

## MODELAGEM MATEMÁTICA DAS CURVAS DE ESTATURA E PESO DE INDIVÍDUOS COM SÍNDROME DE DOWN

José Sérgio Domingues

Instituto Federal Minas Gerais - Campus Formiga

[sergio.domingues@ifmg.edu.br](mailto:sergio.domingues@ifmg.edu.br)

### Resumo

Neste trabalho, foi feito o ajuste das curvas de percentis de peso e estatura, em função da idade de indivíduos com Síndrome de Down, por dois modelos matemáticos clássicos. O objetivo foi verificar se essas curvas seguem os modelos logístico e exponencial assintótico, respectivamente. Para isso, foram utilizados dados de um amplo estudo realizado no estado de São Paulo. Os parâmetros dos modelos e as diferenças percentuais foram determinados, e os resultados comprovam que os modelos logístico e exponencial assintótico se ajustam bem às referidas curvas, com as respectivas diferenças médias mínimas de 1,72% e 1,45%.

**Palavras-Chave:** Modelo logístico; Síndrome de Down; Curvas de peso; Curvas de estatura.

### Abstract

In this work, the curves of weight and height percentiles were adjusted as a function of age in individuals with Down Syndrome, by two classical mathematical models. The objective was to verify if these curves follow the logistic and asymptotic exponential models, respectively. For this, data from a large study carried out in the state of São Paulo were used. The parameters of the models and the percentage differences were determined, and the results prove that the logistic and asymptotic exponential models fit well to the referred curves, with the respective minimum average differences of 1.72% and 1.45%.

**Keywords:** Logistic model; Down's syndrome; weight curves, height curves.

## 1 Introdução

A Síndrome de Down (SD) é a mais frequente alteração genética entre humanos, com incidência em nascidos vivos de 1 a cada 650 a 1000 gestações. Seu nome é devido a John Langdon Down, que descreveu a doença em 1866, enfatizando que essa alteração

genética afeta o desenvolvimento do indivíduo, determinando algumas características físicas e cognitivas. Dentre as principais características de pessoas com SD estão a baixa estatura, retardo mental (em diversos níveis), dismorfia facial e defeitos congênitos no coração. Essas características fazem com que os padrões de evolução de peso<sup>1</sup>, estatura, perímetro cefálico e índice de massa corpórea (IMC) sejam distintos daqueles que não possuem a síndrome [2, 5, 7].

Essa diferença de padrão de crescimento motiva estudos específicos para curvas de referência desses parâmetros para a população com SD, pois como afirma a Organização Mundial da Saúde, essas curvas constituem um instrumento técnico de fundamental importância na medição, monitoração e avaliação do crescimento de crianças e adolescentes de 0 a 19 anos, independente da origem étnica, situação socioeconômica ou tipo de alimentação [8].

Um estudo recente avaliou parâmetros importantes na saúde de 34 pacientes com SD e deficiência intelectual, todos alunos de uma escola de ensino especial de Porto Velho-RO. Dentre os vários dados analisados estão massa e altura, que permitiram verificar, dentre outras coisas, que os alunos com SD tinham elevado IMC [9].

Nos Estados Unidos (EU) foi realizado um estudo importante com 637 participantes com SD na faixa etária de 0 a 20 anos [12]. Com os dados foram construídas as curvas de massa e estatura, e estas foram comparadas com curvas mais antigas dos EU e com curvas recentes do Reino Unido.

Em [2] um estudo amplo foi realizado em 938 indivíduos com SD, na faixa etária de 0 a 20 anos. Ao todo foram realizadas quase 11 mil medidas relativas a peso, estatura e perímetro cefálico e, a partir delas, foram traçadas curvas de peso, estatura, perímetro cefálico e IMC, todos em função das idades dos indivíduos. Não são apresentados os valores das medidas de cada participante, mas sim, as médias das medidas para meninos e meninas, e seus respectivos percentis, por idades. O estudo foi separado em algumas faixas etárias. Aqui, foram escolhidos os resultados da faixa etária de 3 a 20 anos, por contemplarem o maior período do crescimento dos indivíduos participantes. Para essa faixa, os percentis calculados em [2] são de 3%, 10%, 25%, 50%, 75%, 90% e 97% e as curvas de referência traçadas e utilizadas neste trabalho foram de peso e estatura.

Visualmente, as curvas de referência dos percentis para peso apresentam a forma parecida com um “S”, sugerindo crescimento logístico. As curvas dos percentis de estatura crescem com concavidade voltada para baixo, e indicam tendência de estabilidade, lembrando, portanto, uma curva do modelo exponencial assintótico. Sendo assim, o principal objetivo deste trabalho é verificar se essas hipóteses podem ser confirmadas, ou seja, se as curvas de percentis de peso e estatura de indivíduos com SD de 3 a 20

---

<sup>1</sup>Do ponto de vista conceitual o termo correto é massa, pois peso é uma força. Porém, na literatura médica é mais comum o uso do termo “peso”.

anos, em função das idades, podem ser representadas matematicamente pelos modelos logístico e exponencial assintótico, respectivamente, com base nos gêneros e nos percentis apresentados em [2].

## 2 Modelos Logístico e Exponencial Assintótico

### 2.1 Modelo Logístico

Uma equação diferencial que modela a taxa de variação de uma função  $P = P(t)$ , de forma que ocorra uma aproximação ao comportamento exponencial de crescimento por um período, e depois uma tendência de estabilidade, é a **Equação Diferencial Logística** dada por

$$\frac{dP}{dt} = rP \left( 1 - \frac{P}{P_\infty} \right), \quad (2.1)$$

em que  $r$  é uma constante e  $P_\infty$  é o valor máximo que  $P(t)$  pode assumir quando  $t$  cresce, denominada **capacidade de carga (de suporte, valor limite ou valor de equilíbrio)**. Então, deve valer que  $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = P_\infty$ .

A Figura 1<sup>2</sup> mostra a representação genérica da curva do modelo logístico. Observe que ela se inicia com um crescimento similar ao exponencial, e que, após um período, muda de concavidade e passa a tender para a capacidade de carga.

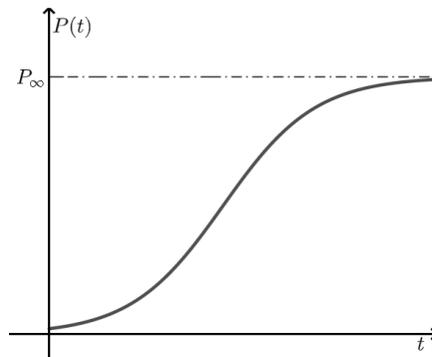


Figura 1: Representação da curva genérica do modelo logístico.

O fator  $(1 - P/P_\infty)$  na Equação (2.1) proporciona à taxa de variação duas características: **i)** sua redução à medida que  $P(t)$  aumenta e, **ii)** se torna negativa se, por algum motivo,  $P(t)$  ultrapassar o valor de  $P_\infty$ .

