REVISEM

Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática

https://doi.org/10.34179/revisem.v8i1.18081

PAR OU ÍMPAR: M (2) ou ~M (2)? 2N OU 2N + 1?

EVEN OR ODD: M (2) or ~M (2)? 2N OR 2N + 1?

Rozimeire Soares de Oliveira Porto
Universidade do Estado da Bahia – UNEB
rozi_porto3@hotmail.com

Sandra Maria Pinto Magina
Universidade Estadual de Santa Cruz – UESC
sandramagina@gmail.com

Resumo

Este artigo é um recorte de uma pesquisa de mestrado em Educação Matemática que investigou as competências e os esquemas que os estudantes dos 3º e 5º anos do Ensino Fundamental apresentam em situações-problemas e os níveis de raciocínio algébricos mobilizados nessas situações. Teve por suporte uma metodologia descritiva com abordagem diagnóstica. O objetivo proposto foi identificar e compreender a natureza das estratégias apresentadas nos teoremas-em-ação e relacioná-las ao campo aritmético e algébrico simultaneamente. Para tanto foram selecionadas três situações-problema da pesquisa original juntamente com os extratos dos protocolos de respostas de oito estudantes. Na análise qualitativa identificamos nas estratégias resolutivas dos estudantes uma coexistência entre a aritmética e álgebra, uma relação de continuidade filial. Verificamos que, nas relações operacionais adotadas na resolução das situações-problemas (ou tentativas), o estudante ao generalizar e/ou explicitar uma sequência numérica, mesmo sem saber, transitaram entre os campos da aritmética e a álgebra. O estudo demonstrou que situações-problema de natureza aritmética se mediada por um viés algébrico poderá ser explorado nas atividades de ensino da Matemática desde os primeiros anos escolares como proposta formativa do raciocínio algébrico precoce.

Palavras-chaves: aritmética- álgebra-anos iniciais-Ensino Fundamental

Abstract

This article is an excerpt from a Master's research in Mathematics Education that investigated the skills and schemes that students in the 3rd and 5th years of Elementary School present in problem situations and the levels of algebraic reasoning mobilized in these situations. It was supported by a descriptive methodology with a diagnostic approach. The proposed objective was to identify and understand the nature of the strategies presented in the theorems-in-action and relate them to the

arithmetic and algebraic field simultaneously. For this purpose, three problem situations from the original research were selected along with extracts from the response protocols of eight students. In the qualitative analysis, we identified in the students' resolving strategies a coexistence between arithmetic and algebra, a relationship of filial continuity. We verified that, in the operational relations adopted in the resolution of problem-situations (or attempts), the student, when generalizing and/or explaining a numeric sequence, even without knowing it, transited between the fields of arithmetic and algebra. The study demonstrated that problem-situations of an arithmetic nature, if mediated by an algebraic bias, could be explored in Mathematics teaching activities from the first school years as a proposal for training early algebraic reasoning.
Keywords: arithmetic; algebra; early years; Elementary School

ARITMÉTICA OU ÁLGEBRA?

Quantas vezes no contexto escolar ao escolher o tipo de procedimento estratégico na resolução de uma determinada situação problema, nos questionamos qual o campo epistemológico de pertencimento. Se esta for uma sequência, uma operação ou ainda numa relação (binária ou terciaria) um dos possíveis questionamentos pode ser a natureza da situação, se esta reside no campo aritmético ou algébrico? Se você assim como eu já se fez esta pergunta, saiba que não estamos sozinhos nesta seara. Há décadas pesquisadores questionam-se sobre a existência de uma suposta fronteira que separa estes dois campos. Esta hipotética fronteira levou o autor Osvaldo Sangiorgi, na época do movimento Matemática Moderna a questionar sobre esta demarcação conceitual matemática. Para ele não se podia traçar uma linha divisória separando-os, uma vez que os resultados particulares da aritmética têm relação com as estruturas algébricas (SANGIORGI, 1963).

