &\vdots = \vdots \\ \#(L_1 \cap \dots \cap L_n) &= r_n(T^c). \end{aligned}$$

Fazendo as substituições na Equação (3.4), como $r_0(T^c) = 1$, concluímos a demonstração. \square

4 Aplicações

Nesta seção, iremos exibir as aplicações do método dos polinômios de torre. Começamos com o caso mais simples, que consiste na bijeção entre o número de permutações simples e o número de maneiras de colocar torres não atacantes em um tabuleiro. Usando essa ideia na construção dos tabuleiros, aumentando gradativamente a complexidade dos problemas, mostramos como calcular o número de permutações caóticas, k -posicionadas, caóticas com elementos repetidos e discordantes. Também resolvemos o problema das coincidências e o problema dos encontros. Além disso, exibimos a pujança da técnica a partir da inter-relação da parte teórica, computacional e a interativa *on-line*. Esta última pode ser acessada no QR Code:



4.1 Permutações e Polinômios de Torre

Afirmção 4.1. *Existe uma bijeção entre as permutações de $(1, 2, \dots, n)$ e as maneiras de colocar n torres não atacantes em um tabuleiro $T_{n \times n}$, sem restrições.*

Demonstração. Dada uma permutação (l_1, l_2, \dots, l_n) de $(1, 2, \dots, n)$, para cada elemento l_i , com $i = 1, 2, \dots, n$, coloque uma torre na posição (l_i, i) do tabuleiro $T_{n \times n}$.

Assim, dados dois elementos distintos, l_i e l_j , da permutação (l_1, l_2, \dots, l_n) , as torres correspondentes no tabuleiro $T_{n \times n}$ ocupam linhas e colunas distintas, pois $l_i \neq l_j$ e $i \neq j$.

Reciprocamente, podemos associar uma distribuição de n torres não atacantes em $T_{n \times n}$ da seguinte forma: para cada uma delas faça esta correlação; se uma torre ocupa a posição (i, j) , então associamos a permutação na qual o elemento i ocupa a posição j . Observe que ao analisar todas as torres, tanto os valores de i como os valores de j vão assumir cada um dos valores de 1 até n . Assim, podemos ordenar as posições das torres pelas colunas da seguinte maneira: $(l_1, 1), (l_2, 2), \dots, (l_n, n)$. É claro que $l_i \neq l_j$, se $i \neq j$, pois as torres estão em linhas distintas. Escrevendo as primeiras coordenadas sucessivamente, obtemos a permutação (l_1, l_2, \dots, l_n) , que é constituída pelos números de 1 até n em alguma ordem. Veja a Figura 8.

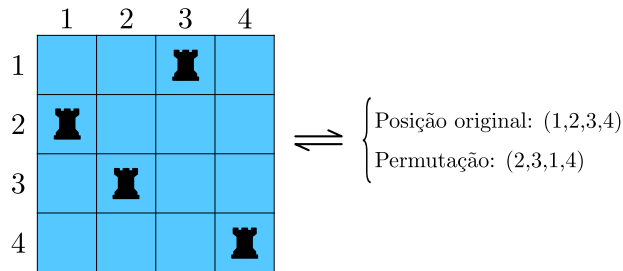


Figura 8: Distribuição de 4 torres não atacantes e a permutação correspondente.

□

Exemplo 4.2. (Visto em [11]) Qual o número de permutações de $(1,2,3,4)$ na qual, o número 1 não pode ocupar o segundo lugar, o número 2 não pode ocupar o quarto lugar e o número 3 não pode ocupar nem o primeiro nem o quarto lugar?

Solução. Como este problema envolve permutações, a ideia é usar a bijeção exibida na Afirmação 4.1. Porém, precisamos adicionar no tabuleiro as restrições impostas pelo problema. Como o elemento 1 não pode ocupar o segundo lugar, vamos deixar proibida a posição $(1, 2)$ e assim sucessivamente, até obtermos o tabuleiro T , o mais à esquerda da Figura 9. Assim, a resposta deste problema é dado pelo coeficiente líder do polinômio de torre deste tabuleiro. Pelo Teorema 3.6, o polinômio de torre de T é igual ao polinômio de torre de todos os tabuleiros da Figura 9.

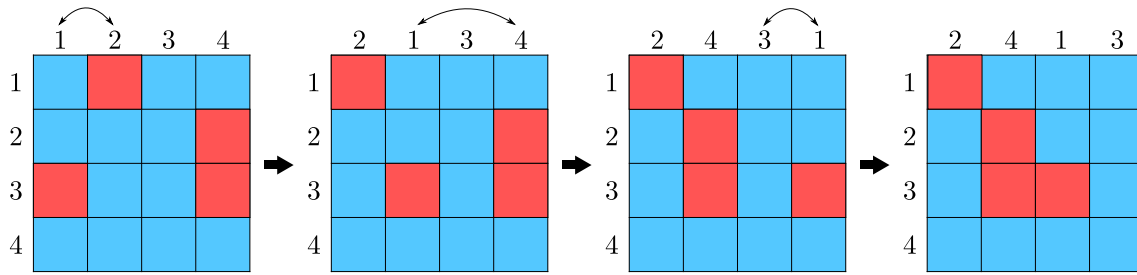


Figura 9: Tabuleiro T e permutações até o tabuleiro S .

Pelos resultados apresentados anteriormente, é mais fácil calcular o polinômio de torre do tabuleiro S , o mais à direita da Figura 9. De fato, usando o Teorema 3.10, o coeficiente líder do polinômio de torre deste tabuleiro é dado por

$$r_4(S) = \sum_{k=0}^4 (-1)^k \cdot (4 - k)! \cdot r_k(S^c). \quad (4.1)$$

Falta calcular os coeficientes do polinômio de torre de S^c .

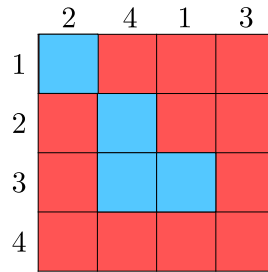


Figura 10: Tabuleiro S^c .