<sup>2</sup>Com exceção das Figuras 3 e 4, todas as figuras foram produzidas pelos autores.

Sabemos que a solução da Equação (2.1), associada à condição inicial  $P(t_0) = P_0$ , é dada pela Equação (2.2)

$$P(t) = \frac{P_\infty}{1 + \left(\frac{P_\infty}{P_0} - 1\right) e^{-r(t-t_0)}}, \quad (2.2)$$

denominada **Modelo Logístico** ou **Modelo de Verhulst**.

A demonstração dessa afirmação e mais detalhes sobre esse modelo matemático podem ser obtidos em [1, 3, 11].

## 2.2 Modelo Exponencial Assintótico

É o modelo matemático da Equação (2.3), utilizado no ajuste de pontos com tendência de crescimento quando  $t$  aumenta, mas limitado assintoticamente pela capacidade de carga,  $P_\infty$ , com constantes  $a \in \mathbb{R}_-^*$  e  $b \in \mathbb{R}_+^*$  [1, 6].

$$P(t) = P_\infty - be^{at}. \quad (2.3)$$

A Figura 2 apresenta o formato geral da curva desse tipo de modelo.

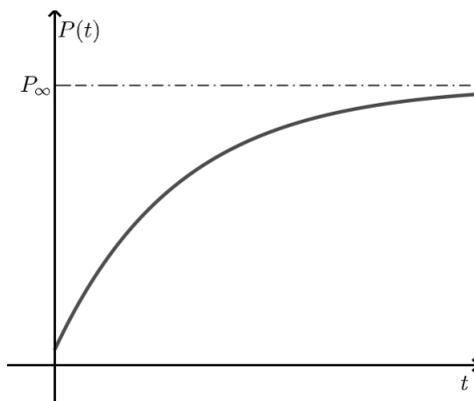


Figura 2: Representação da curva genérica do modelo exponencial assintótico.

As constantes  $a$  e  $b$  podem ser determinadas pela linearização da Equação (2.3). Para isso, basta observar que ela pode ser reescrita como  $P_\infty - P(t) = be^{at}$  e, então, ao se aplicar o logaritmo natural em ambos os lados obtendo-se a Equação (2.4), desde que  $P(t) < P_\infty$ .

$$\ln [P_\infty - P(t)] = at + \ln b. \quad (2.4)$$

Fazendo  $Y = \ln [P_\infty - P(t)]$  e  $\beta = \ln b$ , a Eq. (2.4) pode ser reescrita como

$$Y = at + \beta. \quad (2.5)$$

Então, o coeficiente angular da reta de ajuste da Equação (2.5), para pontos de coordenadas  $(t, Y)$ , é exatamente a constante  $a$  do modelo exponencial assintótico da Equação (2.3). Já o coeficiente  $b$  desse modelo pode ser determinado fazendo-se

$$b = e^\beta.$$

Com isso, o modelo exponencial assintótico fica totalmente determinado.

### 2.3 Método de Ford-Walford para populações de equilíbrio

O método de *Ford-Walford* pode ser aplicado a um conjunto de pontos  $\{(t_i, P_i)\}$  com  $i = 1, 2, \dots, n$ , em que os valores  $P_i$  apresentam comportamento assintótico, ou seja,

$$\lim_{t_i \rightarrow \infty} P_i = P_\infty.$$

Esse método ajusta curvas considerando valores subsequentes de dados  $(P_i, P_{i+1})$ , onde  $P_i = P(t_i)$ , e busca estabelecer uma função de ajuste,

$$P_{i+1} = g(P_i),$$

considerando que próximo ao valor de estabilização,  $P_\infty$ , o valor de  $P_i$  é aproximadamente igual a  $P_{i+1}$ , i.e.,

$$P_i \approx P_{i+1}.$$

Sendo a função de ajuste contínua, o valor de estabilização é um ponto fixo de  $g$ , ou seja,  $P_\infty = g(P_\infty)$  [1, 10]. Logo, por esse método o valor de  $P_\infty$  é determinado ao se encontrar a função de ajuste  $g$  e resolver o sistema

$$\begin{cases} P_{i+1} = g(P_i) \\ P_{i+1} = P_i \end{cases}. \quad (2.6)$$

E quando existe uma tendência de estabilidade, mas o conjunto de pontos indica mudança de concavidade, como é o caso da curva do modelo logístico, é adequado utilizar apenas valores de  $P_i$  posteriores ao ponto de inflexão [1, 10].

### 3 Medidas de peso e estatura de indivíduos com SD

Como já mencionado, serão utilizados os dados reais de medidas de peso e estatura, ambos em função da idade, de crianças e adolescentes com SD, na faixa etária de 3 a 20 anos, obtidos em [2].

As Tabelas 1 e 2 são adaptações de todos os valores de peso em função da idade, para meninos e meninas, respectivamente, apresentados em [2]. Nestas adaptações são dados idade, número de indivíduos em que as medidas foram obtidas, valor médio para o peso de cada idade, além dos percentis de 3%, 10%, 25%, 50%, 75%, 90% e 97%, utilizados nas construções das curvas de referência.

Tabela 1: Pesos (em kg) de jovens com síndrome de Down do sexo masculino na faixa etária de 3 e 20 anos, adaptados de [2].

Idade (t)	n	Média	Percentis (peso, kg)						
			3%	10%	25%	50%	75%	90%	97%
3	96	14,00	9,44	10,90	12,37	13,83	15,29	16,76	18,22
4	82	15,85	10,43	12,29	14,14	15,99	17,85	19,70	21,55
5	79	18,66	11,47	13,78	16,10	18,41	20,73	23,04	25,36
6	68	20,78	12,58	15,44	18,29	21,14	23,99	26,85	29,70
7	75	23,84	13,87	17,34	20,81	24,28	27,75	31,22	34,69
8	80	27,50	15,37	19,53	23,69	27,85	32,01	36,17	40,33
9	74	31,62	17,09	21,98	26,88	31,77	36,66	41,55	46,44
10	80	34,91	19,07	24,70	30,33	35,95	41,58	47,21	52,84
11	80	38,29	21,32	27,67	34,02	40,37	46,73	53,08	59,43
12	71	46,23	23,80	30,84	37,88	44,92	51,96	59,00	66,04
13	66	51,31	26,38	34,03	41,68	49,33	56,98	64,64	72,29
14	69	55,76	28,90	37,05	45,20	53,36	61,51	69,66	77,82
15	51	58,54	31,27	39,80	48,33	56,86	65,39	73,92	82,45
16	42	62,34	33,45	42,24	51,03	59,82	68,61	77,40	86,19
17	42	63,27	35,46	44,40	53,34	62,28	71,22	80,16	89,10
18	32	65,22	37,33	46,34	55,34	64,35	73,36	82,36	91,37
19	25	59,82	39,14	48,16	57,17	66,19	75,20	84,22	93,23
20	19	64,37	40,96	49,96	58,95	67,95	76,95	85,95	94,95

Relembramos que cada percentil, para o estudo realizado, significa que aquele percentual dos meninos e meninas possui peso inferior ao valor indicado. Por exemplo, o percentil de 97% para a idade de 3 anos, na Tabela 1, significa que 97% dos 96 meninos

avaliados possuíam peso inferior a 18, 22 kg. Para as meninas, a Tabela 2 apresenta que 97% das 81 meninas avaliadas, com idade de 3 anos, possuíam peso inferior a 17, 10 kg.

