Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática

https://doi.org/10.34179/revisem.v8i1.16537

TEOREMA DA DISTRIBUIÇÃO UNIFORME DE SEQUÊNCIAS

Marcelo F. de Almeida[1]
Universidade Federal de Sergipe, Departamento de Matemática,
marcelo@mat.ufs.br

José Túlio Vinícius Prado Cruz[2]
Universidade Federal de Sergipe - Departamento de Matemática,
tulioprado@academico.ufs.br

Resumo

Nestas notas o nosso objetivo é provar um teorema famoso de teoria dos números, chamado teorema da equidistribuição de Weyl, usando técnicas de análise matemática. Mais precisamente, usando a equivalência

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\chi_{(a,b)}(k\gamma)\to\int_{\mathbb{R}}\chi_{(a,b)}(x)\,dx \text{ quando } n\to\infty \quad \text{se e somente se} \quad \gamma\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\,,$$

provamos que a sequência das partes fracionárias $(\{n\gamma\})_{n\in\mathbb{Z}_+}$ é equidistribuída se e somente se γ é irracional.

Abstract

In these notes we prove the Weyl's equidistribution theorem using tools from mathematical analysis. More precisely, using the equivalence

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\chi_{(a,b)}(k\gamma)\to\int_{\mathbb{R}}\chi_{(a,b)}(x)\,dx \text{ as } n\to\infty \quad \text{iff} \quad \gamma\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\,,$$

we prove that the sequence of fractional parts $(\{n\gamma\})_{n\in\mathbb{Z}_+}$ is uniformly distributed if and only if γ is irrational.

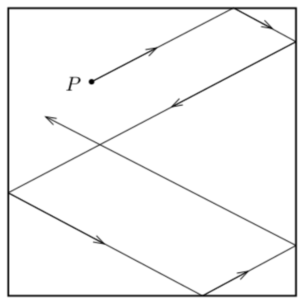
1 Introdução

Dado um número real $\gamma\in\mathbb{R}$, claro que a parte fracionária $\{\gamma\}:=\gamma-\lfloor\gamma\rfloor\in[0,1)$, onde $\lfloor\gamma\rfloor:=\max\{k\in\mathbb{Z}\,:\,k\leq\gamma\}$ denota o maior número inteiro menor ou igual

γ. Fixado $\gamma \in \mathbb{R}$, nestas notas estamos interessados na distribuição dos números da sequência $(\{n\gamma\})_{n\in\mathbb{Z}_+}$,

$$\{\gamma\},\ \{2\gamma\},\ \{3\gamma\},\ \{4\gamma\},\ \ldots, \{n\gamma\},\ \ldots$$

Para visualizar geometricamente a distribuição acima, suponha que os lados de um quadrado é composto de espelhos os quais refletem perfeitamente raios de luz em seu interior. Suponha que estes raios de luz deixam uma marca no interior do quadrado que denotaremos por um ponto P. Qual caminho o raio de luz irá traçar dentro do quadrado?



Com uma escolha adequada no eixo cartesiano, o caminho traçado pelo raio de luz no interior do quadrado é dado pelo seguimento de reta $P + (t, \gamma t)$. Assim, geometricamente, o caminho deste raio de luz será ou uma curva periódica fechada ou uma curva que vai se espalhar densamente sobre o interior do quadrado. Mais precisamente, usando a Observação 2.1 concluímos que a sequência $(\{n\gamma\})_{n\in\mathbb{Z}_+}$, com $\gamma \in \mathbb{Q}$, é periódica. No entanto, se $\gamma \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ então a sequência $(\{n\gamma\})_{n\in\mathbb{Z}_+}$ forma um conjunto denso no intervalo $[0,1)$, ou seja, a sequência $(\{n\gamma\})_{n\in\mathbb{Z}_+}$ atinge qualquer sub-intervalo de $[0,1)$. Uma pergunta natural: assuma que γ é irracional, como se dará o preenchimento do raio de luz no interior do quadrado? Mais precisamente, como a sequência $\{n\gamma\}$ está distribuída no intervalo $[0,1)$? Para darmos uma resposta plausível, vamos introduzir o conceito de equidistribuição de uma sequência. Dizemos que uma sequência real $x_1, x_2, \ldots$ é **uniformemente distribuída** ou **equidistribuída** em $[0,1)$, se para qualquer intervalo aberto não-degenerado $(a,b) \subset [0,1)$ tem-se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{card}\{x_k \in\ (a,b)\ :\ k \leq n\}}{n} = b - a\,, \tag{1.1}$$

onde card representa o número de elementos de um conjunto (vide [1], p.36).