Pelo Teorema 3.4

$$R(x, S^c) = (x + 1)(x^2 + 3x + 1) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1. \quad (4.2)$$

Substituindo os coeficientes de (4.2) em (4.1) obtemos a solução:

$$\begin{aligned} r_4(S) &= (-1)^0(4 - 0)!1 + (-1)^1(4 - 1)!4 + (-1)^2(4 - 2)!4 + (-1)^3(4 - 3)!1 \\ &= 7. \end{aligned}$$

Usando o SageMath, com o bloco de códigos a seguir, obtemos o polinômio de torre do tabuleiro T , cujo coeficiente líder é a resposta do problema.

```

1 B = matrix([[1,0,1,1],[1,1,1,0],[0,1,1,0], [1,1,1,1]])
2 v = B.rook_vector()
3 R = PolynomialRing(ZZ, 'x')
4 show(R(v))

```

$$7x^4 + 39x^3 + 40x^2 + 12x + 1$$

Com o polinômio obtido, além de descobrirmos que 7 é o número de maneiras de colocar 4 torres no tabuleiro T , o polinômio também informa que 39, 40, 12 e 1 são os números de maneiras de colocar 3, 2, 1 e 0 torres no tabuleiro T .

4.2 Permutações Caóticas

O primeiro problema famoso associado à permutações caóticas é “O Problema das Cartas Mal Endereçadas” que está relacionado a matemáticos ilustres, tanto na proposição quanto na resolução, como Pierre Raymond de Montmort (1678-1719) e Nicolas Bernoulli (1687-1759). Outro grande matemático que se deparou com este problema foi Leonhard Euler (1707-1783), que publicou a solução em seu artigo intitulado “Calcul de la probabilité dans le jeu de rencontre” [14], cuja tradução para o inglês pode ser encontrada em [15].

Definição 4.3. *Uma permutação caótica, ou desarranjo, dos elementos $1, 2, \dots, n$, é uma permutação, na qual, o elemento 1 não pode ocupar a 1^{a} posição, o elemento 2 não pode ocupar a 2^{a} posição e assim por diante, até que o elemento n não possa ocupar a n^{a} posição.*

Por exemplo, para $n = 5$, $(2, 1, 4, 5, 3)$ e $(5, 4, 1, 2, 3)$ são permutações caóticas. Existem várias maneiras, bem conhecidas, de encontrar o número de permutações caóticas para um determinado valor de n . Os mais comuns são usando o princípio da Inclusão-Exclusão e relações de recorrências. Podemos também determiná-las, com polinômios de torre, utilizando o que desenvolvemos até aqui.

Exemplo 4.4. Quantas são as permutações caóticas dos elementos 1, 2, 3, 4, 5?

Solução. Fixando $n = 5$, perceba que calcular a quantidade de permutações caóticas neste caso é o mesmo que calcular o coeficiente de x^5 do tabuleiro T , a seguir:

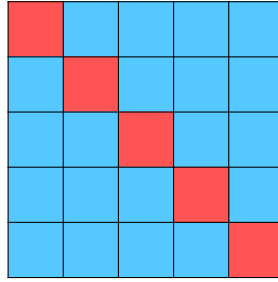


Figura 11: Tabuleiro T , relacionado à permutação caótica para $n = 5$.

Esse é um bom exemplo de aplicação do Teorema 3.10, pois é difícil calcular diretamente o polinômio de torre de T , mas o polinômio de torre do seu tabuleiro complementar conseguimos calcular da seguinte forma:

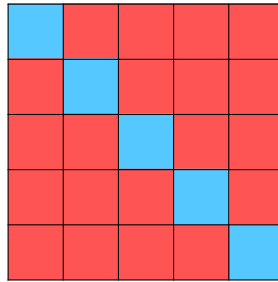


Figura 12: Tabuleiro T^c , complementar ao tabuleiro da Figura 11.

Como o polinômio de torre de um tabuleiro constituído de um único quadrado é dado por $(1 + x)$, usando o Teorema 3.4, o polinômio de torre de T^c é dado por

$$R(x, T^c) = (1 + x)^5 = 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5 = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} x^k.$$

E utilizando o Teorema 3.10 temos

$$r_5(T) = \sum_{k=0}^5 (-1)^k (5 - k)! r_k(T^c) = \sum_{k=0}^5 (-1)^k (5 - k)! \binom{5}{k} = \sum_{k=0}^5 (-1)^k \frac{5!}{k!} = 44.$$

De forma totalmente análoga, ao que foi feito acima, podemos fazer o caso geral.

Lema 4.5. *O tabuleiro T , que tem casas permitidas apenas na diagonal principal e as demais são todas proibidas, tem polinômio de torre igual a*

$$R(x, T) = (1 + x)^n = \sum \binom{n}{j} x^j.$$

Demonstração. Observe que T pode ser dividido em n subtabuleiros 1×1 disjuntos. Cada subtabuleiro T_i possui o seguinte polinômio de torre $R(x, T_i) = (1 + x)$, pelo Teorema 3.4 temos

$$R(x, T) = R(x, T_1) \cdot R(x, T_2) \cdots R(x, T_n) = (1 + x)^n = \sum \binom{n}{j} x^j.$$

□

Observação 4.6. Convidamos o leitor a redemonstrar a afirmação acima usando o Teorema 3.8.