Tabela 2: Pesos (em kg) de jovens com síndrome de Down do sexo feminino na faixa etária de 3 e 20 anos, adaptados de [2].

Idade (t)	n	Média	Percentis (peso, kg)						
			3%	10%	25%	50%	75%	90%	97%
3	81	13,00	8,78	10,17	11,55	12,94	14,33	15,71	17,10
4	77	15,26	10,02	11,74	13,46	15,18	16,90	18,62	20,34
5	64	17,41	11,29	13,39	15,48	17,58	19,68	21,78	23,88
6	55	20,13	12,69	15,24	17,78	20,33	22,87	25,42	27,96
7	56	23,46	14,30	17,37	20,43	23,50	26,57	29,64	32,71
8	59	26,77	16,10	19,79	23,47	27,16	30,84	34,52	38,21
9	65	30,88	18,10	22,49	26,87	31,25	35,64	40,02	44,41
10	51	34,96	20,22	25,36	30,51	35,66	40,80	45,95	51,10
11	51	40,58	22,35	28,27	34,20	40,13	46,05	51,98	57,90
12	46	44,65	24,37	31,04	37,70	44,37	51,04	57,70	64,37
13	53	52,40	26,19	33,51	40,83	48,14	55,46	62,77	70,09
14	46	52,28	27,75	35,59	43,43	51,27	59,11	66,95	74,80
15	37	54,15	29,06	37,31	45,56	53,82	62,07	70,33	78,58
16	39	55,92	30,19	38,77	47,34	55,91	64,48	73,06	81,63
17	26	54,72	31,23	40,05	48,86	57,68	66,50	75,32	84,14
18	22	57,47	32,21	41,23	50,25	59,26	68,28	77,29	86,31
19	17	61,75	33,18	42,37	51,55	60,74	69,92	79,11	88,29
20	15	58,57	34,15	43,48	52,82	62,16	71,50	80,84	90,18

A partir dos dados apresentados nas Tabelas 1 e 2 foram construídas as curvas de peso em função da idade para meninos e meninas, com base em todos os percentis determinados, conforme pode ser visualizado na Figura 3, sendo que em 3a têm-se as curvas de peso para meninos e em 3b as curvas de peso para meninas.

Observe que para meninos e meninas, em todos os percentis determinados em [2], as curvas começam o crescimento com tendência exponencial, e após algum período mudam de concavidade, passando a indicar uma tendência de estabilidade. É devido a essas características que uma das partes do objetivo principal desse trabalho é verificar se realmente essas curvas podem ser representadas por modelos logísticos, um para cada percentil.

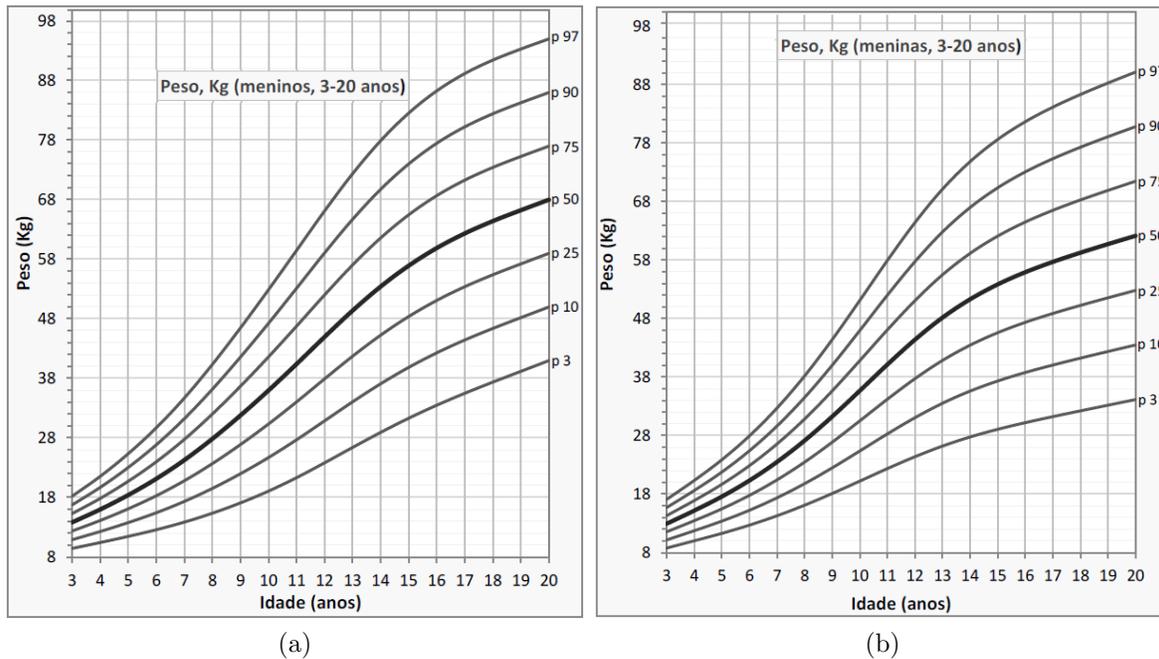


Figura 3: Curvas de peso em função da idade na faixa etária de 3 a 20 anos. Em (a) para meninos e em (b) para meninas [2].

Os dados referentes à estatura dessas mesmas crianças e adolescentes são apresentados nas Tabelas 3 e 4. Ambas também são adaptações para os dados apresentados em [2], de forma a conterem a quantidade de crianças e adolescentes avaliados para cada idade na faixa etária de 3 a 20 anos, a média das estaturas (em *cm*) e os valores dos percentis de 3%, 10%, 25%, 50%, 75%, 90% e 97%.

Com base nos dados das Tabelas 3 e 4 foi possível construir os gráficos das curvas de estatura para crianças e adolescentes dos sexos masculino e feminino, na faixa etária de 3 a 20 anos, para todos os percentis determinados. Essas curvas podem ser visualizadas na Figura 4, sendo que em 4a têm-se as curvas referentes às estaturas de meninos, e em 4b as curvas referentes às estaturas de meninas.

Em ambas as partes da Figura 4, observe que as curvas iniciam o crescimento de forma acelerada, sempre com concavidade voltada para baixo, mas com tendência de estabilidade, independente do percentil analisado. Essas características visuais levaram a parte do objetivo deste trabalho, que é analisar se esse comportamento de crescimento se ajusta bem ao modelo exponencial assintótico.

