Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática

https://doi.org/10.34179/revisem.v8i1.17678

A sequência diferencial de k-Padovan e k-Perrin

Renata Passos Machado Vieira
Universidade Federal do Ceará
Doutoranda em Ensino de Ciências e Matemática - RENOEN UFC
re.passosm@gmail.com
Francisco Régis Vieira Alves
Instituto Federal do Ceará
Bolsista de produtividade do CNPQ-PQ2
fregis@ifce.edu.br
Paula Maria Machado Cruz Catarino
Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro - Portugal
pcatarino23@gmail.com

Resumo

Este trabalho tem como objetivo apresentar a sequência diferencial, por meio da aplicação do conceito do operador diferencial (Δ), às sequências de k-Padovan e k-Perrin. Com isso, serão investigadas as propriedades algébricas dessas sequências, bem como a fórmula de binet e função geradora.
Palavras-chave: fórmula de Binet, função geradora, sequência diferencial de k-Padovan, sequência diferencial de k-Perrin.

Abstract

This work aims to present the differential sequence through the application of the concept of the differential operator (Δ) to the k-Padovan and k-Perrin sequences. With this, the algebraic properties of these sequences will be investigated, as well as the binet formula and generating function.
Keewords: Binet formula, generating function, k-Padovan differential sequence, k-Perrin differential sequence.

1 Introdução

Inicialmente, estuda-se as sequências de k-Padovan e k-Perrin, visando introduzir as sequências diferenciais desses números, bem como a aplicação do conceito diferencial no âmbito das sequências numéricas.

A sequência de k-Padovan é definida pela fórmula de recorrência:

$$P_{k,n} = kP_{k,n-2} + P_{k,n-3}, n \geq 3,$$

com os valores iniciais $P_{k,0} = P_{k,1} = P_{k,2} = 1$. Já a sequência de k-Perrin, é definida pela fórmula de recorrência:

$$Pe_{k,n} = kPe_{k,n-2} + Pe_{k,n-3}, n \geq 3,$$

com os valores iniciais $Pe_{k,0} = 3, Pe_{k,1} = 0, Pe_{k,2} = 2$.

Definição 1.1. *O polinômio característico da Sequência de k-Padovan e k-Perrin, é definido como:*

$$x^3 - kx - 1 = 0,$$

Teorema 1.2. *A função geradora da sequência de k-Padovan, denotado por $GP_{k,n}(x)$, é dada por:*

$$GP_{k,n}(x) = \frac{1 + x + (1-k)x^2}{1 - kx^2 - x^3}.$$

Demonstração. Escrevendo uma série em que cada termo na sequência corresponde ao coeficiente $GP_{k,n}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{k,n}x^n$.

Assim, realizando manipulações algébricas com base na relação de recorrência, tem-se:

$$\begin{aligned}
GP_{k,n}(x) &= P_{k,0} + P_{k,1}x + P_{k,2}x^2 + P_{k,3}x^3 + \dots \\
kx^2GP_{k,n}(x) &= P_{k,0}kx^2 + P_{k,1}kx^3 + P_{k,2}kx^4 + P_{k,3}kx^5 + \dots \\
x^3GP_{k,n}(x) &= P_{k,0}x^3 + P_{k,1}x^4 + P_{k,2}x^5 + P_{k,3}x^6 + \dots \\
(1 - kx^2 - x^3)GP_{k,n}(x) &= P_{k,0} + P_{k,1}x + (P_{k,2} - kP_{k,0})x^2 + (P_{k,3} - kP_{k,1} - P_{k,0})x^3 + \dots \\
&= \frac{P_{k,0} + P_{k,1}x + (P_{k,2} - kP_{k,0})x^2}{1 - kx^2 - x^3} \\
&= \frac{1 + x + (1-k)x^2}{1 - kx^2 - x^3}.
\end{aligned}$$

□

Teorema 1.3. *A função geradora da sequência de k-Perrin, denotado por $GPe_{k,n}(x)$, é dada por:*

$$GPe_{k,n}(x) = \frac{3 + (2-3k)x^2}{1 - kx^2 - x^3}$$

Demonstração. De modo análogo à demonstração anterior, pode-se validar o presente Teorema. □

Teorema 1.4. *Para $n \in \mathbb{N}$, a fórmula de Binet da sequência k-Padovan e k-Perrin é expressa por:*

$$QP_{k,n} = Ax_1^n + Bx_2^n + Cx_3^n,$$
$$QPe_{k,n} = C_1x_1^n + C_2x_2^n + C_3x_3^n,$$

em que A, B, C, C_1, C_2, C_3 são os coeficientes da fórmula de Binet da sequência e x_1, x_2, x_3 as raízes do polinômio característico ($x^3 - kx - 1 = 0$).

