Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática

https://doi.org/10.34179/revisem.v8i1.18067

SOMA ITERADA DE ALGARISMOS DE RACIONAIS E NÚMEROS PRIMOS

Élis Gardel da Costa Mesquita
Universidade Federal do Tocantins
elisgardel@uft.edu.br

Resumo

Neste trabalho, estudamos as funções soma e soma iterada de algarismos estendidas ao conjunto dos números racionais com representação decimal finita e infinita. Mais especificamente, investigamos a soma de algarismos das partes periódicas de números racionais dos tipos k/q, $k/(pq^n)$, k/q^n, em que p e q são números primos maiores que 5, k um inteiro positivo que satisfaz certas condições e n um inteiro não negativo. Quando x é uma dízima periódica de um dos tipos acima, definimos $\rho(x)$ como o número inteiro cujos dígitos são iguais aos algarismos do período de x. Feito isto, provamos que a soma iterada de algarismos de $\rho(x)$ é constante e igual a 9, o que amplia, neste sentido, o resultado principal em [9]. Na sequência, mostramos que a soma iterada de racionais com representação finita das formas $\rho(x)/2^n$ e $\rho(x)/5^n$ são também constantes e iguais a 9, qualquer que seja o inteiro positivo n. Quando lidamos com frações em que o denominador é um primo menor ou igual a 5, fazemos algumas conjecturas sobre o comportamento da soma iterada de $1/2^n$, $1/3^n$ e $1/5^n$, para qualquer n inteiro positivo.
Palavras-chave: dízimas periódicas, representação finita, soma de algarismos, soma iterada de algarismos.

Abstract

In this work, we study the sum of digits and digital roots functions extended to the set of rational numbers with finite and infinite decimal representation. More specifically, we investigate the sum of digits of the periodic parts of rational numbers of the types k/q, $k/(pq^n)$, k/q^n, where p and q are prime numbers greater than 5, k is a positive integer that satisfies certain conditions and n a non-negative integer. When x is a periodic tithe of one of the above types, we define $\rho(x)$ as the whole number whose digits are equal to the digits of the x period. Then, we prove that the digital roots of $\rho(x)$ is constant and equal to 9, which expands, in this sense, the main result in [9]. In the following, we show that the digital roots of rationals with finite representation of the forms $\rho(x)/2^n$ and $\rho(x)/5^n$ are also constant and equal to 9, for all positive integer n. When dealing with fractions where the denominator is a prime less than or equal to

5, we lefting some conjectures about the behavior of the digital roots of $1/2^n$, $1/3^n$ and $1/5^n$, for any positive n integer.
Keewords: digital roots, finite representation, sum of digits, periodic tithe.

1 Introdução

A soma de algarismos (dígitos) de um número inteiro consiste em somar todos os dígitos do número que aparece em sua representação decimal. Formalmente, temos a seguinte definição.

Definição 1.1 (Função soma de algarismos)**.** A *função soma de algarismos* S é uma aplicação que a cada $x \in \mathbb{Z}_+$, $x = x_l x_{l-1} \cdots x_1 x_0$, associa ao número inteiro positivo $S(x)$ dado por

$$S(x) = x_l + x_{l-1} + \cdots + x_1 + x_0.$$

Uma aplicação bastante conhecida é o critério de divisibilidade por 3 ou 9: um número natural x é divisível por 3 ou 9 se, e somente se, $S(x)$ é divisível por 3 ou 9, respectivamente.

A função soma de algarismos é também utilizada para obter classes de números com diversas propriedades . Alguns exemplos são:

- os *números de Niven* são aqueles divisíveis pela soma de seus algarismos, por exemplo, 7164 é um número de Niven pois $7164 = 18 \cdot 398 = S(7164) \cdot 398$.

- O *número de Smith* é um número composto x para o qual $S(x)$ é igual a soma dos algarismos dos fatores de x em sua decomposição em produto de primos. Por exemplo, 22 é um número de Smith, uma vez que $S(22) = 2 + 2 = 2 + 1 + 1$, pois $22 = 2 \cdot 11$.

O leitor interessado nestes e outros números relacionados a $S(x)$, sugerimos [2], [3], [6].

Uma função intimamente relacionada com a soma de algarismo é a *soma iterada de algarismos*. Grosso modo, a soma iterada de algarismos de um número inteiro positivo é o valor obtido por meio de um processo iterativo de soma de dígitos, em que cada iteração é obtida a partir do resultado anterior até que reste apenas um algarismo. Por exemplo, a soma iterada de 234567 é igual a 9, pois $2+3+4+5+6+7 = 27$ e $2+7 = 9$.