Tabela 3: Estaturas (em *cm*) de jovens com síndrome de Down do sexo masculino na faixa etária de 3 e 20 anos, adaptados de [2].

Idade (t)	n	Média	Percentis (estatura, <i>cm</i> )						
			3%	10%	25%	50%	75%	90%	97%
3	86	91,75	83,25	86,13	89,00	91,88	94,76	97,64	100,51
4	79	97,64	88,28	91,35	94,41	97,48	100,55	103,62	106,69
5	71	103,40	93,25	96,50	99,76	103,01	106,27	109,52	112,78
6	64	108,34	98,17	101,61	105,05	108,49	111,92	115,36	118,80
7	71	113,70	103,12	106,74	110,37	113,99	117,61	121,24	124,86
8	76	119,96	108,15	111,96	115,77	119,58	123,39	127,21	131,02
9	71	124,79	113,25	117,25	121,24	125,24	129,23	133,23	137,23
10	76	129,89	118,43	122,59	126,76	130,93	135,09	139,26	143,43
11	76	135,16	123,59	127,89	132,20	136,50	140,80	145,11	149,41
12	69	142,50	128,45	132,84	137,23	141,61	146,00	150,39	154,78
13	66	148,07	132,62	137,04	141,46	145,88	150,31	154,73	159,15
14	67	151,00	135,91	140,33	144,75	149,17	153,59	158,01	162,43
15	49	151,84	138,37	142,78	147,19	151,59	156,00	160,40	164,81
16	39	155,68	140,16	144,55	148,94	153,33	157,22	162,11	166,50
17	41	154,08	141,42	145,80	150,18	154,55	158,93	163,31	167,68
18	29	152,77	142,35	146,72	151,09	155,45	159,82	164,19	168,55
19	22	152,41	143,12	147,48	151,83	156,19	160,55	164,91	169,26
20	17	153,74	143,83	148,17	152,52	156,87	161,22	165,57	169,92

Tabela 4: Estaturas (em *cm*) de jovens com síndrome de Down do sexo feminino na faixa etária de 3 e 20 anos, adaptados de [2].

Idade (t)	n	Média	Percentis (estatura, <i>cm</i> )						
			3%	10%	25%	50%	75%	90%	97%
3	77	89,65	81,24	84,02	86,79	89,57	92,34	95,12	97,90
4	72	95,44	86,54	89,43	92,33	95,22	98,12	101,01	103,91
5	64	100,72	91,92	94,94	97,96	100,97	103,99	107,01	110,02
6	51	106,16	97,51	100,66	103,81	106,96	110,11	113,26	116,42
7	54	113,37	103,27	106,56	109,85	113,14	116,44	119,73	123,02
8	58	119,15	108,92	112,34	115,76	119,18	122,60	126,02	129,44
9	59	125,23	114,19	117,71	121,23	124,75	128,27	131,79	135,31
10	44	129,00	118,90	122,48	126,07	129,75	133,24	136,82	140,41
11	44	134,20	122,97	126,59	130,20	133,82	137,43	141,05	144,66
12	43	136,91	126,35	129,97	133,59	137,21	140,83	144,45	148,07
13	50	141,35	129,02	132,63	136,24	139,85	143,46	147,07	150,68
14	45	142,52	131,03	134,62	138,22	141,81	145,40	149,00	152,59
15	38	143,12	132,48	136,06	139,64	143,22	146,80	150,37	153,95
16	40	143,82	133,51	137,08	140,65	144,21	147,78	151,35	154,92
17	25	144,35	134,24	137,80	141,36	144,92	148,48	152,05	155,61
18	22	145,77	134,77	138,33	141,88	145,44	148,99	152,55	156,10
19	15	145,30	135,18	138,73	142,28	145,83	149,38	152,93	156,48
20	15	143,12	135,53	139,07	142,62	146,17	149,71	153,26	156,81

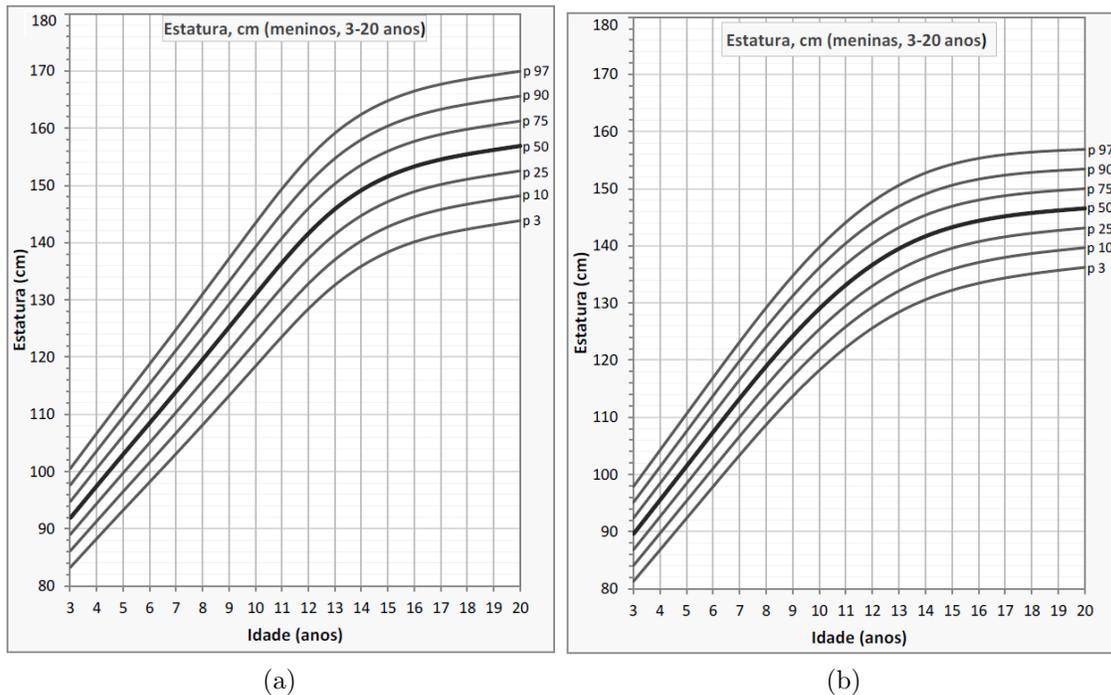


Figura 4: Curvas de estatura em função da idade na faixa etária de 3 a 20 anos. Em (a) para meninos e em (b) para meninas [2].

## 4 Modelagem matemática com uso de dados reais

Nesta seção, com base nos dados das Tabelas 1–4, o objetivo é determinar quais os valores ótimos dos parâmetros de ajuste, de forma a verificar se, de fato, os modelos logístico e exponencial assintótico representam bem, respectivamente, as evoluções do peso e estatura dos indivíduos com SD na faixa etária estudada. Também serão apresentados os resultados de análises das diferenças percentuais médias entre as previsões dos modelos e os dados reais, para verificar o quão próximo da realidade os modelos determinados estarão.