Em outras palavras, a sequência $(x_k)_k$ percorre todo intervalo $[0,1)$ e cada subintervalo recebe sua parte justa de elementos de acordo com o comprimento do intervalo

(a, b), ou seja, a probabilidade de cada elemento x_k pertencer a (a, b) é proporcional ao comprimento deste sub-intervalo. Como já observamos, se $\gamma \in \mathbb{Q}$ então a sequência $\{n\gamma\}$ tem somente um número finito de valores (módulo a periodicidade) e, assim, não é equidistribuída. O resultado central do presente artigo é o célebre teorema da equidistribuição de Hermann Weyl [4, 5].

Teorema 1.1 (Equidistribuição de Weyl)**.** *A sequência* $(\{n\gamma\})_{n\in\mathbb{N}}$ *é equidistribuída em* $[0, 1)$ *se e somente se* $\gamma \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$*.*

A Figura 1 mostra a distribuição da sequência $\{n\pi\}$, para alguns valores de n. Note que as partes fracionárias estão distribuídas de forma "equilibrada" no intervalo $[0, 1)$.

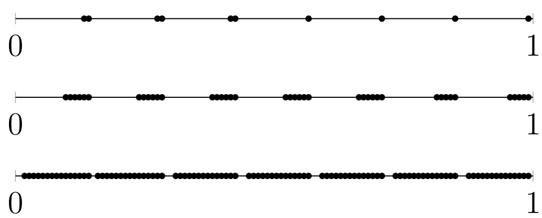


Figura 1: $n = 10$, $n = 40$, $n = 100$

O teorema acima foi provado de maneira independente pelos matemáticos Hermann Weyl, Piers Bohl e Wacław Sierpiński. Este teorema é um problema de teoria dos números. Nosso objetivo é transformar em um problema de análise. Para isto, vamos reescrever (1.1) numa forma equivalente. Seja $\chi_{(a,b)}$ a função indicadora definida por

$$\chi_{(a,b)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in (a, b) \\ 0, & x \in [0, 1)\backslash(a, b) \end{cases}$$

e seja $\varphi_{per}(x) = \chi_{(a,b)}(x - 2j)$ com $a < x - 2j < b$ a extensão periódica de $\chi_{(a,b)}(x)$ para $\mathbb{R}$, que a continuaremos denotando por $\chi_{(a,b)}(x)$. Então o número de pontos da sequência finita $\{\{\gamma\}, \{2\gamma\}, \{3\gamma\}, \dots, \{n\gamma\}\}$

$$\operatorname{card}\{\{k\gamma\} \in (a, b) \,:\, k \leq n\} = \sum_{k=1}^{n} \chi_{(a,b)}(k\gamma).$$

Desta forma, obtemos uma releitura do Teorema 1.1, pois (1.1) é equivalente a

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \chi_{(a,b)}(k\gamma) \longrightarrow \int_0^1 \chi_{(a,b)}(x)\, dx = b - a\,, \quad \text{quando} \quad n \to \infty\,.$$

Mais precisamente:

Teorema 1.2 (Equidistribuição de Weyl)**.** *O número γ é irracional se e somente se*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \chi_{(a,b)}(k\gamma) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{(a,b)}(x)dx\,.$$

Isto remove a dificuldade de trabalhar com parte fracionária e o Teorema 1.1 é reduzido a um teorema de análise matemática. A ideia da prova é construir um par de funções contínuas f^-, f^+ tal que

i) $f^- \leq \chi_{(a,b)} \leq f^+$ em K,

ii) $\displaystyle\int_K (f^+ - f^-) < \varepsilon$,

para todo $\varepsilon > 0$ e $K \subseteq \mathbb{R}$ compacto. Depois, mostrar o Teorema 1.2 para funções contínuas e 1-periódicas. Agora assumindo $\gamma \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, concluiremos que

$$\int_0^1 \varphi^-(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \chi_{(a,b)}(k\gamma) < \int_0^1 \varphi^+(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

onde φ^- e φ^+ são extensões periódicas de f^- e f^+, respectivamente. Para concluir a prova, basta verificar que

$$(b-a) - \varepsilon \leq \int_0^1 \varphi^-(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad \int_0^1 \varphi^+(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2} \leq (b-a) + \varepsilon.$$

2 Preliminares

Neste capítulo faremos uma breve exposição de propriedades sobre parte fracionária de um número real e relação de congruência em $\mathbb{R}$.