Teorema 4.7. *A quantidade de permutações caóticas de n elementos é*

$$D_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k!}.$$

Demonstração. Perceba que $D_n = r_n(T)$, no qual, T é um tabuleiro $n \times n$ com os quadrados da diagonal principal na cor vermelha e os demais quadrados na cor azul, assim como na Figura 11, para o caso $n = 5$. D_n pode ser calculado utilizando o Teorema 3.10, pois $r_n(T) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot (n - k)! \cdot r_k(T^c)$, pelo Lema 4.5 temos $r_k(T^c) = \binom{n}{k}$, então

$$r_n(T) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot (n - k)! \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k!}.$$

Como queríamos. □

O bloco de código a seguir possui uma função implementada em Sage para calcular D_n . Essa função calcula o coeficiente líder do polinômio de torre da matriz complementar à matriz identidade. Abaixo, calculamos D_5 , para calcular D_n para qualquer inteiro n , substitua o valor 5 da linha 5 do bloco de código abaixo.

```

1 def D(n):
2     B = matrix.identity(n)
3     v = B.rook_vector(complement=True)
4     return v[n]
5 D(5)

```

Tabela com o número de permutações caóticas com n variando de 1 até 11.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
D_n	0	1	2	9	44	265	1854	14833	133496	1334961	14684570

Tabela 1: Valores de D_n .

Corolário 4.8. *As permutações dos elementos $1, 2, \dots, n$, na qual, k elementos estão em suas posições originais são chamadas de permutações com k pontos fixos. O número de permutações com k pontos fixos é denotado por $D_{n,k}$ e pode ser calculado usando a expressão de D_n da seguinte maneira:*

$$D_{n,k} = \binom{n}{k} \cdot D_{n-k}.$$

Demonstração. Observe que os k elementos, que ficarão em suas posições originais, podem ser escolhidos de $\binom{n}{k}$ maneiras. Uma vez que essas escolhas foram feitas, os $n - k$ elementos precisam ocupar posições diferentes de suas posições originais, isto pode ser feito de D_{n-k} maneiras. Portanto, $D_{n,k} = \binom{n}{k} \cdot D_{n-k}$. \square

Exemplo 4.9 (O Problema das Coincidências). Considere uma urna contendo 20 bolas numeradas de 1 até 20 e suponha que todas as bolas são sucessivamente retiradas uma após a outra, sem reposição. Quando a j -ésima bola é sorteada na j -ésima retirada, $j = 1, 2, \dots, n$, dizemos que houve uma *coincidência*. Calcule o número de maneiras de retirar 20 bolas sem reposição, que resultem em 14 coincidências.

Solução. Ao anotar os números obtidos pela remoção sucessiva das 20 bolas, um após o outro, separando-os por vírgula, obtemos uma permutação dos elementos $1, 2, \dots, 20$. Observe que para cada coincidência do sorteio, temos um ponto fixo na permutação. Portanto, o número de sorteios de 20 bolas que possuem 14 coincidências é

$$D_{20,14} = \binom{20}{14} \cdot D_6 = 10271400.$$

Devido ao exemplo anterior, o número $D_{n,k}$ também é conhecido como o número de coincidências. No bloco de código a seguir, temos uma implementação em Sage para calcular $D_{n,k}$. A função está predefinida com $k = 0$ e na linha 14 calculamos $D_{20,14}$.

```

1 def D(n, k=0):
2     P(i) = factorial(i)
3     C(i,j) = binomial(i,j)
4     s = sum((-1)^x/P(x), x, 0, n-k)
5     return C(n,k)*P(n-k)*s
6 D(20,14)

```

10271400

Tabela com o número de permutações com k pontos fixos, (ou o número de coincidências) com n variando de 1 até 9 e k variando de 1 até 9.

$n \setminus k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0
3	3	0	1	0	0	0	0	0	0
4	8	6	0	1	0	0	0	0	0
5	45	20	10	0	1	0	0	0	0
6	264	135	40	15	0	1	0	0	0
7	1855	924	315	70	21	0	1	0	0
8	14832	7420	2464	630	112	28	0	1	0
9	133497	66744	22260	5544	1134	168	36	0	1

Tabela 2: Valores de $D_{n,k}$.

4.3 Permutações k -Posicionadas

No artigo [15], Leonard Euler está interessado em achar a solução do problema “Cálculo da Probabilidade no Jogo do Duelo”, ao longo do mesmo, ele encontra a solução das permutações caóticas e das permutações k -posicionadas. Na página 6 do artigo pode ser encontrada uma tabela nomeada “NUMBER OF CARDS”, cujos valores estão contidos na Tabela 3, a seguir, contendo o número de soluções das permutações k -posicionadas para alguns valores de n e k . Apesar desse tipo de permutação não ser muito difundido, podemos resolver problemas interessantes de permutações, na qual, apenas algumas posições originais são proibidas, veja o Exemplo 4.12.

Definição 4.10. *Uma permutação dos elementos $1, 2, \dots, n$; é chamada de permutação k -posicionada se o k -ésimo elemento está na posição k , os elementos anteriores não*

estão em suas posições originais e os demais elementos podem ocupar qualquer posição. O número de permutações k -posicionadas é denotado por $R_{n,k}$ (ver [3]). Por convenção, chamamos de permutação $(n + 1)$ -posicionada quando nenhum elemento está em sua posição original.

Teorema 4.11. *O número de permutações k -posicionadas de n elementos é dado por*

$$R_{n,k} = \begin{cases} \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \cdot (n-1-i)! \cdot \binom{k-1}{i}, & \text{se } k \leq n; \\ D_n, & \text{se } k=n+1. \end{cases}$$

Demonstração. Para $k = n + 1$, podemos ver que $R_{n,k} = D_n$. Para $k \leq n$, o tabuleiro T , relacionado ao problema, será $n \times n$. Pela definição de permutação k -posicionada, as posições (i, i) , com $i \in \{1, 2, \dots, k - 1\}$ são proibidas e a posição (k, k) deve conter uma torre. Portanto, $R_{n,k}$ é o número de maneiras de colocar n torres não atacantes no tabuleiro T , localizado no lado esquerdo da Figura 13, com uma torre na posição (k, k) . Seja S o tabuleiro localizado no lado direito da Figura 13, obtido por deletar a linha k e a coluna k do tabuleiro T .