Para formalização dessa ideia, necessitamos da seguinte definição.

Definição 1.2 (Iterações)**.** Seja S a função soma de algarismos. O processo iterativo de S é definido pela recorrência

$$S^1(x) = S(x),\ S^n(x) = S(S^{n-1}(x)),\ \text{para todo}\ n \geq 2.$$

Teorema 1.3. *Seja x um número inteiro positivo. Então, existe n_0 tal que $S^n(x)$ é constante para todo $n \geq n_0$.*

Demonstração. Veja ([11], pág. 295). $\square$

Estamos em condição de definir a função soma iterada de algarismos.

Definição 1.4. A função soma iterada de algarismos em $\mathbb{Z}_+$, S^*, é a função que associa a cada inteiro positivo x ao valor constante $S^{n_0}(x)$, isto é, $S^*(x) = S^{n_0}(x) = k$ com $k \in \{1, 2, \ldots, 9\}$.

As principais propriedades e curiosidades a cerca desta função podem ser encontradas nos trabalhos [11], [12], [13], [14], e nas referências contidas neles.

Agora, denote por $\rho(a/b)$ o número natural formado pelos dígitos do período da dízima periódica gerada pela fração irredutível a/b. Neste trabalho, estamos interessados na soma de algarismos da parte periódica de frações irredutíveis, cujo denominador envolve números primos. Na Tabela 1, vemos o que ocorre com a soma iterada dos dígitos da parte periódica fração $1/q$ para alguns números primos q.

$1/q$	Representação decimal	$\rho(1/q)$	$S^*(\rho(1/q))$
$1/2$	$0,5$	- -	- -
$1/3$	$0,3333\cdots$	3	3
$1/5$	$0,2$	- -	- -
$1/7$	$0,142857142857\cdots$	142857	9
$1/11$	$0,090909\cdots$	09	9
$1/13$	$0,076923076923\cdots$	076923	9
$1/17$	$0,0588235294117647705882\cdots$	0588235294117647	9

Tabela 1: Soma iterada de algarismos da parte periódica de $1/q$, q primo

Como podemos ver, S^* permanece constante e igual a 9 para valores de q maiores que 5. A questão que aparece naturalmente é se isto ocorre com todos os números primos. A resposta é afirmativa e foi provada em [9], em 2000, isto é, provou-se que a soma iterada dos dígitos da parte periódica de dízimas periódicas geradas por frações cujo numerador é 1 e o denominador é um número primo maior que 5 é constante e igual a 9.

Qual o valor de $S^*(\rho(k/q))$, quando deixamos o denominador q fixo, e fazemos o numerador k variar no conjunto dos números inteiros positivos? Esta é uma das questão norteadora deste trabalho e a resposta é, surpreendentemente, 9. Veja Tabela 2, em que deixamos os denominadores fixos iguais a 7 ou 11, e variamos o numerador entre 2 e 5.

k/q	Representação decimal	$\rho(k/q)$	$S^*(\rho(k/q))$
$2/7$	$0,285714285714\cdots$	285714	9
$3/7$	$0,4285714285714\cdots$	428571	9
$4/7$	$0,571428571428\cdots$	571428	9
$5/7$	$0,142857142857\cdots$	142857	9
$2/11$	$0,1818181818\cdots$	18	9
$3/11$	$0,2727272727\cdots$	27	9
$4/11$	$0,3636363636\cdots$	36	9
$5/11$	$0,4545454545\cdots$	45	9

Tabela 2: Soma iterada de algarismos da parte periódica de k/q, q fixado

Nosso objetivo nesse trabalho é mostrar que o padrão acima ocorre com k/q e com frações mais gerais envolvendo números primos no denominador. Para tanto, se faz necessário estender as funções soma de algarismos e soma iterada de algarismos ao conjunto das frações cujas representações decimais são finitas, o que é feito de maneira bastante simples. Feito isso, verificamos que a soma iterada de algarismos de frações das formas a), b), c) e d) abaixo, dentre outras, é constante e igual a 9, estendendo assim a classe de frações estudada em [9].

a) k/q, para qualquer inteiro positivo k com $\mathrm{mdc}(k,q)=1$ e $q>5$;

b) $k/(pq^n)$, para qualquer inteiro positivo k com $\mathrm{mdc}(k,pq)=1$, para todo inteiro positivo n e $q>5$;

c) $\rho(k/q)/2^n$, $\rho(k/q)/5^n$, para qualquer inteiro positivo k com $\mathrm{mdc}(k,q)=1$, para todo inteiro positivo n e $q>5$;

d) $\rho(k/(pq^n))/2^m$, $\rho(k/(pq^n))/5^m$, para qualquer inteiro positivo k, com $\mathrm{mdc}(k,pq)=1$, todo inteiro positivo n, todo inteiro positivo m e $q>5$,

Para além disso, investigamos a ação da função soma iterada de algarismos estendida aplicada a frações da forma $1/2^n$, $1/3^n$ e $1/5^n$. Mostramos que com exceção de $1/3^n$, o número 9 desempenha um papel central na aplicação da função S^* também para estas frações.