### 4.1 Modelagem do peso de meninos pelo modelo logístico

O modelo logístico, dado pela Equação (2.2), necessita do valor limite,  $P_\infty$ . Para estimar esse valor foi utilizado o método de Ford-Walford, que considera apenas valores posteriores ao ponto de inflexão. E para determinar este ponto, com base nos dados da Tabela 1, para o percentil de 97%, foi utilizada a fórmula de diferenças finitas centradas

de segunda ordem, dada por

$$P_i'' \approx \frac{P_{i+1} - 2P_i + P_{i-1}}{(\Delta t)^2} \quad (4.1)$$

que é uma aproximação para a derivada segunda da função  $P$  em  $t = t_i$ , em que  $\Delta t = t_i - t_{i-1}$  [4]. A ideia é verificar onde ocorre mudança de sinal para as aproximações da derivada segunda, pois é nessa região que estará o ponto de inflexão [11].

Como as idades analisadas variam de um em um ano, tem-se que  $\Delta t = t_i - t_{i-1} = 1$   $\forall i = 2, \dots, 18$ , em que  $t_1 = 3$ ,  $t_2 = 4$ ,  $\dots$ ,  $t_{18} = 20$ . Com isso, a aproximação (4.1) pode ser reescrita como

$$P_i'' \approx P_{i+1} - 2P_i + P_{i-1}. \quad (4.2)$$

A Tabela 5 apresenta os resultados obtidos para a aproximação da derivada segunda para o modelo logístico procurado, para cada idade de  $t = 4$  até  $t = 19$  anos.

Tabela 5: Aproximações da derivada segunda do modelo logístico para os percentis de peso de 97%.

Idade (t)	Peso (P)	$P''(t_i)$
3	18,22	-
4	21,55	0,48
5	25,36	0,53
6	29,70	0,65
7	34,69	0,65
8	40,33	0,47
9	46,44	0,29
10	52,84	0,19
11	59,43	0,02
12	66,04	-0,36
13	72,29	-0,72
14	72,82	-0,90
15	82,45	-0,89
16	86,19	-0,83
17	89,10	-0,64
18	91,37	-0,41
19	93,23	-0,14
20	94,95	-

Com base nos resultados da Tabela 5 percebe-se que  $P''(t_i) > 0$  para idades até 11 anos, e que  $P''(t_i) < 0$  para as idades de 12 até 19 anos. Então, pelo teste da concavidade, segue que no intervalo  $(3, 11]$  a função  $P$  tem concavidade voltada para cima e em  $(11, 19]$  voltada para baixo. Sendo assim, a mudança de concavidade ocorre pouco depois de  $t = 11$  e, por isso, consideramos que este é o ponto de inflexão de  $P$ .

Portanto, os dados utilizados para obtenção de  $P_\infty$  são os da forma  $(P_i, P_{i+1})$ , cujos valores estão na Tabela 6.

Tabela 6: Dados utilizados para obtenção do peso de equilíbrio,  $P_\infty$ .

$P_i$	66,04	72,29	77,82	82,45	86,19	89,10	91,37	93,23
$P_{i+1}$	72,29	77,82	82,45	86,19	89,10	91,37	93,23	94,95

O ajuste linear para os pontos da Tabela 6 é dado pela equação

$$P_{i+1} = 0,8224P_i + 18,234. \quad (4.3)$$

Então, considerando a tendência de estabilidade quando  $t \rightarrow \infty$ , pode-se considerar  $P_i = P_{i+1}$  e aplicar essa igualdade na Equação (4.3) obtendo  $P_i = 0,8224P_i + 18,234$ . Isso implica que o peso limite para meninos com SD até 20 anos de idade é igual a

$$P_\infty = P_i = 102,67 \text{ Kg}.$$

Agora, utilizando a condição inicial exatamente no ponto de inflexão, ou seja, que  $P(11) = 59,43 = P_0$ , e aplicando-a na Equação (2.2), tem-se que:

$$P(t) = \frac{102,67}{1 + \left(\frac{102,67}{59,43} - 1\right) \cdot e^{-r(t-11)}},$$

que resulta na Equação (4.4):

$$P(t) = \frac{102,67}{1 + 0,7276 \cdot e^{-r(t-11)}} \quad (4.4)$$

A estimativa do valor de  $r$  pode ser feita de várias formas. Por exemplo, para o percentil de 97%, na Tabela 1, têm-se várias condições, desde  $P(3) = 18,22$  até  $P(20) = 94,95$ . Com exceção da condição  $P(11) = 59,43$ , cada uma delas ao ser aplicada na Equação (4.4) permite determinar um valor distinto para  $r$ , e cada um determina uma curva logística.

Utilizando a condição  $P(20) = 94,95$  na Equação (4.4), tem-se que

$$94,95 = \frac{102,67}{1 + 0,7276 \cdot e^{-r(20-11)}} \Rightarrow e^{-9r} = \frac{\frac{102,67}{94,95} - 1}{0,7276} \Rightarrow -9r = \ln \left( \frac{\frac{102,67}{94,95} - 1}{0,7276} \right),$$

e, então,  $r \approx 0,2435$ , determinando o modelo logístico da Equação (4.5)

$$P(t) = \frac{102,67}{1 + 0,7276 \cdot e^{-0,2435(t-11)}} \quad (4.5)$$

Se qualquer outra condição fosse utilizada os modelos logísticos obtidos determinariam resultados muito próximos das estimativas previstas pela Equação (4.5). Por isso, consideraremos esta equação para representar o peso em função do tempo, para o percentil de 97%, de crianças e adolescentes com SD da faixa etária de 3 a 20 anos.

Outra possibilidade seria considerar que  $r$  é variável, e determinar uma função de ajuste para seus valores,  $r = f(t)$ . Neste caso, o modelo logístico ficaria da forma

$$P(t) = \frac{102,67}{1 + 0,7276 \cdot e^{-f(t)(t-11)}},$$

mas essa possibilidade não será tratada neste estudo. Mais detalhes desta possibilidade, e de outras, podem ser obtidos em [1].

Aproximando as derivadas segundas para os dados dos percentis de 50% e 3%, verifica-se que os pontos de inflexão ocorrem, respectivamente, nas idades de 11 e 12 anos, ou seja, nos pontos (11, 40.37) e (12, 23.80). Com isso, os pesos máximos encontrados para esses dois percentis são, nesta ordem, 78,43 Kg e 67,82 Kg.

Em seguida, considerando a condição  $P(20) = 67,95$  para o modelo do percentil de 50% e  $P(20) = 40,96$  para o percentil de 3%, os respectivos valores aproximados da constante  $r$  são 0,2203 e 0,1296.

Então, as curvas logísticas para os percentis de 97%, 50% e 3% são as representadas pelas equações dadas na Tabela 7.

A visualização das curvas geradas pelos três modelos da Tabela 7, juntamente com os pontos utilizados em suas construções, está na Figura 5.