Demonstração. Com base na fórmula de recorrência da sequência k-Padovan e k-Perrin, em seus respectivos valores iniciais definidos e no seu polinômio característico cujas raízes são x_1, x_2, x_3, é possível obter por meio de resolução do sistema linear de equações, os valores dos coeficientes A, B, C, C_1, C_2, C_3 das respectivas sequências.

Para determinar os coeficientes A, B, C de k-Padovan, utiliza-se as condições iniciais $P_{k,0} = P_{k,1} = P_{k,2} = 1$, e a partir daí, obtêm-se o sistema:

$$\begin{cases} A + B + C & = 1 \\ Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 & = 1 \\ Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2 & = 1 \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema, tem-se que:

$$A = \frac{-x_2 + x_2x_3 - x_3 + 1}{x_1^2 - x_1x_2 - x_1x_3 + x_2x_3} = \frac{(x_2 - 1)(x_3 - 1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)},$$
$$B = \frac{-x_1 + x_1x_3 - x_3 + 1}{x_2^2 - x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_3} = \frac{(x_1 - 1)(x_3 - 1)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)},$$
$$C = \frac{-x_1 + x_1x_2 - x_2 + 1}{x_3^2 + x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3} = \frac{(x_1 - 1)(x_2 - 1)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}.$$

Para a sequência k-Perrin, são utilizados os valores iniciais: $Pe_{k,0} = 3, Pe_{k,1} = 0, Pe_{k,2} = 2$. Logo, a resolução do sistema é dada por:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 & = 3 \\ C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3 & = 0 \\ C_1x_1^2 + C_2x_2^2 + C_3x_3^2 & = 2 \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema, tem-se que:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{2+3x_2x_3}{x_1^2 - x_1x_2 - x_1x_3 + x_2x_3} = \frac{2+3x_2x_3}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}, \\ C_2 &= \frac{2+3x_1x_3}{x_2^2 - x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_3} = \frac{2+3x_1x_3}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}, \\ C_3 &= \frac{2+3x_1x_2}{x_3^2 + x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3} = \frac{2+3x_1x_2}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}. \end{aligned}$$

□

Diversos estudos em torno das sequências acima destacadas são realizados, com base em seu caso particular ($k = 1$) [5, 6, 7, 8, 9]. Aqui utilizamos o operador diferencial de primeira ordem nestas sequências a fim de obtermos os nossos principais resultados. Dada a sequência de números reais a_n, o primeiro diferencial $\Delta(a_n)$ é definido por [4]:

$$\Delta(a_n) = a_{n+1} - a_n, n \geqslant 0.$$

O segundo diferencial $\Delta^2(a_n)$ é definido por:

$$\Delta^2(a_n) = \Delta(\Delta a_{n+1} - \Delta a_n), n \geqslant 0.$$

Pode-se ainda reescrever o segundo diferencial como:

$$\Delta^2(a_n) = \Delta(a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n), n \geqslant 0.$$

O k-ésimo termo diferencial, recursivamente para qualquer número inteiro positivo $k > 1$, é dado por:

$$\Delta^k(a_n) = \Delta^{k-1}(a_{n+1}) - \Delta^{k-1}(a_n) = \sum_{t=0}^{k} \binom{k}{t} (-1)^t a_{n+k-t}.$$

Diante disso e com base nos trabalhos de [1, 2, 3, 10], realiza-se o estudo das sequências diferenciais de k-Padovan e k-Perrin, permitindo aprofundar os conhecimentos e investigações em torno dessas sequências numéricas.

2 O k-ésimo termo das sequências diferenciais de k-Padovan e k-Perrin

Nesta seção, são aplicadas as relações diferencias às sequências de k-Padovan e k-Perrin com base em suas definições e teoremas vistos na introdução.