O trabalho está organizado da seguinte maneira. Na seção 1, introduzimos o assunto a apresentamos nossos objetivos principais. Na primeira parte da seção 2, definimos as funções soma e soma iterada de algarismos para números racionais com representação decimal finita, além de enunciar e demonstrar resultados básicos que serão utilizados no decorrer do texto. Na segunda parte, 2.1, lidamos com as dízimas periódicas onde as caracterizamos e ajustamos as notações. Na seção 3, enunciamos e provamos os principais resultados desse estudo. Na seção 4, fazemos a conclusão e indicamos direções para futuras investigações nessa linha.

2 Preliminares

Nesta seção definimos a função soma de algarismos, soma iterada de algarismos para números racionais com representação finita e estudamos algumas de suas propriedades. Esta função foi definida originalmente no conjunto dos números inteiros positivos, porém podemos estendê-la de forma bastante simples para o conjunto dos números racionais com representação finita. Para isto, vamos representar por $\mathbb{Q}^+_{\text{fin}}$ o conjunto de todos os números racionais com representação decimal finita e seja S a função soma de algarismos em $\mathbb{Z}_+$.

Primeiramente, provamos a seguinte proposição.

Proposição 2.1. *Existe uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{Q}^+_{\text{fin}}$ e $\mathbb{Z}_+$.*

Demonstração. De fato, dado $x_s^N = x_N x_{N-1} \cdots x_0, x_{-1} \cdots x_{-s} \in \mathbb{Q}^+_{\text{fin}}$, com $N, s \in \mathbb{N}$, tome a aplicação $f(x_s^N) = 10^s x_s^N$. □

Agora estamos em condição de definir a função soma de algarismos em $\mathbb{Q}^+_{\text{fin}}$.

Definição 2.2. A função soma de algarismos em $\mathbb{Q}^+_{\text{fin}}$ é a aplicação $S_r : \mathbb{Q}^+_{\text{fin}} \to \mathbb{N}$ dada por

$$S_r(x) = S(f(x)),$$

em que f vem da Proposição 2.1.

Exemplo 2.3. $S_r(2022, 365) = S(10^3 \times 2022, 365) = S(2022365) = 2 + 0 + 2 + 2 + 3 + 6 + 5 = 20$, enquanto $S_r(0, 000125) = S(10^6 \times 0, 000125) = S(125) = 1 + 2 + 5 = 8$.

Note que, $S_r(0, 000125) = 8 = S_r(125)$, o que implica que a função S_r é não injetiva. Por outro lado, dado qualquer número natural n, podemos tomar o numero $x = 1 \cdots 1$ de forma que $S_r(x) = n$. Assim a função S_r é sobrejetiva.

As duas próximas proposições decorrem diretamente da definição e as demonstrações serão omitidas.

Proposição 2.4. *Dado um número natural n, existem infinitos x em $\mathbb{Q}^+_{\text{fin}}$ tais que $S_r(x) = n$.*

Exemplo 2.5. Considere o $n = 8$. Então, para todo k natural, $x = 125 \times 10^{-k}$ tem a propriedade desejada. Ou seja, $S_r(x) = 8$.

Proposição 2.6. *Seja $x = x_N x_{N-1} \cdots x_0, x_{-1} \cdots x_{-s}$, com $N, s \in \mathbb{N}$ um número racional com representação finita e seja $\sigma : \{-s, -s+1, \cdots, -1, 0, 1, 2, \cdots, N\} \to \{-s, -s+1, \cdots, -1, 0, 1, 2, \cdots, N\}$ uma bijeção. Então,*

$$S_r(x_N x_{N-1} \cdots x_0, x_{-1} \cdots x_{-s}) = S_r(x_{\sigma(N)} x_{\sigma(N-1)} \cdots x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(-1)} \cdots x_{\sigma(-s)}).$$

Exemplo 2.7. $S_r(23, 125) = S_r(12, 235) = S_r(53, 122) = S_r(23125) = S_r(12523) = 13.$

Definição 2.8. A função *soma iterada de algarismos*, $S_r^* : \mathbb{Q}_{\text{fin}}^+ \to \mathbb{N}$, é a função que a cada número racional com representação finita x associa ao número natural obtido por repetidas somas dos algarismos de x até que reste um único algarismo, isto é, $S_r^*(x) = S^*(f(x))$.