Dizemos que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é periódica de período $L \in \mathbb{Z}$ (L-periódica) quando, para todo x real, $f(x+L) = f(x)$.

Dado um número real x, a aplicação $x \mapsto \{x\}$ é 1-periódica, isto é, $\{x+1\} = \{x\}$, para todo x real. Dados $x, y \in \mathbb{R}$, dizemos que x e y são congruentes mod 1 ($x \equiv y$ **mod** 1) quando $x - y \in \mathbb{Z}$. Decorre desta definição que todo número real x é congruente **mod** 1 a um único número em $[0,1)$, a saber, $\{x\}$. De fato, é claro que $x \equiv \{x\}$ **mod** 1, pois $x - \{x\} = \lfloor \mathrm{x} \rfloor \in \mathbb{Z}$. Para verificar a unicidade, suponha que existe $a \in [0,1)$ tal que $x \equiv a$ **mod** 1. Então, $\{x\} \equiv a$ **mod** 1 e concluímos que $\{x\} - a$ é um inteiro tal que $|\{x\} - a| < 1$, donde $a = \{x\}$.

Observação 2.1. Seja γ um número irracional. A sequência

$$\gamma, 2\gamma, \ldots, n\gamma, \ldots \ \mathbf{mod}\ 1$$

é equivalente a sequência $(\{n\gamma\})_{n\in\mathbb{N}}$. Por que γ irracional é relevante? Ora, o caso γ racional é pouco interessante, pois $(\{n\gamma\})_{n\in\mathbb{N}}$ terá apenas um número finito (a menos de periodicidade) de termos distintos. Com efeito, sendo $\gamma = p/q$, com p e q inteiros relativamente primos, os primeiros q termos da seqüência das partes fracionárias, a saber

$$\{p/q\}, \{2p/q\}, \ldots, \{(q-1)p/q\}, \{qp/q\} = 0\,,$$

são distintos. Note que os termos sequência começam a repetir no $(q+1)$-ésimo termo, pois para todo $k \in \mathbb{N}$

$$\{(q+k)p/q\} = \{p + (kp/q)\} = \{p\} + \{kp/q\} = \{kp/q\}\,.$$

Voltando ao caso de interesse, quando γ é irracional os termos de $(\{n\gamma\})_{n\in\mathbb{N}}$ são todos distintos. De fato, se existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ com $\{n_1\gamma\} = \{n_2\gamma\}$ temos $n_1\gamma \equiv n_2\gamma$ **mod** 1, donde $(n_1 - n_2)\gamma \in \mathbb{Z}$, logo $\gamma \in \mathbb{Q}$, absurdo.

2.1 Distribuição uniforme

Como vimos na introdução, a definição abaixo é natural.

Definição 2.2. *Dizemos que uma sequência de números reais $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é equidistribuída em $[0,1)$ quando para todo intervalo não-degenerado $(a,b) \subseteq [0,1)$ tem-se*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \chi_{(a,b)}(x_k) = \int_0^1 \chi_{(a,b)}(x)\, dx\,,$$

Acima, $\chi_{(a,b)}(x)$ representa a extensão periódica da função indicadora (ou característica) do intervalo (a,b).

Proposição 2.3. *Se a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for equidistribuída em $[0,1)$, então o conjunto $F = \{\,\{x_n\};\, n \in \mathbb{N}\}$ é denso em $[0,1]$.*

Demonstração. Sendo $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ equidistribuída em $[0,1)$, segue-se da definição de equidistribuição que dado um intervalo aberto $(a,b) \subseteq [0,1)$, com $a < b$, existe $\{x_k\} \in (a,b)$. Com isso, dados $y \in [0,1]$ e $\delta > 0$, tomando um intervalo aberto não-degenerado $I \subseteq [0,1] \cap (y-\delta, y+\delta) \neq \emptyset$ temos $I \cap F \neq \emptyset$, donde $F \cap (y-\delta, y+\delta) \neq \emptyset$. $\square$

Exemplo 2.4. Seja $K \subseteq [0,1]$ o conjunto de Cantor. Nenhuma sequência de pontos de K é equidistribuída em $[0,1)$. Com efeito, dada $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$, com $k_n \in K$, tem-se $F = \{\,\{k_n\};\, n \in \mathbb{N}\} = \{k_n;\, n \in \mathbb{N}\}$. O conjunto F não é denso em $[0,1]$, pois o intervalo aberto $(1/3, 2/3)$, removido na primeira etapa da construção de K, não contém ponto algum de K. Portanto, $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não é uniformemente distribuída em $[0,1)$.