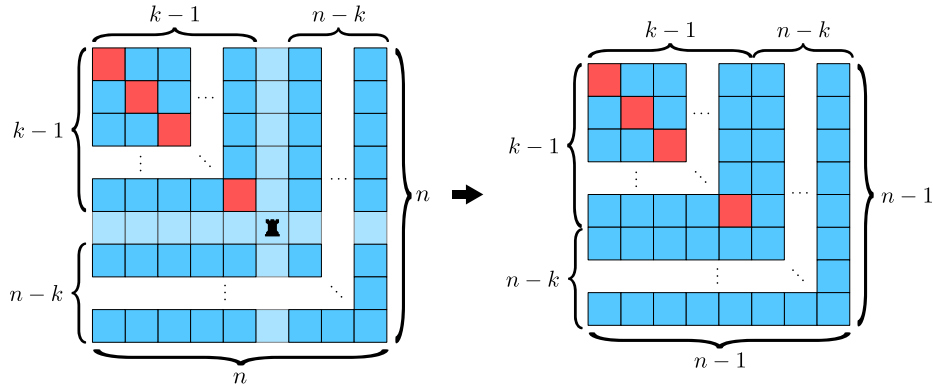


Figura 13: Tabuleiros T e S .

Pela construção de S , $R_{n,k}$ também pode ser calculado como o número de maneiras de colocar $n - 1$ torres não atacantes no tabuleiro S . Usando o Teorema 3.10, isto pode ser calculado da seguinte maneira

$$r_{n-1}(S) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \cdot (n-1-i)! \cdot r_k(S^c). \tag{4.3}$$

O polinômio de torre de S^c é dado por

$$R(x, S^c) = (1 + x)^{k-1} = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} x^i. \quad (4.4)$$

Como os coeficientes de $R(x, S^c)$ são iguais a zero para x^i , com $i > k - 1$, substituindo os coeficientes da Equação (4.4) na Equação (4.3) obtemos

$$r_{n-1}(S) = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \cdot (n-1-i)! \cdot \binom{k-1}{i}.$$

Como queríamos. □

Exemplo 4.12. Quantas são as permutações dos elementos $1, 2, 3, \dots, 9$, na qual, nenhum número ímpar ocupa o seu lugar primitivo?

Solução. Observe que o tabuleiro relacionado ao problema será 9×9 com as posições proibidas (i, i) , tais que, $i \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Essas posições podem ser reorganizadas para ficarmos com um tabuleiro como o do lado direito da Figura 13, com $n - 1 = 9$ e $k - 1 = 5$. Portanto, a resposta é dada por

$$\begin{aligned} R_{10,6} &= \sum_{i=0}^5 (-1)^i \cdot (10-1-i)! \cdot \binom{6-1}{i} \\ &= 9! \cdot 1 - 8! \cdot 5 + 7! \cdot 10 - 6! \cdot 10 + 5! \cdot 5 - 4! \cdot 1 \\ &= 205056. \end{aligned}$$

O código Sage a seguir calcula $R_{n,k}$ usando polinômios de torre.

```

1 def R(n,k):
2     if n>=k:
3         B = matrix.ones(n-1)
4         for i in range(k-1):
5             B[i,i] = 0
6         v = B.rook_vector()
7         return v[n-1]
8     elif k==n+1:
9         B = matrix.identity(n)
10        v = B.rook_vector(complement=True)
11        return v[n]
```

```

12     else:
13         return 0
14 R(10,6)

```

205056

O código Sage a seguir calcula $R_{n,k}$ usando o Teorema 4.11.

```

1 def R(n,k):
2     P(m) = factorial(m)
3     C(j,l) = binomial(j,l)
4     var('i')
5     if k<=n:
6         return sum((-1)^i*P(n-1-i)*C(k-1,i), i, 0, k-1)
7     elif k==n+1:
8         return P(n)*sum((-1)^i/P(i), i, 0, n)
9     else:
10        return 0
11 R(10,6)

```

205056

Tabela com o número de permutações k -posicionadas com n variando de 1 até 8 e k variando de 1 até 9.

$n \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	1	0	0	0	0	0	0
3	2	1	1	2	0	0	0	0	0
4	6	4	3	2	9	0	0	0	0
5	24	18	14	11	9	44	0	0	0
6	120	96	78	64	53	44	265	0	0
7	720	600	504	426	362	309	265	1854	0
8	5040	4320	3720	3216	2790	2428	2119	1854	14833

Tabela 3: Valores de $R_{n,k}$.

4.4 Permutações Caóticas com Elementos Repetidos

Apesar das permutações caóticas serem um tópico bastante comum em disciplinas de combinatória, este tipo de permutação com elementos repetidos é bem pouco difundido. Acreditamos que seja devido ao aumento na dificuldade para resolvê-lo. Usando polinômios de torre, a resolução desse tipo de problema fica fácil de ser compreendida e apesar das contas ficarem grandes é possível fazer uma implementação simples em SageMath. Para outra referência que trata desse tópico em português, veja [6].

Definição 4.13. *Uma permutação caótica com elementos repetidos é uma permutação na qual os elementos nem podem ocupar suas posições originais, nem as posições dos seus elementos repetidos.*

Exemplo 4.14. Quantos são as permutações caóticas com repetições da palavra POLINÔMIO? Estamos supondo que O e Ô são letras iguais.

Solução. O tabuleiro correspondente à palavra POLINOMIO é dado pelo tabuleiro T , o mais à esquerda da Figura 14. Permutando as linhas e colunas indicadas na Figura 14, obtemos o tabuleiro S , o mais à direita da figura, o qual possui o mesmo polinômio de torre, pelo Teorema 3.6.

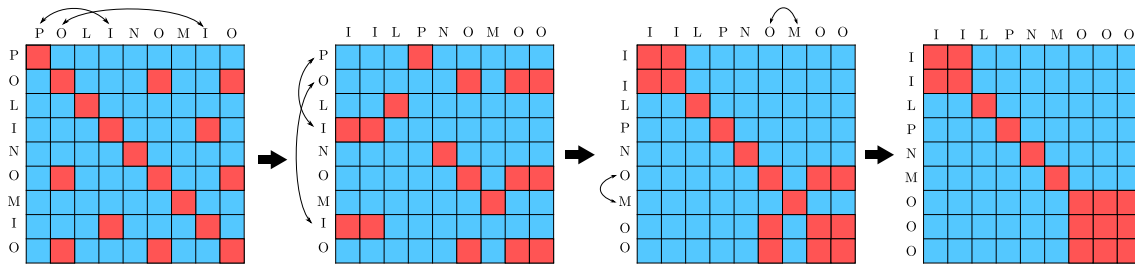


Figura 14: Tabuleiros da palavra POLINOMIO até a palavra IILPNMOOO.