Por exemplo, se $x = 123, 456$, então $S_r(x) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ e $S_r^2(x) = S_r(21) = 3$. Logo, $S_r^*(x) = 3$.

Proposição 2.9. *Seja $x \in \mathbb{Q}_{\text{fin}}^+$. Então $S_r^*(x) = 9$ se, e somente se, $S_r(x)$ é um múltiplo de 9.*

Demonstração. De fato, suponha que $S_r(x) = 9k_1$ para algum inteiro k_1. Então

$$\begin{aligned} S_r^2(x) = S_r(9k_1) &= S(f(9k_1)) \\ &= S(9k_1) \\ &= 9k_2, \end{aligned}$$

para algum inteiro k_2, com $1 \leq k_2 \leq k_1$. Fazendo a próxima iteração, obtemos $S_r^3(x) = 9k_3$ para algum inteiro k_3, com $1 \leq k_3 \leq k_2 \leq k_1$. Assim, obtemos uma sequência (k_n) em $\mathbb{Z}$ limitada e decrescente, logo, convergente. Como a sequência não possui ponto de acumulação, segue que existe um n_0 tal que $k_n = 1$ para todo $n \geq n_0$. Consequentemente,

$$S_r^*(x) = S_r^{n_0}(x) = 9k_{n_0} = 9.$$

Reciprocamente, suponha que $S_r^*(x) = 9$. Então $S^*(f(x)) = 9$ o que implica $f(x) = 9k$ para algum inteiro positivo k. Portanto,

$$S_r(x) = S(f(x)) = 9k',$$

para algum inteiro k', como queríamos. □

Proposição 2.10. *Seja x um número racional com representação finita tal que $S_r(x)$ é um múltiplo de 9. Então,*

$$S_r^*\left(\frac{x}{2^n}\right) = 9 \quad e \quad S_r^*\left(\frac{x}{5^n}\right) = 9,$$

qualquer que seja o inteiro n.

Demonstração. Segue da Proposição 2.9 e das Proposições 10 e 11 em [5]. □

A questão que surge é a seguinte: os números racionais $x/2^n$ e $x/5^n$ possuem representação finita? A resposta é afirmativa e segue como consequência do Teorema a seguir.

Teorema 2.11. *Um número racional a/b admite representação decimal finita se, e somente se, quando escrito na forma irredutível, a decomposição em fatores primos de seu denominador possui apenas os fatores 2 ou 5.*

Demonstração. Veja ([7], pág. 2). □

2.1 Dízimas periódicas

É sabido que um número racional ou tem representação decimal finita ou é uma *dízima periódica*. Uma dízima periódica é um número cuja representação decimal é da forma

$$x = s, a_1 \dots a_m a_1 \dots a_m \dots \quad \text{ou} \quad x = s, b_1 \dots b_n a_1 \dots a_m a_1 \dots a_m \dots . \tag{2.1}$$

Na notação acima, $a_1 \dots a_m$ é chamado *período*, $b_1 \dots b_n$ é chamado *pré-período*, s a *parte inteira* de x e m o *comprimento* do período e n o comprimento do pré-período.

Dado

$$x = s, b_1 \dots b_n a_1 \dots a_m a_1 \dots a_m \dots$$

escreva

$$x = s, b_1 \dots b_n a_1 \dots a_m a_1 \dots a_m \dots = s + y$$

em que

$$y = 0, b_1 \dots b_n a_1 \dots a_m a_1 \dots a_m \dots .$$

Igualando a parte após a vírgula, temos

$$\begin{aligned} y &= 0, b_1 \dots b_n a_1 \dots a_m a_1 \dots a_m \dots \\ 10^n y &= b_1 \dots b_n, a_1 \dots a_m a_1 \dots a_m \dots \\ 10^{n+m} y &= b_1 \dots b_n a_1 \dots a_m, a_1 \dots a_m \dots \\ 10^{n+m} y - 10^n y &= b_1 \dots b_n a_1 \dots a_m - b_1 \dots b_n \\ y &= \frac{b_1 \dots b_n a_1 \dots a_m - b_1 \dots b_n}{10^{n+m} - 10^n}. \end{aligned}$$

Observe que $10^{n+m} - 10^n = 10^n(10^m - 1) = 99\ldots90\ldots0$, em que o 9 aparece m vezes e o 0 aparece n vezes. Sendo assim, obtemos a representação fracionária para a dízima periódica

$$x = s + \frac{b_1 \ldots b_n a_1 \ldots a_m - b_1 \ldots b_n}{99 \ldots 90 \ldots 0}. \tag{2.2}$$

A notação que usaremos para representar a parte periódica é $\overline{a_1 \ldots a_m}$. O lado direito em (2.2) é chamada de *fração geratriz* da dízima periódica. Para mais detalhes e curiosidades sobre dízimas periódicas veja [1], [7], [8] e [10].