Temos ainda, Vergnaud (1996) em sua Teoria dos Campos Conceitual, chamando atenção para a aproximação entres os campos conceituais: das estruturas aditivas /multiplicativas e da álgebra, o que reforça o longínquo de Sanagiorgi. Em outras palavras, o matemático legitima a existência de uma relação simbiótica entre os domínios da aritmética e os domínios da álgebra. Décadas após, Lins e Gimenez (2001) corroboram nesta direção ao propor e discutir a relação de coexistência entre os domínios da aritmética e da álgebra. Ressaltam que o desenvolvimento de uma está implicado no desenvolvimento da outra, que as invariantes presentes nas estruturas quantitativas da aritmética se beneficiam das da álgebra para se fundamentar. Esta aproximação de continuidade tende a ser compreendida nas estruturas dos números, na formação do sistema numérico, nos algoritmos operatório e no funcionamento das propriedades, dentre outros, pois apresentam, generalizações, modelos aritméticos e ferramentas aritméticas que são justificáveis no campo da álgebra (CARRAHER, MARTINEZ e SCHULMAN, 2008).

Direcionando esta discussão para o lado prático e para a proposição inicial: *par ou ímpar*, podemos dizer que, não se pode desvincular a definição de um número par (positivo) para um número natural múltiplo de dois, certo? Então qualquer número par positivo terá sua representação simbólica fundamentada na lei algébrica de 2n, ou seja, as expressões: M (2)[1] e ser 2n se equivalem. Isso vale para um número ímpar ~M (2)[2] como àquele que não pode ser dividido em duas partes e cuja configuração algébrica é 2n +1. O que muda entre estas expressões é apenas seu registro de representação, o primeiro nos domínios da aritmética e o outro no registro de representação algébrica[3] (DUVAL,1995)

Todavia, apesar desta discussão a divisão e a hierarquização entre os conceitos da aritmética e os da álgebra ainda persiste em muitos currículos de Matemática, em especial no que tange os dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Uma das fontes desta categorização curricular tem relação na interpretação equivocadas das ideias de Piaget referente ao desenvolvimento dos níveis intelectuais das crianças [4] (LINS e GIMENEZ,2001). A outra razão possível pode se conjecturada a partir dos registros históricos em que o desenvolvimento da Aritmética precede os da Álgebra (BOYER, 2010).

Esta constância conceitual hierárquica contraria as discussões de especialistas como Carraher e Schliemann (2005) quando ressaltam que a álgebra reside quietamente nos currículos de Matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Este afastamento estabelecido entre a aritmética e Álgebra tende a ser artificial, sem fundamento, uma vez que as situações aritméticas possibilitam generalizações próximas àquelas a que estamos habituados na Álgebra. Estas reproduzem propriedades algébricas na sustentação lógica de suas estruturas. Podemos citar, por exemplo: a relação do sistema de numeração decimal com os padrões algébricos; as operações aritméticas com as funções (CARRAHER; SCHLIEMANN, 1995, 2016); o algoritmo da multiplicação como um modelo algébrico, a

[1] Múltiplo de dois
[2] Não múltiplo de dois
[3] Teoria de Registros de Representação Semiótica – Reymond Duval
[4] Os estágios de desenvolvimento lógico propostos por Piaget (1996) são: 1) sensório motor; 2) pré-operatório; 3) operações concretas e 4) operações formais. Embora exista uma ordem cronológica nesses estágios, não há uma fixação de idade. Contudo, muitos interpretaram que as idades ilustradas, por Piaget, eram fixas e imutáveis.

propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição ou subtração como uma linguagem algébrica (EVES, 2004; GÓMEZ, 2006), dentre outros processos peculiares à atividade aritmética.

Para fomentar essa discussão trazemos neste manuscrito um recorte da dissertação de mestrado em Educação Matemática, da universidade Estadual de Santa Cruz, cujo projeto de pesquisa teve aval do comitê de ética dessa mesma universidade. As discussões do estudo sinalizaram indícios da uma correlação entre os domínios da aritmética e da álgebra por estudantes do 3º e 5º ano do Ensino Fundamental o que valida as discussões aqui apresentadas.