O número de maneiras de ordenar as letras da palavra POLINOMIO, sem que as letras fiquem em suas posições originais, pensando como se todas as letras fossem distintas, é $r_9(S)$. Como existem letras repetidas, para contornar este problema de contagem, dividimos $r_9(S)$ pelo número de maneiras de permutar as letras I e as letras O. Portanto, o número de permutações caóticas com repetição da palavra POLINOMIO é dado por $\frac{r_9(S)}{2!3!}$. Para obter a resposta, ainda precisamos calcular $r_9(S)$. Pelo Teorema 3.10, temos

$$r_9(S) = \sum_{k=0}^9 (-1)^k \cdot (9 - k)! \cdot r_k(S^c), \tag{4.5}$$

e

$$\begin{aligned} R(x, S^c) &= (2x^2 + 4x + 1)(x + 1)^4(6x^3 + 18x^2 + 9x + 1) \\ &= 12x^9 + 108x^8 + 408x^7 + 848x^6 + 1065x^5 + 833x^4 + 402x^3 + 114x^2 + 17x + 1. \end{aligned}$$

Substituindo os coeficientes de $R(x, S^c)$ na Equação (4.5) obtemos $r_9(S) = 41328$. Assim, o número de permutações caóticas das letras da palavra POLINOMIO é

$$\frac{r_9(S)}{2!3!} = \frac{41328}{2!3!} = 3444.$$

A função `permutacao_caotica_r`, definida no bloco de códigos a seguir, calcula o número de permutações caóticas com repetições de um texto. Para usar a função é necessário informar o texto em formato de *string*, ou seja, entre aspas, conforme a linha 23 do bloco do código.

```

1 def permutacao_caotica_r(texto):
2
3     l=[]
4     for i in range(len(texto)):           # determina
5         for j in range(len(texto)):       # as
6             if texto[i]==texto[j]:       # posições
7                 l.append((i,j))           # proibidas
8
9     tamanho=len(texto)                     # constroi
10    T = matrix.ones(tamanho, tamanho)      # matriz T
11
12    for i in l:                             # coloca
13        T[i[0], i[1]] = 0                 # restrições em T
14
15    temp = copy(texto)                       # conta
16    temp = set(temp)                         # o
17    deno=1                                    # número
18    for i in temp:                           # de
19        deno = deno*factorial(texto.count(i)) # repetições
20
21    v = T.rook_vector()
22    return v[-1]/deno
23
24 permutacao_caotica_r('POLINOMIO')
```

3444

4.5 Permutações Discordantes

Vamos agora apresentar as permutações discordantes, que são uma generalização de permutações caóticas e que têm várias aplicações como: Enumeração de quadrados latinos $3 \times n$, problema dos encontros (Problème des Ménages), matrizes unimodulares, dentre outros. Para mais informações, veja [13].

Definição 4.15. *As permutações discordantes são as permutações de tamanho n nas quais a k -ésima posição tem como elementos proibidos k e $k + 1$. E para a n -ésima posição, tem como elementos proibidos n e 1 .*

A expressão permutação discordante vem da ideia de que ela “discorda” das permutações $(1, 2, \dots, n)$ e $(2, 3, \dots, n, 1)$. Assim, também é comum na literatura encontrarmos a expressão permutações 1-discordantes para permutações caóticas, o que aqui chamamos de permutações discordantes seriam permutações 2-discordantes.

Teorema 4.16. *O número de permutações 2-discordantes de n elementos distintos é*

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot (n-k)! \cdot \frac{2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k}.$$

Demonstração. Observe que o tabuleiro B , associado às permutações 2-discordantes de n elementos, é dado por:

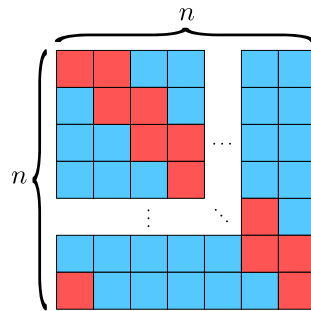


Figura 15: Tabuleiro B .

A quantidade de permutações discordantes será determinada pelo coeficiente líder do polinômio de torre do tabuleiro B . Todavia, não procederemos com o cálculo direto do polinômio de torre desse tabuleiro. Calcularemos o polinômio do tabuleiro complementar e depois usaremos o Teorema 3.10 para obter $r_n(B)$. O tabuleiro complementar a B é o tabuleiro B^c que possui como conjunto de posições permitidas o conjunto $\{(i, i); (i, i + 1) \pmod{n} \mid 1 \leq i \leq n\}$. Como podemos observar na figura:

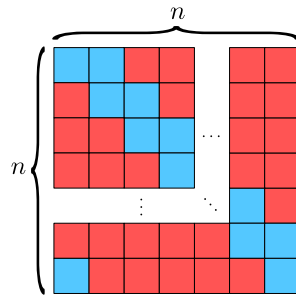


Figura 16: Tabuleiro B^c .

Para calcular o polinômio de torre do tabuleiro B^c , iremos aplicar o Teorema 3.8 sobre o quadrado mais deslocado à esquerda, o de posição $(n, 1)$. Portanto $R(x, B^c) = R(x, B_1) + xR(x, B_2)$, no qual, B_1 é o tabuleiro obtido trocando a cor do quadrado q_{n1} do tabuleiro B^c e B_2 é o tabuleiro obtido por deletar a linha n e a coluna 1 do tabuleiro B^c , ou seja, o tabuleiro do lado direito da Figura 17.