O estudo das diferenças percentuais entre as previsões dos modelos obtidos e das medidas reais de peso também foi feito. O modelo logístico para o percentil de 3% apresentou diferença percentual média de 3,79% em relação aos dados reais utilizados em sua construção. O modelo para o percentil de 50% teve diferença percentual levemente menor, 2,42%, e para o percentil de 97% ocorreu a menor diferença percentual, que foi de 1,72%. Esses resultados indicam um bom ajuste entre todos os modelos encontrados e os dados reais, e mostram que os percentis de peso de crianças e adolescentes com SD, do sexo masculino, na faixa etária de 3 a 20 anos, podem ser representados por modelos logísticos.

Tabela 7: Equações das curvas logísticas do peso de meninos.

Percentil	Modelo encontrado
97%	$P(t) = \frac{102,67}{1 + 0,7276 \cdot e^{-0,2435(t-11)}}$
50%	$P(t) = \frac{78,43}{1 + 0,9428 \cdot e^{-0,2203(t-11)}}$
3%	$P(t) = \frac{67,82}{1 + 1,8494 \cdot e^{-0,1296(t-12)}}$

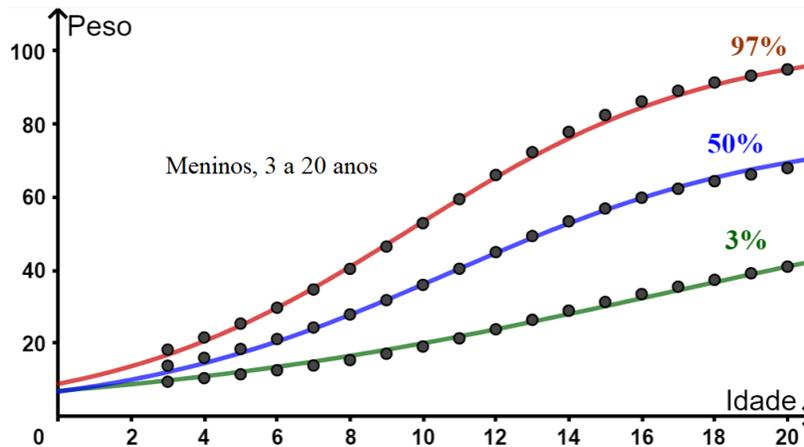


Figura 5: Visualização das curvas dos modelos obtidos e dos pontos utilizados.

## 4.2 Modelagem do peso de meninas pelo modelo logístico

Seguindo o mesmo processo da modelagem realizada para o peso dos meninos, foi verificado que para os dados das meninas, em todos os percentis analisados, os pontos de inflexão ocorrem na idade de 10 anos. Com isso, para o percentil de 97% o peso máximo determinado foi de 98,22 Kg, com ponto de inflexão em (10, 51.10). Para os percentis de 50% e 3% foram, respectivamente, 68,86 Kg e 40,86 Kg, com pontos de inflexão (10, 35.66) e (10, 20.22).

Aplicando a condição  $P(20) = 90,18$  para o modelo logístico do percentil de 97%,  $P(20) = 62,16$  para o de 50% e  $P(20) = 34,15$  para o de 3%, o valor de  $r$  foi encontrado para cada um dos casos, e os modelos obtidos são os apresentados na Tabela 8.

O estudo das diferenças percentuais entre as previsões dos modelos obtidos e das medidas reais de peso de meninas foi feito, e verificou-se valores percentuais médios maiores do que os encontrados para os meninos.

Tabela 8: Equações das curvas logísticas do peso de meninas.

Percentil	Modelo encontrado
97%	$P(t) = \frac{98,22}{1 + 0,9221 \cdot e^{-0,2336(t-10)}}$
50%	$P(t) = \frac{68,86}{1 + 0,931 \cdot e^{-0,2156(t-10)}}$
3%	$P(t) = \frac{40,86}{1 + 1,0209 \cdot e^{-0,1648(t-10)}}$

O modelo logístico para o percentil de 3% apresentou diferença percentual média de 3,84% em relação aos dados reais utilizados em sua construção. O modelo para o percentil de 50% teve diferença percentual de 2,59%, e para o percentil de 97%, assim como no caso dos dados para meninos, ocorreu a menor diferença percentual, que foi de 2,27%. Esses resultados também indicam um bom ajuste entre os modelos encontrados e os dados reais, mesmo tendo diferença percentual média maior do que para o caso dos meninos, e mostram que os percentis de peso de crianças e adolescentes do sexo feminino, com SD, na faixa etária de 3 a 20 anos, podem ser representados por modelos logísticos.

A visualização das curvas geradas pelos modelos apresentados na Tabela 8, juntamente com os pontos que representam os valores reais obtidos em [2], e utilizados na construção dos modelos, pode ser feita na Figura 6.

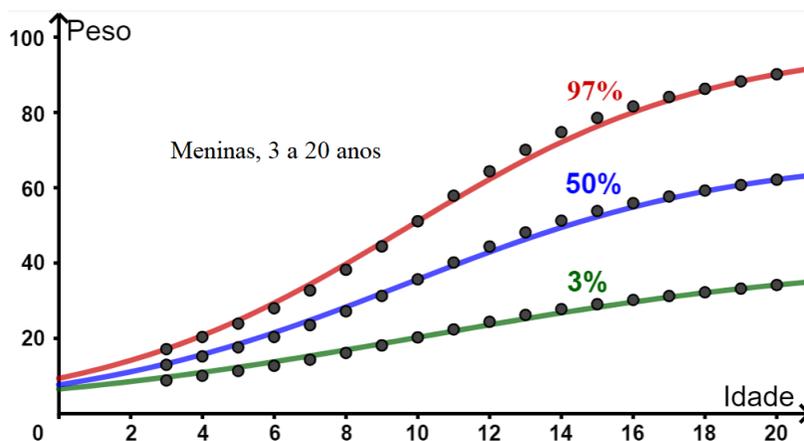


Figura 6: Visualização das curvas dos modelos obtidos e dos pontos utilizados.

### 4.3 Modelagem da estatura de meninos pelo modelo exponencial assintótico

Para a estatura de meninos e meninas a visualização da Figura 4 permite observar que as curvas iniciam o crescimento de forma acelerada, com concavidade voltada para baixo e com tendência de estabilidade em todos os percentis. Aqui, verificaremos se é possível determinar os parâmetros necessários para que os dados utilizados na construção da Figura 4a se ajustem bem a um modelo exponencial assintótico.

Como as curvas de estatura da Figura 4 não possuem ponto de inflexão, todos os valores de estatura podem ser utilizados para determinar as estaturas de equilíbrio para os percentis de 97%, 50% e 3%, pelo método de Ford-Walford.

Então, sendo  $E(t) = E_t$  a estatura para a idade  $t$  de meninos, com  $3 \leq t \leq 20$ , o método de Ford-Walford tem ajuste linear de equação

$$E_{t+1} = 0,9156E_t + 16,186,$$

para o percentil de 97%, conforme se vê na Figura 7.