Exemplo 2.5. A sequência $(np/q)_{n\in\mathbb{N}}$, com p/q irredutível, não é uniformemente distribuída em $[0,1)$. De fato, do que foi mencionado na subseção anterior segue-se que o conjunto $F = \{\,\{np/q\};\, n \in \mathbb{N}\} = \{0, \{p/q\}, \{2p/q\}, \ldots, \{(q-1)p/q\}\,\}$, logo não pode ser denso em $[0,1)$.

Exemplo 2.6. Uma condição suficiente para que uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não seja equidistribuída em $[0,1)$ é que $\limsup \{x_n\} < d$, para algum $d \in\ (0,1)$. Com efeito, de $\limsup \{x_n\} < d$, com $0 < d < 1$, segue-se que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n > n_0$, tem-se $\{x_n\} < d$, logo nenhum intervalo contido no complementar $(d,1]\backslash\{\{x_1\}, ..., \{x_{n_0}\}\}$ contém pontos de $F = \{\{x_n\};\, n \in \mathbb{N}\}$; isso mostra que F não é denso em $[0,1]$. Usando este exemplo é possível provar que a sequência $(n!e)_{n\in\mathbb{N}}$, em que e é o número de Euler, não é uniformemente distribuída em $[0,1)$, pois $\lim\limits_{n\to\infty} \{n!e\} = 0$ (vide [3], p.8).

3 Lemas principais

Para provar o Teorema 1.2, precisaremos de dois lemas importantes.

Lema 3.1. *Sejam $K \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo compacto e $\chi_I : K \to \mathbb{R}$ a função característica de um intervalo $I \subseteq K$. Dado $\varepsilon > 0$, existem funções contínuas $f^-, f^+ : K \to \mathbb{R}$ tais que $f^-(x) \le \chi_I(x) \le f^+(x)$ para todo $x \in K$ e*

$$\int_K (f^+(x) - f^-(x))\, dx\ < \varepsilon\,.$$

Demonstração. Suponha, sem perda de generalidade, $\chi_I : [0,1] \to \mathbb{R}$ e $I =]a,b[\subseteq [0,1]$. Dado $\varepsilon > 0$, tomando $0 < \delta < \min\{\varepsilon, (b-a)/2, 1-b, a\}$ obtemos

$$0 < a - \delta < a < a + \delta < b - \delta < b < b + \delta < 1\,,$$

e com mais razão

$$0 < a - \frac{\delta}{2} < a < a + \frac{\delta}{2} < b - \frac{\delta}{2} < b < b + \frac{\delta}{2} < 1\,.$$

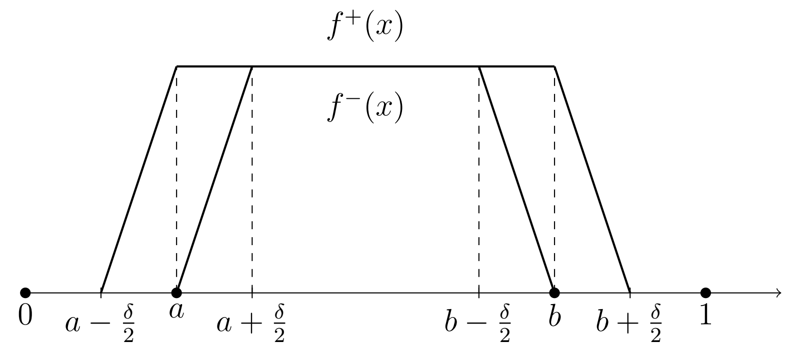
Com isso, pomos

$$f^-(x) = \begin{cases} 0 & , 0 \le x \le a; \\ \frac{2}{\delta}(x-a) & , a < x \le a+\delta/2; \\ 1 & , a+\delta/2 < x < b-\delta/2; \\ -\frac{2}{\delta}(x-b) & , b-\delta/2 \le x < b; \\ 0 & , b \le x \le 1; \end{cases}$$