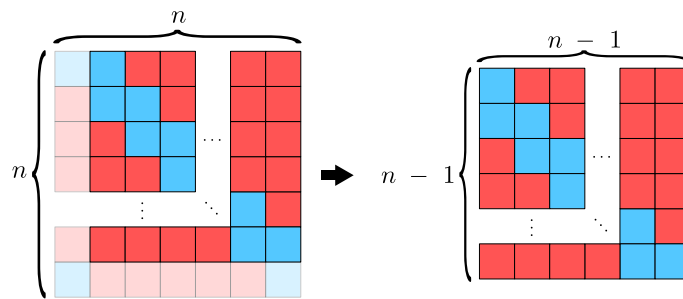


Figura 17: Tabuleiro B_2 , obtido por deletar a linha n e a coluna 1 do tabuleiro B^c .

Precisamos determinar os polinômios de torre dos tabuleiros B_1 e B_2 . Começamos calculando o polinômio de B_1 , dado pela Figura 18.

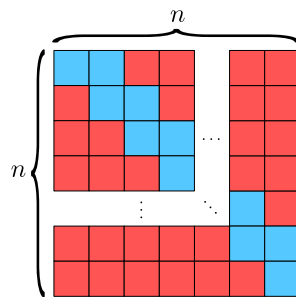


Figura 18: Tabuleiro B_1 .

Note que podemos associar (exibir uma bijeção) entre essa faixa diagonal das posições permitidas de B_1 e uma fila com a mesma quantidade de quadrados:



Figura 19: Fila com $2n - 1$ quadrados, associada às posições permitidas de B_1 .

Com essa associação, o problema de distribuir k torres em B_1 , com $m = 2n - 1$, blocos na diagonal principal e na diagonal exatamente acima da principal, é equivalente ao problema de distribuir k pessoas em m cadeiras em fila, de modo que duas pessoas não sentem lado a lado.

Essa associação reduz drasticamente a dificuldade do nosso problema. Para tanto, das m cadeiras, retiramos k , para em seguida recolocá-las com as pessoas. Se foram retiradas k cadeiras, de um total de m , ficaram $m - k$ cadeiras e $m - k - 1$ espaços entre as cadeiras. Como as cadeiras com as pessoas podem ser colocadas antes da primeira cadeira vazia, ou depois da última cadeira vazia, ficamos com $m - k + 1$ possíveis lugares para escolher k . Isto pode ser feito de $\binom{m-k+1}{k}$ maneiras.

Concluimos que o polinômio do tabuleiro B_1 é

$$R(x, B_1) = \sum_{k=0}^{\lceil m/2 \rceil} \binom{m-k+1}{k} x^k,$$

na qual $\lceil m/2 \rceil$ significa o teto de $m/2$. Observe que o cálculo do polinômio de torre de B_2 pode ser feito de maneira análoga ao que foi feito para B_1 , porém para o caso de B_2 , $m = 2n - 3$. Pelo exposto acima

$$R(x, B_1) = \sum_{k=0}^n \binom{2n-k}{k} x^k \quad \text{e} \quad R(x, B_2) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-2-k}{k} x^k.$$

Consequentemente:

$$\begin{aligned} R(x, B^c) &= R(x, B_1) + xR(x, B_2) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{2n-k}{k} x^k + x \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-2-k}{k} x^k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n \binom{2n-k}{k} x^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-2-k}{k} x^{k+1} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n \binom{2n-k}{k} x^k + \sum_{k=1}^n \binom{2n-1-k}{k-1} x^k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k} x^k \\
&= \sum_{k=0}^n \frac{2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k} x^k.
\end{aligned}$$

Assim, aplicando o Teorema 3.10, temos

$$r_n(B) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot (n-k)! \cdot \frac{2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k}.$$

Como queríamos. □

Perceba que podemos ter uma generalização natural do que acabamos de fazer. Por exemplo, as permutações 3-discordantes são as permutações que não têm como imagem nenhum elemento com a mesma imagem das permutações $(1, 2, \dots, n)$, $(2, 3, \dots, n, 1)$ e de $(3, 4, \dots, n, 1, 2)$. De modo análogo, podemos definir permutações 4-discordantes, 5-discordantes etc. Abaixo, listamos as expressões das permutações k -discordantes para alguns valores de k :

- Permutação 0 - discordantes $\rightarrow n!$;
- Permutação 1 - discordante $\rightarrow \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \frac{n!}{k!}$;
- Permutação 2 - discordante $\rightarrow \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot (n-k)! \cdot \frac{2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k}$;
- Permutação 3 - discordante $\rightarrow \sum_{i=0}^n (-1)^i (n-i)! g(3, n, i)$;

$$\text{No qual } g(3, n, i) = \sum_{\alpha=0}^{\lfloor i/2 \rfloor} \sum_{\beta=0}^m \frac{n}{n-i} 2^\beta \binom{n+\alpha-i-1}{\alpha} \binom{n-i}{\beta} \binom{n-\alpha-1}{i-2\alpha-\beta},$$

$$\text{para } 0 \leq i < n \text{ e } g(3, n, n) = 3 + \sum_{\alpha=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n}{\alpha} \binom{n-\alpha-1}{\alpha-1}. \text{ Com } m = \min(n-i, i-2\alpha).$$

Podemos observar o crescimento da complexidade das fórmulas para o número de permutações k -discordantes, conforme o aumento do valor de k . Convidamos o leitor a pensar nos benefícios e dificuldades em exibir uma fórmula fechada em termos de n

e k , em vez de sua implementação computacional. Sugerimos como ponto de partida para essa atividade os questionamentos suscitados nos Exemplos 1.1.3 e 1.1.4 em [9].

Abaixo, deixamos nossa implementação em Sage para i e n arbitrários.

```

1 def i_discordante(i, n):
2     A = matrix.ones(n,n)           # matriz com entradas 1
3     for j in range(n):           # variando em n
4         for k in range(i):       # variando em i
5             A[j, (k+j)%n] = 0    # colocando 0 nas posições necessárias
6
7     s = A.rook_vector()          # cálculo do polinômio de torre
8     if len(s)==n+1:              # verificando coeficiente de  $x^n$ 
9         return s[n]
10    else:
11        return 0
12
13 i_discordante(2,7)

```

579

Tabela dos valores i -discordantes com i e n variando de 1 até 9.