ARITMÉTICA GENERALIZADA

Se situarmos a aritmética como uma linguagem generalizadora, um idioma através do qual se descreve os padrões e as relações entre quantidades, um instrumento facilitador para a compreensão, dedução e interpretação de fórmulas (USISKIN, 1995a, 1995b) podemos imaginar uma relação intrínseca entre a aritmética e a álgebra, como uma extensão, uma compilação (em certo sentido), que requer um sistema simbólico para se fundamentar (ROJANO, 1993). Nesta perspectiva a aritmética exibe status de elementos generalizadores que possibilitam traduzir, modelar e generalizar situações Matemática (USISKIN, 1995). Na capacidade de modelar algebricamente uma situação aritmética reside uma das concepções da álgebra elementar, a generalização. E, desse modo a álgebra situar-se-á como uma linguagem acessível aos estudantes da Educação Básica independente da normatização de seu ensino curricular. A aritmética apresentará status algébrico, como uma ferramenta capaz de interpretar comportamentos de padrões, de organizar, de explicitar, de generalizar, de explicar, de sintetizar as ideias matemáticas tornando-a inteligível e aplicável em todos os campos do conhecimento científico.

Por isto alguns pesquisadores, como: David (1985); Fiorentini, Miorim e Miguel (1992, 1993); Carraher e Schliemann (1995); Booth (1984, 1988, 1995) entre outros que questionam o ensino da matemática escolar, em especial, a não abordagem algébrica para os anos iniciais do Ensino Fundamental. Discutem a organização dos currículos de Matemática numa forma hierarquizada em que primeiro os estudantes adentram no domínio da aritmética e depois álgebra e, ainda da falta de atividades que contemplem as noções elementares da Álgebra desde os primeiros anos de escolarização. Essa organização instituída perpetua a suposta inexistência de uma relação intrínseca entre a aritmética e Álgebra no contexto dos anos iniciais. Entretanto, o que observamos é que essa percepção se apresenta relegada a entendimentos pedagógicos, discussões e até mesmo ao descaso conceitual.

No entanto se relacionarmos a álgebra como aritmética generalizada (USISKIN, 1995) em paralelo com as discussões propostas na Base Nacional Comum Curricular-BNCC (BRASIL, 2017), para o Ensino Fundamental este paradigma pedagógico tende a ser destituído no tocante ao ensino de Matemática para os anos iniciais. Visto que as diretrizes da base indicam uma ampliação e um redirecionamento dos currículos de Matemática para os anos iniciais do Ensino Fundamental ao acrescentar um quinto eixo norteador para o ensino de matemática, *a álgebra*, na perspectiva da formação de um pensamento algébrico. Vale ressaltar que não se trata de uma álgebra usual nos moldes dos anos finais (expressões algébricas, equações, funções), mais uma proposta para o desenvolvimento do pensamento algébrico atrelado aos domínios da aritmética. Essas diretrizes sugerem uma interface entre o quinto eixo e os outros quatro eixos norteadores[5] da aprendizagem matemática instituídos desde os primeiros anos escolares da Educação Básica nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino de Matemática (BRASIL, 1997).

ALGEBRIZANDO NÚMEROS

No ambiente de sala de aula, ao lidar com situações de características numéricas, o estudante evoca inconscientemente estratégias algébricas ao realizar algoritmos operatórios. E por detrás destas ações existem lastros (teoremas-em-ação[6]) que possibilitam a emersão de um pensamento algébrico necessário à validação das leis de domínio aritmético. Ao manipular (forma implícita) as estruturas algébricas básicas por meio da aritmética generalizada, o estudante dos anos iniciais adquire capacidades cognitivas que potencializa o estabelecimento relativo entre os conceitos da Aritmética e da Álgebra para uma situação

[5] Números, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidades e Estatística.
[6] Relações matemáticas que são utilizadas pelos estudantes, escolhem uma operação, ou uma sequência de operações para resolver uma situação-didática (MAGINA et al, 2008).

futura. Esse arquétipo epistemológico enriquecerá seu repertório que no momento exigido apresentará uma resposta habilidosa algebricamente.

Esta forma implícita expõe nos "teoremas-em-ação os conhecimentos contidos nos esquemas; podemos igualmente designá-los pela expressão mais global de invariantes operatórias. [...] O reconhecimento das invariantes é, pois, a chave da generalização do esquema" (VERGNAUD, 1996, p. 160-161). Estes teoremas trazem a tona os conhecimentos subjacentes dos estudantes e não exibem os teoremas convencionais com os quais os conhecimentos científicos se apoiam, mas uma potencialidade conceitual. Essas ações apresentam relações lógicas matemáticas (intuitiva e dedutiva) usadas pelos estudantes de forma implícita, resultado do repertório acumulado nas experiências aritméticas. Para Radford (2009, 2018) os estudantes podem aprender o que aparentemente não sabe se lhes for proporcionado situações-problema que direcione a formação do pensamento algébrico.