e

$$f^+(x) = \begin{cases} 0 & , 0 \le x \le a-\delta/2; \\ \frac{2}{\delta}(x-a+\delta/2) & , a-\delta/2 < x \le a; \\ 1 & , a < x < b; \\ -\frac{2}{\delta}(x-b-\delta/2) & , b \le x < b+\delta/2; \\ 0 & , b+\delta/2 \le x \le 1\,. \end{cases}$$

As funções $f^-, f^+ : [0,1] \to \mathbb{R}$ assim definidas são contínuas e satisfazem $f^-(x) \le \chi_I(x) \le f^+(x)$ para todo $x \in [0,1]$. A representação gráfica dessa construção é mostrada abaixo.



Do diagrama acima é fácil ver que

$$\int_0^1 f^-(x)\,dx = b-a-\frac{\delta}{2} \quad \text{e} \quad \int_0^1 f^+(x)\,dx = b-a+\frac{\delta}{2}\,.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_0^1 (f^+(x)-f^-(x))\,dx &= \int_0^1 f^+(x)\,dx - \int_0^1 f^-(x)\,dx \\ &= b-a+\frac{\delta}{2}-(b-a)+\frac{\delta}{2} \\ &= \delta \\ &< \varepsilon\,. \end{aligned}$$

$\square$

Lema 3.2. *Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e 1-periódica. Se $\gamma \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ então*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k\gamma) = \int_0^1 f(x)\,dx\,.$$

Demonstração. Mostraremos que, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k\gamma) - \int_0^1 f(x)\,dx\right| < \varepsilon,$$

sempre que $n > n_0$. Com efeito, das hipóteses sobre a função f segue-se que podemos aproximá-la uniformemente em $\mathbb{R}$ por polinômios trigonométricos, isto é, dado $\varepsilon > 0$ existe um polinômio trigonométrico $P(x)$ tal que $|f(x) - P(x)| < \varepsilon/3$, para todo $x \in \mathbb{R}$ (vide [2], p.54). Com isso, dado $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k\gamma) - \int_0^1 f(x)\,dx\right| \leq \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (f(k\gamma) - P(k\gamma))\right| + \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P(k\gamma) - \int_0^1 f(x)\,dx\right|. \tag{3.1}$$

A primeira parcela da soma no lado direito da desigualdade acima é menor do que $\varepsilon/3$; para a segunda parcela temos

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P(k\gamma) - \int_0^1 f(x)\,dx\right| \leq \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P(k\gamma) - \int_0^1 P(x)\,dx\right| + \left|\int_0^1 (f(x) - P(x))\,dx\right|. \tag{3.2}$$

A segunda parcela na soma do lado direito dessa última desigualdade é menor do que $\varepsilon/3$. Para a primeira parcela, como $P(x)$ é um polinômio trigonométrico temos

$$P(x) = a_0 + \sum_{p=1}^{m} (a_p \cos(2\pi p x) + b_p \sin(2\pi p x))\,,$$

donde

$$\int_0^1 (f(x) - P(x))\,dx = a_0$$

e

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P(k\gamma) = a_0 + \sum_{p=1}^{m}\left(a_p \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos(2\pi p k\gamma) + b_p \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin(2\pi p k\gamma)\right).$$

Como γ é irracional, segue-se que as sequências dadas por $c_n = \sum_{k=1}^{n} \cos(2\pi pk\gamma)$ e $s_n = \sum_{k=1}^{n} \sin(2\pi pk\gamma)$ são limitadas, pois $2\pi p\gamma$ não é múltiplo inteiro de 2π (vide [1], p.102), daí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \cos(2\pi pk\gamma) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin(2\pi pk\gamma) = 0\,.$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P(k\gamma) = \int_0^1 (f(x) - P(x))\,dx\,,$$

isto é, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que para $n > n_0$ vale

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P(k\gamma) - \int_0^1 P(x)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Portanto, para $n > n_0$ segue-se de (3.1) e (3.2) que

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k\gamma) - \int_0^1 f(x)\,dx\right| < \varepsilon\,.$$