Definição 2.1. *O primeiro diferencial de k-Padovan e k-Perrin são definidos como:*

$$\Delta(P_{k,n}) = P_{k,n+1} - P_{k,n},$$
$$\Delta(Pe_{k,n}) = Pe_{k,n+1} - Pe_{k,n}.$$

Definição 2.2. *O segundo diferencial de k-Padovan e k-Perrin são definidos como:*

$$\Delta^2(P_{k,n}) = \Delta\left(\Delta(P_{k,n+1}) - \Delta(P_{k,n})\right) = P_{k,n+2} - 2P_{k,n+1} + P_{k,n}, n \geqslant 0,$$
$$\Delta^2(Pe_{k,n}) = \Delta\left(\Delta(Pe_{k,n+1}) - \Delta(Pe_{k,n})\right) = Pe_{k,n+2} - 2Pe_{k,n+1} + Pe_{k,n}, n \geqslant 0.$$

Definição 2.3. *O k-ésimo diferencial de k-Padovan e k-Perrin são definidos como:*

$$\Delta^k(P_{k,n}) = \sum_{t=0}^{k} \binom{k}{t} (-1)^t P_{k,n+k-t}, n \geqslant 0,$$
$$\Delta^k(Pe_{k,n}) = \sum_{t=0}^{k} \binom{k}{t} (-1)^t Pe_{k,n+k-t}, n \geqslant 0.$$

Se $k = 0, 1$, tem-se:

$$\Delta^0(P_{k,n}) = P_{k,n},$$
$$\Delta^0(Pe_{k,n}) = Pe_{k,n},$$
$$\Delta^1(P_{k,n}) = \Delta(P_{k,n}),$$
$$\Delta^1(Pe_{k,n}) = \Delta(Pe_{k,n}).$$

Proposição 2.4. *Para um número real k positivo e um inteiro não negativo n, tem-se as seguintes fórmulas de recursão envolvendo as sequências k-Padovan e k-Perrin:*

$$P_{k,n+1} = (x_1 + x_2 + x_3)P_{k,n} - C_1 x_1^n (x_2 + x_3) - C_2 x_2^n (x_1 + x_3) - C_3 x_3^n (x_1 + x_2),$$
$$Pe_{k,n+1} = (x_1 + x_2 + x_3)Pe_{k,n} - C_1 x_1^n (x_2 + x_3) - C_2 x_2^n (x_1 + x_3) - C_3 x_3^n (x_1 + x_2).$$

Demonstração. Utilizando a fórmula de Binet da sequência de k-Padovan, tem-se que:

$$\begin{aligned} P_{k,n+1} &= (x_1 + x_2 + x_3)P_{k,n} - C_1 x_1^n (x_2 + x_3) - C_2 x_2^n (x_1 + x_3) - C_3 x_3^n (x_1 + x_2) \\ &= (x_1 + x_2 + x_3)(C_1 x_1^n + C_2 x_2^n + C_3 x_3^n) - C_1 x_1^n (x_2 + x_3) - C_2 x_2^n (x_1 + x_3) - C_3 x_3^n (x_1 + x_2) \\ &= C_1 x_1^{n+1} + C_2 x_1 x_2^n + C_3 x_1 x_3^n + C_1 x_1^n x_2 + C_2 x_2^{n+1} + C_3 x_2 x_3^n + C_1 x_1^n x_3 + C_2 x_2^n x_3 + C_3 x_3^{n+1} \\ &- C_1 x_1^n x_2 - C_1 x_1^n x_3 - C_2 x_2^n x_1 - C_2 x_2^n x_3 - C_3 x_3^n x_1 - C_3 x_3^n x_2 \\ &= C_1 x_1^{n+1} + C_2 x_2^{n+1} + C_3 x_3^{n+1} = P_{k,n+1}. \end{aligned}$$

De modo análogo, pode-se validar a expressão para a sequência de k-Perrin. □

Proposição 2.5. *Para um número natural* n *e um número real positivo* k*, se* $\Delta(P_{k,n})$ *e* $\Delta(Pe_{k,n})$ *são os primeiros diferenciais das sequências k-Padovan e k-Perrin, são válidas as seguintes proposições:*

$$\Delta(P_{k,n}) = (x_1 + x_2 + x_3 - 1)P_{k,n} - C_1x_1^n(x_2 + x_3) - C_2x_2^n(x_1 + x_3) - C_3x_3^n(x_1 + x_2),$$
$$\Delta(Pe_{k,n}) = (x_1 + x_2 + x_3 - 1)Pe_{k,n} - C_1x_1^n(x_2 + x_3) - C_2x_2^n(x_1 + x_3) - C_3x_3^n(x_1 + x_2).$$