Por exemplo, ao modelar um sistema de numeração de base dez (ou outra qualquer), ao estruturar um algoritmo operacional e na elaboração de uma propriedade dentre outros, o uso dos números podem ter um caráter algébrico se a intenção não for os cálculos por si apenas, mas um exemplo genérico, um padrão (KAPUT, 2008a). Podemos citar também, a relação do sistema de numeração decimal com os padrões algébricos; as operações aritméticas com as funções (CARRAHER; SCHLIEMANN, 1995, 2016); o algoritmo da multiplicação como um modelo algébrico, a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição ou subtração como uma linguagem algébrica (EVES, 2004; GÓMEZ, 2006), dentre outros processos peculiares à atividade aritmética que apresentam bases algébricas.

No tocante ao estudo das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, podemos retratá-lo como uma função, uma vez que a "linguagem algorítmica tem pontos em comum com a linguagem algébrica, sobretudo em relação ao conceito de variável" (BRASIL, 2017, p. 226). Carraher et al (2006, p. 88, tradução nossa) reforça essa ideia quando ressalta que "as operações aritméticas podem ser vistas como funções, e a notação algébrica pode dar suporte ao raciocínio matemático mesmo entre estudantes jovens". Essa simbiose, operação-função, sugere uma possibilidade de fazer uso de ideias e representações algébricas desde muito cedo na vida escolar das crianças.

O ESTUDO, SUJEITOS E INSTRUMENTO INVESTIGATIVO

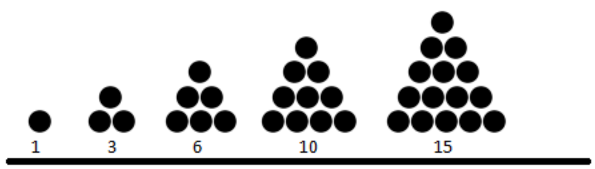
O presente manuscrito é um recorte de uma pesquisa de mestrado que teve como objetivo investigar as competências, os esquemas de ação e os níveis de raciocínio algébrico que os estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental apresentam ao lidarem com situações-problema envolvendo a álgebra elementar. Esta pesquisa fundamentou-se numa metodologia descritiva com uma abordagem diagnóstica e esteve apoiada na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1996) e nas discussões de especialistas como Kaput (1984); Booth (1984, 1995); Carraher, Schiliemann e Brizuela (2006); Blanton (2007); Brizuela e Schliemann (2007); Magina et al (2008) e Kieran et al (2016), entre outros, no que tange à perspectiva da *Early Algebra*[7].

Esse estudo teve como sujeitos investigados, os estudantes do 3º e do 5º ano (em idade regular) de uma escola pública da região sudoeste da Bahia. Estes estudantes foram submetidos a um instrumento de investigação, denominado de teste. Não tiveram conhecimento prévio da data de aplicação e nem dos conceitos que seriam abordados nesse. Sua aplicação foi coletiva (toda a turma), porém a resolução aconteceu de forma individual e escrita. Este teste apresentou 10 (dez) situações-problemas que foram subdivididas em subitens, contabilizando um total 14 subitens investigativos. Sendo 6 itens na vertente da função, 4 na equação e 4 na sequência. Todavia para este recorte traremos apenas três situações-problema dentre as dez pesquisadas. Estas situadas nas vertentes da função e da sequência, uma e duas respectivamente.

[7] Programa de ensino matemático direcionado para a introdução dos conceitos algébricos nos anos iniciais do Ensino Fundamental que permite o desenvolvimento de competências e habilidades algébricas a partir de situações no contexto aritmético (PORTO, 2018)

Quadro 1.1 Situações-problema investigadas neste recorte

<table>
<tr><th>Situação-problema</th><th>Variáveis do Estudo</th></tr>
<tr><td>Q1. Na venda de Dona Ana, com R$ 2,00 se compra 3 bombons vermelhos como mostra a figura abaixo