Definição 2.12. Denotamos por $\mathbb{Q}_{\text{per}}$ o conjunto dos números racionais que são dízimas periódica, isto é,

$$\mathbb{Q}_{\text{per}} = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \, : \, \frac{a}{b} = s, b_1 \ldots b_n \overline{a_1 \ldots a_\ell} \right\}.$$

O próximo teorema caracteriza as frações que possuem representação decimal infinita, ou seja, as frações irredutíveis que são dízimas periódicas.

Teorema 2.13. *A fração irredutível a/b, com $0 < a < b$, é uma dízima periódica se, e somente se,* $\text{mdc}(10, b) = 1$*. Neste caso, o comprimento do período é o menor inteiro positivo t satisfazendo a congruência $10^t \equiv 1 \pmod b$.*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em ([4], pág. 81). □

O menor t satisfazendo a congruência no Teorema 2.13 coincide com o comprimento do período da dízima. Um fato bastante conhecido é que o comprimento do período de uma dízima periódica não depende do numerador da fração geratriz, veja [8] para uma demonstração desse fato.

Corolário 2.14. *Seja q um primo e k um inteiro positivo tal que* $\text{mdc}(k, q) = 1$*. Então*

$$\frac{k}{q} \in \mathbb{Q}_{\text{per}}.$$

Em $\mathbb{Q}_{\text{per}}$ definimos ρ, a função que associa a cada dízima periódica ao número natural composto pelos algarismos de seu período, isto é,

Definição 2.15. Seja $\rho : \mathbb{Q}_{\text{per}} \to \mathbb{N}$ a função dada por

$$\rho(m, b_1 \ldots b_q \overline{a_1 \ldots a_\ell}) = a_1 \ldots a_\ell.$$

Exemplo 2.16. Considere a fração irredutível $x = 1/7$. Então

$$x = \frac{142857}{999999} = 0,\overline{142857},$$

e, por definição,

$$\rho\left(\frac{1}{7}\right) = 142857.$$

3 Soma iterada de algarismos e números primos

Nesta seção apresentamos os principais resultados deste artigo. Vamos verificar se alguns padrões envolvendo os recíprocos de números primos e a função soma de algarismos e soma iterada de algarismos. Mais especificamente, investigaremos se podemos ampliar a classe de frações para as quais o resultado 3.1, abaixo, se mantém.

Teorema 3.1 (Gray, 2000)**.** *Seja* $q > 5$ *um primo. Então vale*

$$S_r^*\left(\rho\left(\frac{1}{q}\right)\right) = 9.$$

Demonstração. A prova pode ser encontrada em ([9], pág. 84). □

Portanto, a soma iterada dos números cujos algarismos coincidem com os dos períodos das dízimas dadas pelos recíprocos dos números primos é sempre 9.

Exemplo 3.2. Considere $q = 13$. Assim

$$\frac{1}{13} = 0,\overline{076923} \quad \text{e} \quad \rho\left(\frac{1}{13}\right) = 076923.$$

e, consequentemente,

$$S_r\left(\rho\left(\frac{1}{13}\right)\right) = S_r(076923) = 27.$$

Portanto,

$$S_r^*\left(\rho\left(\frac{1}{13}\right)\right) = 9.$$

A seguir apresentamos uma generalização do Teorema 3.1. Este resultado garante que se fixarmos o denominador e variar o numerador, ainda assim teremos o mesmo valor para a soma iterada de algarismos.

Teorema 3.3. *Seja* $q > 5$ *um número primo e* k *um inteiro positivo tal que* $\mathrm{mdc}(k, q) = 1$*. Então vale*

$$S_r^*\left(\rho\left(\frac{k}{q}\right)\right) = 9.$$

Demonstração. Seja q um número primo maior que 5. Então, segue da Proposição 2.13 e da equação (2.2) que

$$\frac{1}{q} = s + \frac{b_1 \dots b_n a_1 \dots a_m - b_1 \dots b_n}{10^{n+m} - 10^n},$$

em que $n \geq 0$ e $m \geq 1$ são menores possíveis. Desde que $q > 5$, então $s = 0$ e, como pode ser visto na demonstração do Teorema 3.1, $n = 0$. Logo,

$$\frac{1}{q} = \frac{a_1 \ldots a_m}{10^m - 1} = \frac{A}{10^m - 1}.$$

Assim, $qA = 10^m - 1$, o que significa que q ou A dividem $10^m - 1$, o qual é um múltiplo de 9. Como $q \neq 3$ e primo, segue necessariamente que A divide $10^m - 1$ e portanto é um múltiplo de 9.