Demonstração. Para o primeiro diferencial da sequência k-Padovan e utilizando a Proposição 2.4, tem-se:

$$\begin{aligned}\Delta(P_{k,n}) &= P_{k,n+1} - P_{k,n}\\ &= (x_1 + x_2 + x_3)P_{k,n} - C_1x_1^n(x_2 + x_3) - C_2x_2^n(x_1 + x_3) - C_3x_3^n(x_1 + x_2) - P_{k,n}\\ &= (x_1 + x_2 + x_3 - 1)P_{k,n} - C_1x_1^n(x_2 + x_3) - C_2x_2^n(x_1 + x_3) - C_3x_3^n(x_1 + x_2).\end{aligned}$$

De modo análogo, pode-se validar a expressão para a sequência de k-Perrin. □

Proposição 2.6. *Para um número natural* n *e um número real positivo* k*, se* $\Delta^2(P_{k,n})$ *e* $\Delta^2(Pe_{k,n})$ *são os segundos diferenciais das sequências k-Padovan e k-Perrin, são válidas as seguintes proposições:*

$$\begin{aligned}\Delta^2(P_{k,n}) &= (k + 1 - 2x_1 - 2x_2 - 2x_3)P_{k,n} + P_{k,n-1} + C_1x_1^n(x_2 + x_3) + C_2x_2^n(x_1 + x_3)\\ &\quad + C_3x_3^n(x_1 + x_2),\\ \Delta^2(Pe_{k,n}) &= (k + 1 - 2x_1 - 2x_2 - 2x_3)Pe_{k,n} + Pe_{k,n-1} + C_1x_1^n(x_2 + x_3) + C_2x_2^n(x_1 + x_3)\\ &\quad + C_3x_3^n(x_1 + x_2).\end{aligned}$$

Demonstração. Para o segundo diferencial da sequência k-Padovan, a relação de recorrência e a Proposição 2.4, tem-se:

$$\begin{aligned}\Delta^2(P_{k,n}) &= P_{k,n+2} - 2P_{k,n+1} + P_{k,n}\\ &= kP_{k,n} + P_{k,n-1} - 2P_{k,n+1} + P_{k,n}\\ &= (k + 1)P_{k,n} + P_{k,n-1} - 2P_{k,n+1}\\ &= (k + 1)P_{k,n} + P_{k,n-1} - 2(x_1 + x_2 + x_3)P_{k,n} + C_1x_1^n(x_2 + x_3) + C_2x_2^n(x_1 + x_3)\\ &+ C_3x_3^n(x_1 + x_2)\\ &= (k + 1 - 2x_1 - 2x_2 - 2x_3)P_{k,n} + P_{k,n-1} + C_1x_1^n(x_2 + x_3) + C_2x_2^n(x_1 + x_3)\\ &+ C_3x_3^n(x_1 + x_2).\end{aligned}$$

De modo análogo, pode-se validar a expressão para a sequência de k-Perrin. □

3 Algumas propriedades

Nesta seção, estuda-se algumas propriedades envolvendo as sequências diferencias de k-Padovan e k-Perrin, com base nas definições e proposições matemáticas vistas na seção anterior.

Propriedade 3.1. *Suponha que n seja um número natural, i um inteiro não negativo e k um número real positivo. Tem-se que as sequências diferencias de k-Padovan e k-Perrin são definidas da seguinte forma:*

$$\left\{(P_{k,n}^{(i)})\right\} = \Delta^i \left\{(P_{k,n})\right\},$$
$$\left\{(Pe_{k,n}^{(i)})\right\} = \Delta^i \left\{(Pe_{k,n})\right\}.$$

Para $i = 0, 1, 2$, tem-se a seguinte sequência diferencial de k-Padovan:

$$\left\{(P_{k,n}^{(0)})\right\} = \Delta^0 \left\{(P_{k,n})\right\} = \left\{P_{k,n}\right\} = \left\{1, 1, 1, k+1, k+1, 2k+1, \ldots\right\}$$
$$\left\{(P_{k,n}^{(1)})\right\} = \Delta^1 \left\{(P_{k,n})\right\} = \left\{P_{k,n}\right\} = \left\{0, 0, k, 0, k, k^2, \ldots\right\}$$
$$\left\{(P_{k,n}^{(2)})\right\} = \Delta^2 \left\{(P_{k,n})\right\} = \left\{P_{k,n}\right\} = \left\{0, k, -k, k, k^2-k, \ldots\right\}$$