Diogo gastou R$ 10,00 comprando esses bombons vermelhos. Quantos bombons ele comprou?
 = ?</td><td>Objeto Matemático: Função
Tipo de Representação: Icônica
Nível de dificuldade: simples</td></tr>
<tr><td>Q.2 Bibi passa horas brincando de escrever sequências. Certo dia saiu às pressas deixando a sequência incompleta.
<table><tr><td>1</td><td>4</td><td>7</td><td>10</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td></tr></table>
Quando retornar, deverá concluir essa sequência obedecendo à mesma ordem. Qual será o 9º número (termo) que ela escreverá?</td><td>Objeto Matemático: Sequência
Tipo de Representação: numérica
Nível de dificuldade: simples</td></tr>
<tr><td>Q.3 Observe a sequência das figuras triangulares formada por bolinhas.


Seguindo essa mesma ordem, quantas bolinhas serão necessárias para fazer 8ª figura?</td><td>Objeto Matemático: Sequência
Tipo de Representação: icônica
Nível de dificuldade: sofisticada</td></tr>
</table>

Fonte: dados da pesquisa

A escolha destas vertentes (sequência e função) para serem objetos de investigação neste recorte aporta-se em três (dentre as quatro) ideias poderosas da Matemática na Educação Básica, discutidas por Carraher e Schliemann.

> (1) As quatro operações básicas da aritmética de adição, subtração, multiplicação e divisão, são funções.
> (2) Generalizações matemáticas podem ser alimentadas tornando domínio e contradomínio de função de destaque e deixando variáveis de outra forma ligadas livre para variar;
> (3) Funções e relações ajudam a integrar aritmética, álgebra e geometria (2015, p. 192, trad nossa).

Estas premissas sugerem que apesar da natureza abstrata das funções existe em sua base um conjunto conceitual abrangente capaz de torná-la acessível cognitivamente desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Além da possibilidade de servir como elo entre os domínios da aritmética, da álgebra e da geometria.

Outro fator que contribuiu com a escolha das vertentes algébricas pesquisadas remete ao fato de estas apresentarem possibilidades manipulativas nos domínios da aritmética básica para o universo algébrico dentro do contexto dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Tornando assim, objeto de conhecimento adequado ao nível intelectual dos estudantes pesquisados, ou seja, serem parte do universo curricular da Matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS GERADOS

No que concerne à investigação teórico-metodológica optamos neste recorte por uma análise qualitativa dos resultados encontrados na pesquisa matriz segundo as variáveis investigadas (função e sequências algébricas). Nesta análise discutiremos os esquemas de ação apresentado por esses estudantes durante a resolução (ou tentativa) das situações-problema envolvendo noções básicas do objeto matemático e à sua relação com o campo aritmético e/ou com o campo algébrico.

Pretendemos identificar nos protocolos de respostas dos estudantes a competência de generalização aritmética com um viés algébrico e a habilidade de explicitar a partir destes um raciocínio algebrizado. Buscaremos indícios que ratifiquem a existência de elementos que caracterizam o pensamento algébrico que os estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental apresentam (KAPUT; CARRAHER; BLATON, 2008) quando lidam com situações-problema fora de seu contexto curricular. E, se existem, que variáveis o constituem e se é possível classificá-los e/ou compreendê-los. Portanto, neste recorte nos interessa: a) Qual conhecimento subjaz a resposta do estudante? b) Qual a relação do seu fazer aritmético com o fazer algébrico?

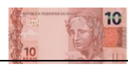
No que tange aos participantes do estudo (integral), foram 148 estudantes, sendo 68 do 3º ano, e 80 do 5º ano, gerados 148 protocolos de respostas. Dentre estes 148 protocolos obtivemos 2.072 respostas, em que 952 eram referentes aos estudantes do 3º ano, e 1.120 aos estudantes do 5º ano. Desse total de respostas (2.072) categorizamos dois grupos, denominados de G1 e G2. No grupo G1 ficamos com os extratos dos protocolos cujas respostas não são passiveis de análises e o G2 o grupo cujas respostas (ou tentativa) apresentam esquemas de ação (certo ou errado). Assim descartadas as ocorrências de G1 (1.135) por não permitirem a realização da análise das estratégias de ação ficamos com um quantitativo de 937 respostas (395 advindas dos estudantes do 3º ano, e 542 do 5º) analisáveis qualitativamente.