□

4 Prova do Teorema 1.2

Teorema 4.1 (Equidistribuição de Weyl)**.** *O número γ é irracional se e somente se*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \chi_{(a,b)}(k\gamma) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{(a,b)}(x)dx. \tag{4.1}$$

Demonstração. Se vale (4.1), então o resultado segue do Exemplo 2.5. Suponha agora que γ seja irracional. Da demonstração do Lema 3.1, segue-se que, dado $\varepsilon > 0$, existem funções contínuas $f^-, f^+ : [0,1] \to \mathbb{R}$ tais que $f^-(x) \leq \chi_{(a,b)}(x) \leq f^+(x)$ para todo $x \in [0,1]$, com $f^-(0) = f^-(1)$ e $f^+(0) = f^+(1)$, e

$$\int_0^1 (f^+(x) - f^-(x))\,dx < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Com isso, obtemos extensões $\varphi^-, \varphi^+ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínuas de período 1 das funções f^- e f^+, respectivamente, pondo

$$\varphi^-(x) = \begin{cases} f^-(x) & ; \, x \in [0,1) \\ f^-(x - \lfloor \mathrm{x} \rfloor) & ; \, x \in [n, n+1), \, n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} \end{cases}$$
$$\varphi^+(x) = \begin{cases} f^+(x) & ; \, x \in [0,1) \\ f^+(x - \lfloor \mathrm{x} \rfloor) & ; \, x \in [n, n+1), \, n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} \end{cases}$$

Dessa maneira temos $\varphi^-(x) \leq \chi_{(a,b)}(x) \leq \varphi^+(x)$ para todo x e

$$\int_0^1 (\varphi^+(x) - \varphi^-(x))\, dx < \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{4.2}$$

Em particular, dado $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varphi^-(k\gamma) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \chi_{(a,b)}(k\gamma) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varphi^+(k\gamma)\,.$$

Como φ^- e φ^+ são contínuas de período 1, segue-se do Lema 3.2 que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varphi^-(k\gamma) = \int_0^1 \varphi^-(x)\, dx \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varphi^+(k\gamma) = \int_0^1 \varphi^+(x)\, dx\,.$$

Daí, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica

$$\int_0^1 \varphi^-(x)\, dx - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \chi_{(a,b)}(k\gamma) < \int_0^1 \varphi^+(x)\, dx + \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{4.3}$$

De $\varphi^-(x) \leq \chi_{(a,b)}(x) \leq \varphi^+(x)$, obtemos

$$\int_0^1 \varphi^-(x)\, dx \leq b - a \leq \int_0^1 \varphi^+(x)\, dx\,;$$

por (4.2) temos

$$\int_0^1 \varphi^+(x)\, dx - \frac{\varepsilon}{2} < \int_0^1 \varphi^-(x)\, dx \quad \text{e} \quad \int_0^1 \varphi^+(x)\, dx < \int_0^1 \varphi^-(x)\, dx + \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Dessas desigualdades, obtemos

$$(b-a) - \varepsilon \leq \int_0^1 \varphi^-(x)\, dx - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad \int_0^1 \varphi^+(x)\, dx + \frac{\varepsilon}{2} \leq (b-a) + \varepsilon\,.$$

Portanto, de (4.3) segue-se que $n > n_0$ implica

$$(b-a) - \varepsilon < \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \chi_{(a,b)}(k\gamma) < (b-a) + \varepsilon\,.$$

$\square$

Corolário 4.2. *O conjunto* $F = \{\,\{n\gamma\};\, n \in \mathbb{N}, \gamma \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\,\}$ *é denso em* $[0,1]$.

Referências

[1] Lima, Elon Lages. *Curso de Análise Vol. 1.* 15ª ed. Projeto Euclides, IMPA, 2019.

[2] Stein, Elias M.; Shakarchi, Rami. *Fourier analysis: an introduction.* Princeton University Press, 2011.

[3] Kuipers, Lauwerens; Niederreiter, Harald. *Uniform distribution of sequences.* Courier Corporation, 2012.

[4] H. Weyl, Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins, Math. Ann. **77** (1916), no. 3, 313–352.

[5] Weyl, Hermann. "Über ein Problem aus dem Gebiet der diophantischen Approximationen."Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse 1914 (1914): 234-244.

Submetido em 01 de Maio de 2022.
Aceito em 04 de Novembro de 2022.