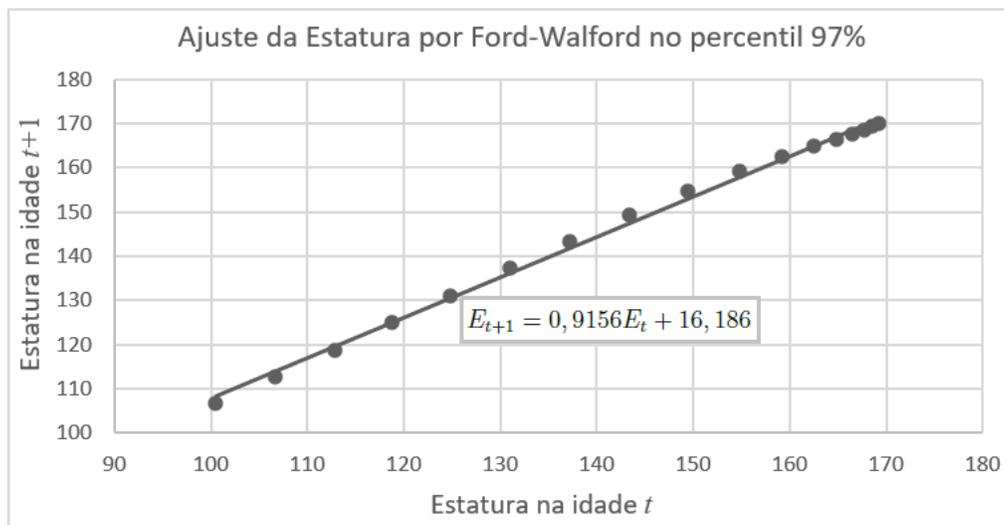


Figura 7: Ajuste linear pelo método de Ford-Walford para determinar a estatura máxima de meninos.

Considerando  $t \rightarrow \infty$  pode-se utilizar que  $E_{t+1} = E_t$  e, portanto

$$E_t = 0,9156E_t + 16,186 \Rightarrow 0,0844E_t = 16,186.$$

Sendo assim, a estatura máxima possível para meninos com SD, na faixa etária de 3 a 20 anos, é igual a

$$E_{\infty} = E_t = 191,78 \text{ cm.}$$

Falta determinar os valores dos parâmetros  $a$  e  $b$  da Equação (2.3), para as curvas dos três percentis modelados.

Como já apresentado na Equação (2.5), para determinar esses parâmetros é necessário fazer o ajuste linear  $Y = at + \beta$ , em que  $Y = \ln[E_{\infty} - E_t]$  e  $\beta = \ln b$ , sendo o parâmetro  $b$  determinado fazendo-se  $b = e^{\beta}$ .

A Tabela 9 apresenta todos os dados utilizados nesse ajuste, cuja equação obtida foi

$$Y = -0,0941t + 4,8089.$$

Tabela 9: Dados de linearização do modelo exponencial assintótico do percentil de 97%.

Idade ( $t$ )	Estatura ( $E_t$ )	$Y = \ln(191,78 - E_t)$
3	100,51	4,51
4	106,69	4,44
5	112,78	4,37
6	118,80	4,29
7	124,86	4,20
8	131,02	4,11
9	137,23	4,00
10	143,43	3,88
11	149,41	3,75
12	154,78	3,61
13	159,15	3,49
14	162,43	3,38
15	164,81	3,29
16	166,50	3,23
17	167,68	3,18
18	168,55	3,15
19	169,26	3,11
20	169,92	3,08

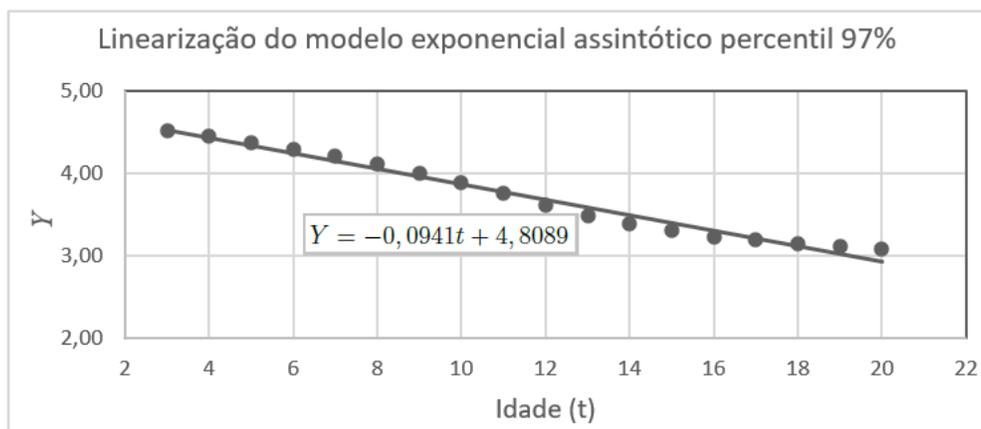


Figura 8: Ajuste linear para o modelo exponencial assintótico no percentil de 97%.

Logo, para o modelo exponencial assintótico dado pela Equação (2.3) tem-se que  $a = -0,0941$  e que  $\beta = 4,8089$ . Sendo assim,

$$b = e^{4,8089} = 122,60$$

e o modelo exponencial assintótico procurado para o percentil de 97%, dos meninos com SD na faixa etária de 3 a 20 anos é dado pela Equação (4.6):

$$E(t) = 191,78 - 122,60 \cdot e^{-0.0941t} \quad (4.6)$$

Para o percentil de 50% o método de Ford-Walford gerou o ajuste linear de equação  $E_{t+1} = 0,9206E_t + 14,256$ , e conseqüentemente a estatura de equilíbrio de 179,55 cm. Em seguida, após a linearização, foram encontrados os parâmetros  $a = -0,0888$  e  $b = 116,38$ .

Com raciocínio análogo ao feito para os percentis anteriores, os parâmetros para o modelo exponencial assintótico para o percentil de 3% também foram encontrados. A Tabela 10 apresenta as equações determinadas para os três percentis.

A análise das diferenças percentuais entre as previsões de cada um dos três modelos exponenciais assintóticos determinados e as estaturas reais apresentadas no trabalho [2] foi feita. Os valores encontrados foram praticamente os mesmos para todos os casos, sendo 1,52% de diferença percentual média para o modelo do percentil de 97%, 1,45% para o de percentil de 50% e 1,47% para o percentil de 3%.

Esses resultados mostram que os percentis de estatura em função da idade de meninos com SD, na faixa etária de 3 a 20 anos, para os três percentis analisados, podem ser modelados por modelos exponenciais assintóticos.

Tabela 10: Equações das curvas exponenciais assintóticas da estatura de meninos.