$n \setminus i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	2	1	0	0	0	0	0	0	0
4	9	2	1	0	0	0	0	0	0
5	44	13	2	1	0	0	0	0	0
6	265	80	20	2	1	0	0	0	0
7	1854	579	144	31	2	1	0	0	0
8	14833	4738	1265	264	49	2	1	0	0
9	133496	43387	12072	2783	484	78	2	1	0

Tabela 4: Número de permutações i -discordantes.

4.6 O Problema dos Encontros

O Problema dos Encontros, também é conhecido como *Problème des Ménages*, é um problema clássico da combinatória enumerativa. Proposto pelo matemático francês

Edouard Lucas em 1891, foi estudado (e redescoberto) por nomes de peso, como Cayley, Muir e Tait, os quais deram soluções parciais (ver [7]). Sendo completamente resolvido, mais de 50 anos depois, pelo matemático canadense Irving Kaplansky, em 1943. Ao longo dos anos, diversas soluções foram apresentadas, via relações de recorrência, princípio da Inclusão-Exclusão dentre outras, uma das mais elegantes que conhecemos é a que utiliza polinômios de torres. Nesta seção, mostramos como resolvê-lo usando as técnicas já apresentadas.

Exemplo 4.17 (O Problema dos Encontros). Tem-se n casais ($n > 1$) que devem se sentar em $2n$ cadeiras diferentes, em torno de um círculo, de modo que pessoas do mesmo sexo não sentem juntas e que nenhum homem sente ao lado de sua mulher. De quantos modos isso pode ser feito?

Solução. Para resolver esse problema, iniciamos colorindo as $2n$ cadeiras com duas cores de forma alternada, ou seja, a cor de cada cadeira deve ser diferente da cor dos dois vizinhos, assim como na Figura 20. Isto sempre é possível, pois a quantidade de cadeiras é par.

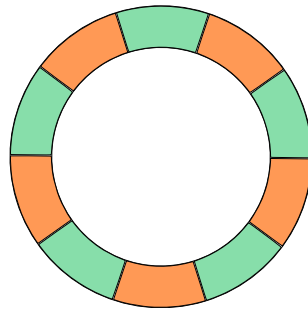


Figura 20: Colorindo as cadeiras.

Para que pessoas do mesmo sexo não sentem juntas, basta escolher uma cor para as cadeiras de cada sexo, isto pode ser feito de dois modos. Feita essa escolha, podemos distribuir as mulheres de $n!$ maneiras, isto é, livremente, nas n cadeiras reservadas a elas. Resta apenas contar o número de maneiras de distribuir os homens de modo que nenhum deles sente ao lado da sua esposa. Ou seja, o que fizemos até aqui nos diz que a solução do problema dos encontros é dado por:

$$E_n = 2 \cdot n! \cdot A_n, \quad (4.6)$$

no qual, A_n é a quantidade de modos de distribuir os homens sem que nenhum deles sente ao lado da sua respectiva esposa.

Sem perda de generalidade, colocamos as mulheres nos lugares verdes. Supondo que as pessoas sentam de frente à mesa, vamos considerar os lados esquerdo e direito em relação a posição de cada pessoa. Observe que fixada uma mulher dessa distribuição, podemos chamá-la de mulher M_1 , e a mulher seguinte à sua esquerda, de mulher M_2 e assim por diante, até a mulher M_n .

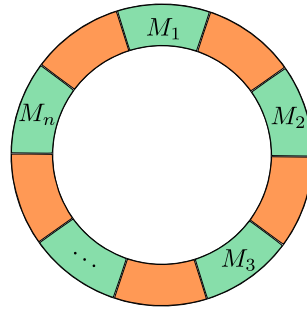


Figura 21: Mulheres sentadas nos lugares verdes.

Vamos nomear os lugares vazios da seguinte forma: a primeira cadeira vazia à direita da mulher M_1 , chamaremos de posição P_1 , e a da esquerda, de posição P_2 e assim sucessivamente, até que a mulher M_n tenha a sua direita a posição P_n e a sua esquerda a posição P_1 , como na figura a seguir:

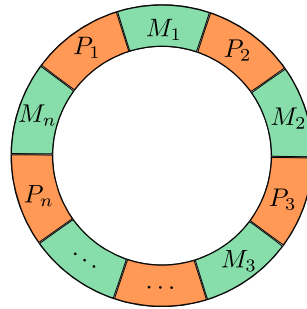


Figura 22: Distribuições das Mulheres M_i 's e as relativas posições P_i 's.

Dessa forma, o homem H_1 , esposo da mulher M_1 , não pode sentar nas cadeiras de posições P_1 e P_2 , o homem H_2 não pode sentar nas cadeiras de posições P_2 e P_3 e assim sucessivamente até que o homem H_n não possa sentar nas cadeiras de posições P_n e P_1 , pois estamos num círculo.

Existe uma bijeção entre as posições permitidas/proibidas na mesa e o tabuleiro relativo às permutações 2-discordantes, visto na Figura 15. Para ilustrar essa bijeção

escrevemos as posições P_1, \dots, P_n nas colunas e H_1, \dots, H_n nas linhas do tabuleiro. Para cada $H_i, i = 1, \dots, n$; observamos as cadeiras proibidas e pintamos de vermelho as respectivas posições proibidas na linha de H_i , conforme a Figura 23 abaixo.