Pela definição da relação de recorrência, tem-se:

$$P_{k,n}^{(i)} = \sum_{t=0}^{i} \binom{i}{t} (-1)t P_{k,n+i-t},$$

Para $i = 0, 1, 2$, tem-se a seguinte sequência diferencial de k-Perrin:

$$\left\{(Pe_{k,n}^{(0)})\right\} = \Delta^0 \left\{(Pe_{k,n})\right\} = \left\{Pe_{k,n}\right\} = \left\{3, 0, 2, 3k, 2, 5k, \ldots\right\}$$
$$\left\{(Pe_{k,n}^{(1)})\right\} = \Delta^1 \left\{(Pe_{k,n})\right\} = \left\{Pe_{k,n}\right\} = \left\{-3, 2, 3k-2, 2-3k, 5k-2, \ldots\right\}$$
$$\left\{(Pe_{k,n}^{(2)})\right\} = \Delta^2 \left\{(Pe_{k,n})\right\} = \left\{Pe_{k,n}\right\} = \left\{5, 3k-4, -6k+4, 8k-4, 3k^2-10k+4, \ldots\right\}$$

Pela definição da relação de recorrência, tem-se:

$$Pe_{k,n}^{(i)} = \sum_{t=0}^{i} \binom{i}{t} (-1)t Pe_{k,n+i-t},$$

Teorema 3.2. *As sequências diferenciais de k-Padovan e k-Perrin satisfazem as seguintes relações de recorrência:*

$$P_{k,n+1}^{(i)} = kP_{k,n-1}^{(i)} + P_{k,n-2}^{(i)},$$
$$Pe_{k,n+1}^{(i)} = kPe_{k,n-1}^{(i)} + Pe_{k,n-2}^{(i)}.$$

Demonstração. Para a sequência diferencial k-Padovan, quando $i = 0$, obtêm-se imediatamente a relação de recorrência da sequência de k-Padovan. Para $i = 1$, tem-se:

$$\begin{aligned} P_{k,n+1}^{(i)} &= \Delta P_{k,n+1} = P_{k,n+2} - P_{k,n+1} \\ &= kP_{k,n} + P_{k,n-1} - kP_{k,n-1} - P_{k,n-2} \\ &= k(P_{k,n} - P_{k,n-1}) + P_{k,n-1} - P_{k,n-2} \\ &= k\Delta(P_{k,n-1}) + \Delta(P_{k,n-2}) \\ &= kP_{k,n-1}^{(1)} + P_{k,n-2}^{(1)}. \end{aligned}$$

De modo similar, pode-se demonstrar para a sequência diferencial de k-Perrin. □

Teorema 3.3. *Para $n \in \mathbb{N}$, a fórmula de Binet da sequência diferencial de k-Padovan e k-Perrin é expressa por:*

$$Q_{k,n}^{(n)} = C_1 x_1^n + C_2 x_2^n + C_3 x_3^n,$$

em que C_1, C_2, C_3 são os coeficientes da fórmula de Binet da sequência e x_1, x_2, x_3 as raízes do polinômio característico ($x^3 - kx - 1 = 0$).

Demonstração. Com base na fórmula de recorrência da sequência k-Padovan e k-Perrin, em seus respectivos valores iniciais definidos e no seu polinômio característico cujas raízes são x_1, x_2, x_3, é possível obter por meio de resolução do sistema linear de equações, os valores dos coeficientes C_1, C_2, C_3. □

Teorema 3.4. *A função geradora da sequência diferencial de k-Padovan, denotada por $GP_{k,n}^{(i)}(x)$, é dada por:*

$$GP_{k,n}^{(i)}(x) = \frac{P_{k,0}^{(i)} + P_{k,1}^{(i)}x + (P_{k,2}^{(i)} - kP_{k,0}^{(i)})x^2}{1 - kx^2 - x^3}.$$

Demonstração. Escrevendo uma série em que cada termo na sequência corresponde ao coeficiente $GP_{k,n}^{(i)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{k,n}^{(i)} x^n$.