Percentil	Modelo encontrado
97%	$E(t) = 191,78 - 122,60 \cdot e^{-0,0941t}$
50%	$E(t) = 179,55 - 116,38 \cdot e^{-0,0888t}$
3%	$E(t) = 168,07 - 110,65 \cdot e^{-0,0821t}$

A junção dos pontos que representam as medidas de todos os três percentis analisados de estatura em função das idades, utilizados na determinação dos modelos da Tabela (10), com as curvas geradas pelas equações, é apresentada na Figura 9.

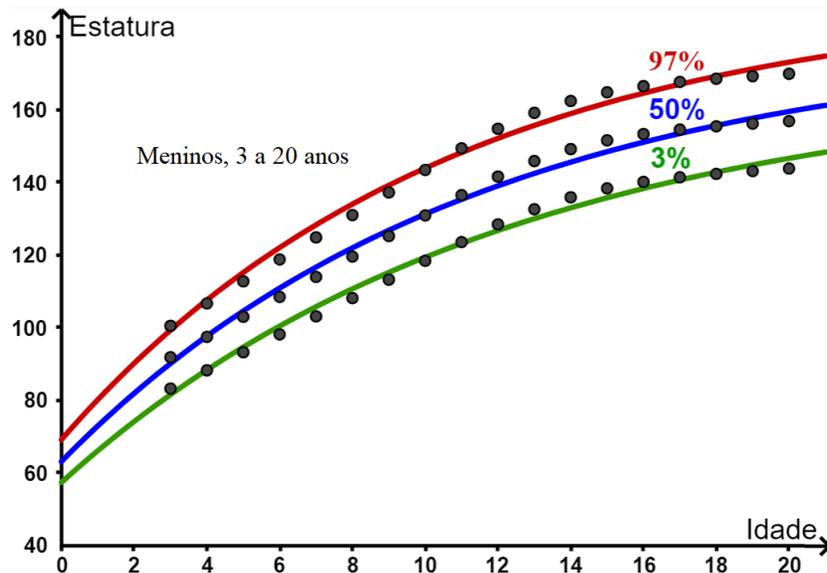


Figura 9: Visualização das curvas dos modelos exponenciais assintóticos obtidos e dos pontos utilizados.

#### 4.4 Modelagem da estatura de meninas pelo modelo exponencial assintótico

A mesma sequência de passos utilizada na Seção 4.3 foi realizada com os dados dos percentis de estatura para as meninas. A Tabela 11 apresenta os modelos encontrados para os três percentis.

Tabela 11: Equações das curvas exponenciais assintóticas da estatura de meninas.

Percentil	Modelo encontrado
97%	$E(t) = 167,54 - 97,77 \cdot e^{-0,1228t}$
50%	$E(t) = 157,17 - 94,59 \cdot e^{-0,1192t}$
3%	$E(t) = 146,87 - 91,49 \cdot e^{-0,1153t}$

As diferenças percentuais médias entre as previsões dos modelos determinados e as estaturas reais são muito próximas, sendo 1,71% de diferença percentual média para o modelo do percentil de 97%, 1,68% para o de percentil de 50% e 1,64% para o percentil de 3%.

Sendo assim, também para as meninas, verifica-se que os percentis de estatura analisados podem ser modeladas por modelos exponenciais assintóticos.

## 5 Conclusões

Pode-se concluir que os percentis de peso e estatura, ambos em função da idade, de meninos e meninas com SD na faixa etária de 3 a 20 anos, se ajustaram bem aos modelos logístico e exponencial assintótico, respectivamente. As diferenças percentuais entre as previsões dos modelos encontrados foram pequenas, especialmente para o percentil de 97% para peso e estatura de meninos, cuja diferença percentual média foi de 1,72% para o modelo logístico e de apenas 1,45% para o modelo exponencial assintótico.

Não foram encontrados trabalhos dedicados a verificar se evolução de peso e estatura ocorrem segundo modelos matemáticos, especialmente os modelos logístico e exponencial assintótico. Por isso, esse trabalho é inédito e mostra que as curvas dos percentis de desenvolvimento de peso e estatura de indivíduos com SD, de ambos os sexos, apresentam características matemáticas ainda não descritas na literatura.

Além desse trabalho mostrar que estas características matemáticas ocorrem, espera-se que também seja útil para fins didáticos, no estudo e ensino de técnicas de modelagem matemática em diversos níveis.

## Referências

- [1] Bassanezi, R. C. *Ensino aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. Editora Contexto: São Paulo, 2011.

- [2] Bertapelli, F. *Curvas de referência de crescimento para crianças e adolescentes com síndrome de Down com idade entre 0 e 20 anos*. Tese de Doutorado, 2016, Faculdade de Ciências Médicas, Unicamp.
- [3] Boyce, W. E.; DiPrima, R. C. *Elementary differential equations and boundary value problems*. 11rd edition. John Wiley & Sons: New York, 2017.
- [4] Burden, R. L.; Faires, J. D. *Numerical Analysis*. 9rd edition. Cengage Learning, 2011.
- [5] Coutinho, K. A.; Becher, T. V.; Junior, L. S. L. C.; Meinerz, C. C.; Pacheco, R. B. Síndrome de down, genética e prole: uma revisão de literatura. *Brazilian Journal of Health Review*, v. 4, n. 4, p. 17935–17947, 2021.
- [6] Domingues, J. S.; Silva, B. M.; Sá, D. L. População de Formiga-MG ajustada pelo método exponencial assintótico e sua comparação com os modelos clássicos de Gompertz e logístico. *Biomatemática*, v. 30, p. 39–54, 2020.
- [7] Fundação Síndrome de Down, *O que é síndrome de Down?* Disponível em: <https://www.fsdow.org.br/sobre-a-sindrome-de-down/o-que-e-sindrome-de-down/>
- [8] Ministério da Saúde, *Curvas de Crescimento da Organização Mundial da Saúde - OMS*. Disponível em: <https://aps.saude.gov.br/ape/vigilanciaalimentar/curvascrescimento>
- [9] Nascimento, L. C. N. Do; Oliveira, L. M. L. De; Nogueira, D. S.; Andrade, E. R.; Feitosa, L. F. Composição corporal de estudantes adultos com deficiência intelectual e síndrome de Down. *Revista Educação Especial*, v. 33, e7/1–23, 2020.
- [10] Melo, M. H. P. L.; Nunes, C. A. P. Método de Ford-Walford aplicado ao modelo generalizado de von bertalaný. *Série Matemática*, n. 11, p. 24–34, 2017.
- [11] Stewart, J. *Calculus - Early Transcendentals*. 6rd edition. Thomson Learning: California, 2009.
- [12] Zemel, B. S.; Papan, M.; Stallings, V. A.; Hall, W.; Schadt, K.; Freedman, D. S. et al. Growth Charts for Children With Down Syndrome in the United States. *Pediatrics*. *Pediatrics*, v. 136, e1204-11, 2015.

Domingues, J. S.

**Submetido em 01 de Agosto de 2022.**

**Revisado em 22 de Março de 2023.**

**Aceito em 17 de Abril de 2023.**