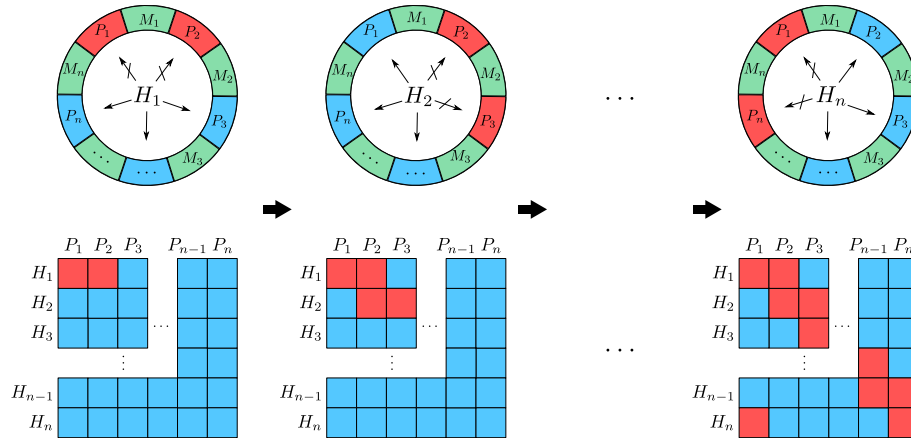


Figura 23: Bijeção entre tabuleiro e mesa.

Assim, A_n é o número de permutações 2-discordantes para n elementos, ou seja, pelo Teorema 4.16 temos

$$A_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot (n - k)! \cdot \frac{2n}{2n - k} \binom{2n - k}{k}. \quad (4.7)$$

Com isso, substituindo (4.7) em (4.6), a solução do problema dos encontros é:

$$E_n = 2 \cdot n! \cdot \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot (n - k)! \cdot \frac{2n}{2n - k} \binom{2n - k}{k}. \quad (4.8)$$

Observe que a solução apresentada acima considera que duas soluções, na qual, uma pode ser obtida a partir da rotação da outra, são distintas.

Usando a função `i_discordante` definida anteriormente, podemos definir uma nova função `menages` da seguinte maneira:

```

1 def menages(n):
2     return 2*factorial(n)*i_discordante(2, n)
3 menages(5)
    
```

Podemos escrever uma outra função que faz o cálculo diretamente pela fórmula da Equação (4.8), conforme o código a seguir:

```

1 def menages(n):
2     var('k')
3     P(i) = factorial(i)
4     C(i,p) = binomial(i,p)
5     m = sum((-1)^k*((2*n)/(2*n-k))*C(2*n-k, k)*(P(n-k)), k, 0, n)
6     return 2*P(n)*m
7 menages(5)

```

3120

Tabela dos valores de E_n com n variando de 2 até 9.

n	2	3	4	5	6	7	8	9
E_n	0	12	96	3120	115200	5836320	382072320	31488549120

Tabela 5: Valores de E_n .

5 Considerações Finais

Polinômios de torre estão relacionados à teoria de funções geradoras, uma teoria bastante difundida, cuja pesquisa continua ativa. Para os leitores interessados em prosseguir com estudos, recomendamos as referências [9, 10, 16].

Outro viés dos polinômios de torre que não foi abordado neste artigo, é que o mesmo pode ser utilizado na teoria de alocações de tarefas, que pode ser visto em [1].

Por fim, esperamos que os leitores aproveitem o material complementar, com as implementações e o conteúdo interativo, disponível *on-line* através do QR Code que se encontra na Introdução (Seção 1) ou no início de Seção 4.

Agradecimentos

Ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco - UFRPE, pelo excelente ambiente de trabalho, com a valorização do amplo espectro que uma vida acadêmica pode ter. Nossos sinceros agradecimentos!

Referências

- [1] Allenby, Reginald BJT; Slomson, Alan. **How to count: An introduction to combinatorics**. Chapman and Hall/CRC, 2010.
- [2] Bryant, Victor. **Aspects of Combinatorics: A wide-ranging introduction**. Cambridge University Press, 1993.
- [3] Charalambos, A. C. **Enumerative combinatorics**. Chapman & Hall/CRC, 2002.
- [4] Holton, Derek Allan. **A second step to mathematical olympiad problems**. World scientific, 2011.
- [5] Kilkelly, Thomas. **The ARML Power Contest**. American Mathematical Soc., 2015.
- [6] Machado, Ricardo N. Jr. **Caos, Repetições e Tabuleiros**. É matemática, Oxente! o jornal de matemática olímpica, N^o18, vol. 1, 2021, pp 1 - 7.
- [7] Riordan, John. **An introduction to combinatorial analysis**. Princeton University Press, 2014.
- [8] Silva, L. D.; Santos, M. P.; Machado J. R. N., **Elementos de Computação Matemática com SageMath**, SBM, 2019.
- [9] Stanley, Richard P.,. **Enumerative Combinatorics, Vol. 1**, second edition. Cambridge studies in advanced mathematics, 2011.
- [10] Stanley, Richard P.; FOMIN, S. **Enumerative combinatorics. Vol. 2**, volume 62 of. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 1999.
- [11] StackExchange. **Use of rook polynomials**. <https://math.stackexchange.com/questions/956459/use-of-rook-polynomials>. Acessado em 23/11/2021.
- [12] Boelkins, M.; Nordstrom, J.F., **PreTeXt - The Future Of Textbooks**. Disponível em http://digitaleditions.walsworthprintgroup.com/publication/?i=638453&article_id=3546966&view=articleBrowser&ver=html5. Acessado em 23/11/2021.
- [13] Oeis, **Number of discordant permutations of length n**. Disponível em <https://oeis.org/A000183>. Acessado em 22/02/2022.

- [14] Euler, L.: **Calcul de la probabilité dans le jeu de rencontre.** Euler Archive - All Works, University of the Pacific Scholarly Commons. Disponível em <https://scholarlycommons.pacific.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1200&context=euler-works>. Acessado em 13/04/2022.
- [15] Euler, L.: **Calculus of the probability in the game of Rencontre.** Disponível em <https://scholarlycommons.pacific.edu/cgi/viewcontent.cgi?filename=0&article=1200&context=euler-works&type=additional>. Acessado em 13/04/2022.
- [16] Wilf, H. S., **Generatingfunctionology.** CRC press, 2005.

Submetido em 29 de Abril de 2022.

Aceito em 19 de Outubro de 2022.