Por outro lado, podemos escrever

$$\frac{k}{q} = \begin{cases} \frac{k}{q}, & \text{se } k < q \\ a + \frac{r}{q}, & \text{se } k > q, \end{cases}$$

em que a e r vêm do algorítimo da divisão de Euclides, ou seja, são tais que $k = aq + r$, com $0 \leq r < q - 1$. Portanto,

$$\frac{k}{q} = \begin{cases} \frac{kA}{10^m - 1}, & \text{se } k < q \\ a + \frac{rA}{10^m - 1}, & \text{se } k > q. \end{cases}$$

Pela minimalidade de m, temos que

$$\rho\left(\frac{k}{q}\right) = \begin{cases} kA, & \text{se } k < q \\ rA, & \text{se } k > q. \end{cases}$$

Como A é múltiplo de 9, segue que kA e rA também o são. Portanto, segue da Proposição 2.9 que

$$S_r^*\left(\rho\left(\frac{k}{q}\right)\right) = S_r^*(r(a_1 \ldots a_m)) = S_r^*(k(a_1 \ldots a_m)) = 9.$$

$\square$

Exemplo 3.4. Vamos considerar $q = 13$ e $k \in \{1, 12, 2022\}$. Para $k = 1$

$$\frac{1}{13} = \frac{076923}{999999}.$$

Assim, $S_r(\rho(1/13)) = S_r(076923) = 0 + 7 + 6 + 9 + 2 + 3 = 27$ e $S_r(27) = 2 + 7 = 9$. Portanto, $S_r^*(\rho(1/13)) = 9$.

Para $k = 12$

$$\frac{12}{13} = \frac{923076}{999999}.$$

Assim, $S_r(\rho(12/13)) = S_r(923076) = 9+2+3+0+7+6 = 27$ e $S_r(27) = 2+7 = 9$. Portanto, $S_r^*(\rho(12/13)) = 9$.

Para $k = 2022$
$$\frac{2022}{13} = 155 + \frac{7}{13} = 155 + \frac{538461}{999999}.$$
Logo, $S_r(\rho(2022/13)) = S_r(538461) = 5+3+8+4+6+1 = 27$ e $S_r(27) = 2+7 = 9$. Portanto, $S_r^*(\rho(2022/13)) = 9$.

Corolário 3.5. *Seja $q > 5$ um primo e k um inteiro positivo tal que* $\mathrm{mdc}(k, q) = 1$. *Então*
$$S_r^*\left(\frac{1}{2^n}\rho\left(\frac{k}{q}\right)\right) = 9 \quad e \quad S_r^*\left(\frac{1}{5^n}\rho\left(\frac{k}{q}\right)\right) = 9,$$
para todo n inteiro.

Demonstração. Segue do Teorema 3.3 e da Proposição 2.10. □

Por exemplo, $\rho(12/13) = 923076$. Tome $n = 5$. Assim,
$$\frac{1}{2^5}\rho\left(\frac{12}{13}\right) = \frac{923076}{32} = 28846,125.$$
Logo, $S_r(28846,125) = 36$ e $S_r(36) = 9$, ou seja, $S_r^*\left(\rho(12/13)/32\right) = 9$.

Proposição 3.6. *Sejam $q > 5$ e $p > 3$ números primos. Então, para todo inteiro positivo n vale*
$$S_r^*\left(\rho\left(\frac{1}{p^n}\cdot\frac{1}{q}\right)\right) = 9.$$

Demonstração. De fato, como $\mathrm{mdc}(p^n q, 10) = 1$ segue do Teorema 2.13 que a fração irredutível $1/(p^n q)$ é uma dízima periódica. Seja t o menor inteiro positivo satisfazendo a congruência $10^t \equiv 1 (\mod p^n q)$. Então,
$$\frac{1}{p^n q} = \frac{A}{10^t - 1}.$$
Deste modo, $10^t - 1 = p^n q A$. Como $p, q \neq 3$, segue que $\rho\left(1/p^n q\right) = A$ é múltiplo de 9. Com isso, o resultado segue da Proposição 2.9. □

Corolário 3.7. *Sejam $q > 5$ e $p > 3$ números primos e n um inteiro positivo. Então para todo inteiro positivo m vale*
$$S_r^*\left(\frac{1}{2^m}\rho\left(\frac{1}{p^n}\cdot\frac{1}{q}\right)\right) = 9 \quad e \quad S_r^*\left(\frac{1}{5^m}\rho\left(\frac{1}{p^n}\cdot\frac{1}{q}\right)\right) = 9.$$