Assim, realizando manipulações algébricas com base na relação de recorrência, tem-se:

$$\begin{aligned}
GP^{(i)}_{k,n}(x) &= P^{(i)}_{k,0} + P^{(i)}_{k,1}x + P^{(i)}_{k,2}x^2 + P^{(i)}_{k,3}x^3 + \dots \\
kx^2GP^{(i)}_{k,n}(x) &= P^{(i)}_{k,0}kx^2 + P^{(i)}_{k,1}kx^3 + P^{(i)}_{k,2}kx^4 + P^{(i)}_{k,3}kx^5 + \dots \\
x^3GP^{(i)}_{k,n}(x) &= P^{(i)}_{k,0}x^3 + P^{(i)}_{k,1}x^4 + P^{(i)}_{k,2}x^5 + P^{(i)}_{k,3}x^6 + \dots \\
(1-kx^2-x^3)GP^{(i)}_{k,n}(x) &= P^{(i)}_{k,0} + P^{(i)}_{k,1}x + (P^{(i)}_{k,2} - kP^{(i)}_{k,0})x^2 + (P^{(i)}_{k,3} - kP^{(i)}_{k,1} - P^{(i)}_{k,0})x^3 + \dots \\
&= \frac{P^{(i)}_{k,0} + P^{(i)}_{k,1}x + (P^{(i)}_{k,2} - kP^{(i)}_{k,0})x^2}{1-kx^2-x^3}.
\end{aligned}$$

□

Teorema 3.5. *A função geradora da sequência diferencial de k-Perrin, denotado por $GPe^{(i)}_{k,n}(x)$, é dada por:*

$$GPe^{(i)}_{k,n}(x) = \frac{Pe^{(i)}_{k,0} + Pe^{(i)}_{k,1}x + (Pe^{(i)}_{k,2} - kPe^{(i)}_{k,0})x^2}{1-kx^2-x^3}.$$

Demonstração. De modo análogo à demonstração anterior, pode-se validar o presente Teorema. □

4 Conclusão

O presente estudo possibilitou a introdução de novas sequências pela aplicação do conceito de relação diferencial às sequências de k-Padovan e k-Perrin. Assim, realizou-se uma investigação matemática em torno dessas sequências, obtendo algumas propriedades matemáticas, destacando a fórmula de Binet e as respectivas funções geradoras.

Observa-se que os resultados obtidos neste artigo, para o caso particular de $k = 1$, são os resultados correspondentes para as sequências dos números de Padovan e Perrin. Busca-se para pesquisas futuras, dar continuidade ao estudo dessas sequências diferenciais, além de pesquisar algumas das suas aplicações.

Agradecimentos

A parte de desenvolvimento de pesquisas no Brasil contou com o apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq e da Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico (Funcap).

A vertente de desenvolvimento da investigação em Portugal é financiada por Fundos Nacionais através da FCT - Fundação para a Ciência e Tecnologia. I. P, no âmbito do projeto UID / CED / 00194/2020.

Referências

[1] Catarino, P. On Jacobsthal difference sequences. *Acta Math. Univ. Comenianae*, vol. LXXXVII, n. 2, p. 267-276, 2018.

[2] Catarino, P. On some Pell difference sequences. *Semantic Scholar*, 2017.

[3] Falcon, S. The k-Fibonacci difference senquences. *Chao, Solitons Fractal*, vol. 87, p. 153-157, 2016.

[4] Lima, E. L.; Carvalho, P. C. P.; Wagner, E.; Morgado, A. C. *A Matemática do Ensino Médio*. Editora SBM, vol. 2, 2016.

[5] Padovan, R. *Dom Hans van der Laan: modern primitiv*e. [S.l.]: Amsterdam, Architecture and Natura Press, 1994.

[6] Spinadel, V. M. W. de; Buitrago, A. R. Towards van der laan´s plastic number in the plane. *Journal for Geometry and Graphics*, vol. 13, n. 2, p. 163-175, 2009.

[7] Vieira, R. P. M. *Engenharia Didática (ED): o caso da Generalização e Complexificação da Sequência de Padovan ou Cordonnier*. 266f. Dissertação de Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará, 2020.

[8] Vieira, R. P. M.; Alves, F. R. V; Catarino, P. M. C. A historic alanalys is of the padovan sequence. *International Journal of Trends in Mathematics Education Research*, vol. 3, n. 1, p. 8?12, 2020.

[9] Vieira, R. P. M.; Alves, F. R. V. Explorando a sequência de Padovan através de investigação histórica e abordagem epistemológica. *Boletim GEPEM*, vol. 74, p. 161-169, 2019.

[10] Yaying, T.; Hazarika, B.; Mohiuddine, S. A. On difference sequence spaces of fractional-order involving Padovan numbers. *Asian-European Journal of Mathematics*, vol. 14, n. 6, 2021.

Submetido em 09 de Junho de 2022.
Aceito em 03 de Novembro de 2022.