A seguir, apresentaremos dois protocolos para ilustrar o grupo G1, nos quais parece evidente que os estudantes lançaram mão de algum esquema de ação, mas nós não conseguimos identificá-lo nos registros.

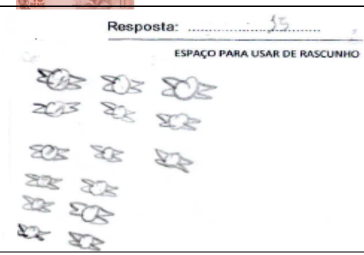
Exemplo.1.1 – Duas respostas que foram desconsideradas para efeito da análise qualitativa do estudo.

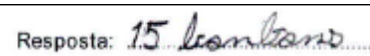
Q1 Na venda de Dona Ana, com R$ 2,00 se compra 3 bombons vermelhos como mostra a figura abaixo

Diogo gastou R$ 10,00 comprando esses bombons vermelhos. Quantos bombons ele comprou?



= ?



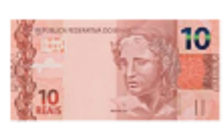


Fonte: Extrato dos protocolos de respostas

Na sequência traremos exemplos de respostas advindos dos protocolos de respostas do grupo G2, cujos esquemas de ação apresentam uma competência que avizinhar-se-á do objeto matemático proposto, sugerindo uma relação entre o fazer aritmético e o fazer algébrico dos estudantes. Buscaremos ainda, os conhecimentos que subjaz os teoremas-em-ação por detrás dos esquemas apresentados pelos estudantes. Neste sentido, corroboramos com Magina et al (2008) que por detrás dos esquemas operatórios dos estudantes reside os teoremas-em-ação que sinalizam seu repertório cognitivo ainda não formalizado.

Exemplo.1.2 – Duas respostas de estudantes que foram consideradas para efeito da análise qualitativa do estudo, (o exemplo I do estudante do 3º ano e o II do estudante do 5ºano) (situação-problema Q1)

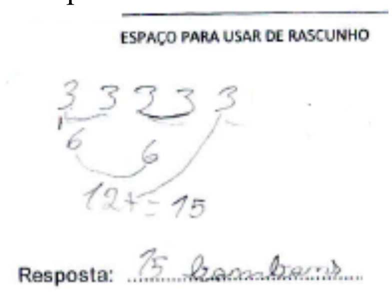
Na venda de Dona Ana, com R$ 2,00 se compra três bombons vermelhos como mostra a figura abaixo:



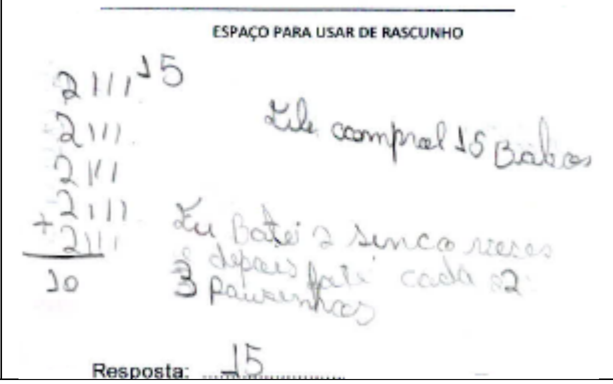
= ?

Diogo gastou R$ 10,00 comprando esses bombons vermelhos. Quantos bombons ele comprou?

Exemplo I



Exemplo II



Fonte: Extrato do protocolo de respostas dos estudantes

Podemos observar que a forma de raciocinar dos estudantes em questão manifestadas em seus esquemas, sinalizam suas habilidades e potencialidades mesmo que estes não sabem o que sabem de uma função de primeiro grau. Nos parece que estes estudantes adaptaram seus esquemas para moldar a situação-problema de acordo com os conhecimentos construídos. Em outras palavras, eles nunca estudaram uma função linear (f(x) = ax) mas trazem em seu repertório cognitivo um raciocínio funcional coerente, apresentando uma função adaptativa do conhecimento anterior (repertório) (VERGNAUD, 1996), possibilitando o desenvolvimento cognitivo de forma intuitiva do raciocínio aguardado. As estratégias resolutivas apresentadas nos protocolos de respostas dos estudantes sugerem a existência de um repertório aritmético organizado por elementos comuns e representativos (figural), que se aproxima das ideias algébricas de uma função.