Demonstração. Segue da Proposição 3.6 e da Proposição 2.10. □

Corolário 3.8. *Seja k um inteiro positivo tal que* $\mathrm{mdc}(k, q) = 1$*, e $q > 5$ um número primo e n um inteiro positivo. Então, para todo m inteiro positivo, valem as igualdades*

$$S_r^*\left(\frac{1}{2^m}\rho\left(\frac{k}{q^{n+1}}\right)\right) = 9 \quad e \quad S_r^*\left(\frac{1}{5^m}\rho\left(\frac{k}{q^{n+1}}\right)\right) = 9.$$

Demonstração. Basta fazer $p = q$ na Proposição 3.6. □

3.1 Caso $q \in \{2, 3, 5\}$

Quando os denominadores são potências dos primos 2, 3 e 5, deixamos as conjecturas a seguir. Para além disso, fazemos algumas obervações que decorrem diretamente da definição de S_r^*.

Conjectura 1. *Para qualquer inteiro positivo n vale a igualdade*

$$S_r^*\left(\rho\left(\frac{1}{3^n}\right)\right) = \begin{cases} 3, & se\ n = 1 \\ 1, & se\ n > 1. \end{cases}$$

Conjectura 2. *Para qualquer inteiro positivo n vale*

$$S_r^*\left(\frac{1}{2^n}\right) \in \{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8\}.$$

Em outras palavras, se definirmos a sequência (s_n), em que $s_n = S_r^*\left(\frac{1}{2^n}\right)$, então, para $n \geq 0$, teremos

$$\begin{aligned} s_{1+6n} &= 5 \\ s_{2+6n} &= 7 \\ s_{3+6n} &= 8 \\ s_{4+6n} &= 4 \\ s_{5+6n} &= 2 \\ s_{6+6n} &= 1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

o que significa que $(s_n) = (5, 7, 8, 4, 2, 1)$ é uma sequência periódica de período 6.

Conjectura 3. *Para qualquer inteiro positivo n vale*

$$S_r^*\left(\frac{1}{5^n}\right) \in \{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8\}.$$

Mais precisamente, se definirmos a sequência (r_n), em que $r_n = S_r^*\left(\frac{1}{5^n}\right)$, então, para $n \geq 0$, teremos

$$\begin{aligned} r_{1+6n} &= 2\\ r_{2+6n} &= 4\\ r_{3+6n} &= 8\\ r_{4+6n} &= 7\\ r_{5+6n} &= 5\\ r_{6+6n} &= 1\\ &\vdots \end{aligned}$$

e portanto, $(r_n) = (2, 4, 8, 7, 5, 1)$ é também uma sequência periódica de período 6.

Note que $(s_n) = (\sigma(r_n))$, para alguma permutação σ, e que $S^*(x_n) = S^*(y_n) = 9$ em que $x_n = s_{1+6n}s_{2+6n} \ldots s_{6+6n}$ e $y_n = r_{1+6n}r_{2+6n} \ldots r_{6+6n}$.

Defina $S^*((a_n)) = (S^*(a_1), S^*(a_2), \ldots)$ e $m(a_n) = (ma_1, ma_2, \ldots)$, para qualquer sequência $(a_n) = (a_1, a_2, \ldots)$ assumindo valores nos inteiros positivos. Então,

$$\begin{aligned} S^*(1(s_n)) &= (2, 4, 8, 7, 5, 1)\\ S^*(2(s_n)) &= (4, 8, 7, 5, 1, 2)\\ S^*(3(s_n)) &= (6, 3, 6, 3, 6, 3)\\ S^*(4(s_n)) &= (8, 7, 5, 1, 2, 4)\\ S^*(5(s_n)) &= (1, 2, 4, 8, 7, 5)\\ S^*(6(s_n)) &= (3, 6, 3, 6, 3, 6)\\ S^*(7(s_n)) &= (5, 1, 2, 4, 8, 7)\\ S^*(8(s_n)) &= (7, 5, 1, 2, 4, 8)\\ S^*(9(s_n)) &= (9, 9, 9, 9, 9, 9)\\ S^*(10(s_n)) &= (2, 4, 8, 7, 5, 1)\\ &\vdots \end{aligned}$$

o que mostra que, com exceção dos múltiplos dos números 3, 6 e 9, tem-se $S^*(m(s_n)) = \sigma((s_n))$, para todo inteiro positivo m, ou seja, uma permutação dos elementos de (s_n).

Para cada inteiro positivo m, seja $S^*(m(s_n)) = (s_1^*(m), s_2^*(m), \ldots, s_6^*(m))$. Então, tem-se

$$\begin{aligned} s_1^*(m) + s_4^*(m) &= 9\\ s_2^*(m) + s_5^*(m) &= 9\\ s_3^*(m) + s_6^*(m) &= 9. \end{aligned}$$

Por exemplo, para $m = 5$ temos $S^*(5(s_n)) = (s_1^*(5), s_2^*(5), \ldots, s_6^*(5)) = (1, 2, 4, 8, 7, 5)$.

$$\begin{aligned}1 + 8 &= 9\\ 2 + 7 &= 9\\ 4 + 5 &= 9.\end{aligned}$$

Isto nos diz que $(s_1^*(m), s_2^*(m), \ldots, s_6^*(m))$ comporta-se de forma semelhante ao comportamento dos *números cíclicos*, veja [1] e suas referências.

4 Conclusão

O presente trabalho fez um estudo acerca da soma e soma iterada de algarismos dos dígitos que compõem os períodos das dízimas periódicas geradas por frações irredutíveis cujos denominadores são números primos, produto e potência de números primos, bem como, dos dígitos de frações com representação decimal finita que possuem denominadores primos e suas respectivas potências. Para isso, estendeu-se a definição de soma e soma iterada de algarismos para o conjunto das frações irredutíveis com representação decimal finita e mostrou-se que o número 9 desempenha um papel importante, funcionando como um valor invariante para o caso em que os denominadores são maiores que 5.

Quando os denominadores são potências de 2, de 3 e de 5, foi deixado aos leitores interessados, conjecturas que descrevem o comportamento da soma iterada de algarismos estendidas aos números racionais com representação finita. Para os casos em que os denominadores são iguais a potências de 2 e 5, encontramos sequências periódicas de números cuja soma iterada de seus elementos é igual a 9, o que realça a importância do número 9 para a dinâmica da aplicação soma iterada de algarismos.

Além das conjecturas, este trabalho pode ter desdobramentos interessantes quando frações mais gerais são consideradas, ou seja, frações cujos denominadores e 10 não são primos entre si. Pode-se, também, analisar frações da forma $k/2^n$ e $k/5^n$ no sentido de explorar propriedades das sequências $(s_n(k))$ e $(r_n(k))$ sob ação da função soma iterada de algarismos, em que $s_n(k)$ e $r_n(k)$ são definidas como nas Conjecturas 2 e 3.

Referências

[1] Armstrong, N. J.; Armstrong, R. J., *Some properties of repetends*, Mathematical Gazette Vol. 87, 2003, pp. 437-443.

[2] Cooper, C.; Kennedy, R. E., *On consecutive Niven numbers*. Fibonacci Quart, Vol. 21, 1993, pp. 146-151.

[3] Bloem, E., *Harshad numbers*. Journal of Recreational Mathematic, Vol. 34, N. 02, 2005.

[4] Cai, T., *The book of numbers*. New Jersey: World Scientific Company, 2016.

[5] Costa, E. A., et al. *Soma iterada de algarismos de um número racional*. Ciência e Natura, Santa Maria, Vol. 43, e12, 2021.

[6] Costello, P.; Lewis, K., *Lots of Smiths*. Mathematics Magazine, Vol. 75, N. 3, 2002, pp. 223-226.

[7] Domingues, H. H., *O pequeno teorema de Fermat*. Revista do Professor de Matemática, N. 52, 2003, pp. 8-16.

[8] Alvares, E. R., *O Comprimento do Período de Dízimas a/b Não Dependem do Numerador*, Revista do Professor de Matemática, N. 61, 2000, pp. 17-21.

[9] Gray, A. J., *Digital Roots and Reciprocals of Primes*, The Mathematical Gazette. Vol. 84, N. 499, 2000, p. 86.

[10] Niven, I., *Números: racionais e irracionais*, Rio de Janeiro: SBM, 1984.

[11] Izmirli, I. M., *On Some Properties of Digital Roots*, Advances in Pure Mathematics, Vol. 04, N. 06, 2014, pp. 295-301.

[12] Ghannam, T., *The Mystery of Numbers: Revealed Through their Digital Root*. North Charleston: Createspace, Ed. 02, 2012.

[13] Guy, R., *Unsolved problems in number theory*. New York: Springer Science & Business Media, Vol. 01, Ed. 03, 2004.

[14] Lin, C-Y., *Digital root patterns of three-dimensional space*. Recreational Mathematics Magazine, Vol. 3, No. 05, 2016, pp. 9-31.

Submetido em 28 de Agosto de 2022.
Aceito em 22 de Novembro de 2022.