Baseado nos esquemas dos estudantes do exemplo 1.2, podemos identificar o teorema-em-ação que sustenta teoricamente suas estratégias, conforme quadro 1.1

Quadro 1.1 Teorema-em-ação, segundo os comportamentos observáveis dos estudantes

Termo geral da função	Teorema por trás da ação	Teorema-em-ação	
$f(x)=\frac{3}{2}x$	Reais Bombons $2 \xrightarrow{f} 3$ $10 \xrightarrow{f} x$	$2 \rightarrow 3$ $10 \rightarrow x$	2x3 + 2x3 + 3 6+6+ 3= 15
			2+2+2+2+2 =10 3+3+3+3+3 =15

Fonte: Dados da pesquisa

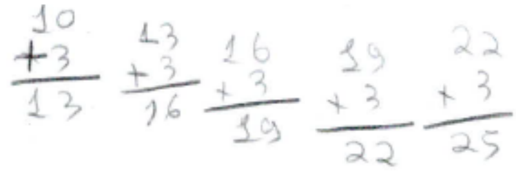
Exemplo.1.3 – Duas respostas de estudantes que foram consideradas para efeito da análise qualitativa do estudo, (o exemplo I do estudante do 3º ano e o II do estudante do 5ºano) (situação-problema Q2)

Bibi passa horas brincando de escrever sequências. Certo dia saiu às pressas deixando a sequência incompleta.

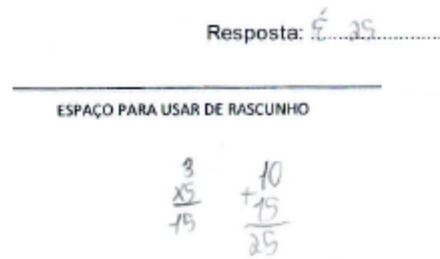
1	4	7	10	...	...	...	...	...

Quando retornar, deverá concluir essa sequência obedecendo à mesma ordem. Qual será o 9º número (termo) que ela escreverá?

Exemplo I



Exemplo II



Fonte: Extratos dos protocolos de respostas

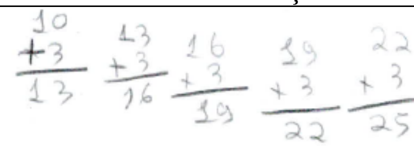
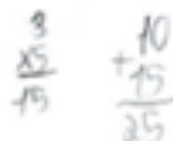
Analisando as respostas/ esquemas de ação dos estudantes podemos nos perguntar qual a origem desses, aritmética ou algébrica? À primeira vista nos parece de natureza aritmética devido à ausência de uma representação simbólica (variável), mas se atentarmos para o teorema-em-ação por detrás da representação, percebemos que essa constatação não nos parece tão óbvia.

Esmiuçando esses esquemas identificamos uma raiz comum, a quantitativa[8], que por sua vez une a aritmética a álgebra (DAVYDOV, 1988), que sugere que por detrás das estruturas operatórias apresentadas pelos estudantes coexiste uma relação algébrica. Para Usiskin (1995a,1995b) a aritmética tem seu habitat nas relações quantificáveis, uma vez inseridas nesse ambiente não teremos como afastá-las ou fragmentá-las. Reportando ao ambiente de sala de aula, temos que ao lidar com situações de características numéricas, o estudante evoca inconscientemente estratégias algébricas, um pensamento algébrico intuitivo e dedutivo. E que este tipo de raciocínio é necessário à validação das invariantes que permeiam as leis de domínio aritmético como conhecimento científico. Para Merino, Canãdas e Molina (2013) uma situação-problema aparentemente aritmética pode ser apresentada a partir do raciocínio funcional, pois considera o uso da álgebra em situações

[8] Esta relação entre quantidades sugere Usiskin (1995) ser o idioma da álgebra.

concreta, de forma significativa a partir das estruturas de domínio numérico ao promover a compreensão de variáveis e a manipulação de generalizações. Todavia esta relação nem sempre fica visível, por isto pressupomos a existência dos teoremas-em-ação a seguir (exemplo 1.2) que subjaz os conhecimentos exibidos nos esquemas e os teoremas formais que se apoiam numa progressão aritmética-PA, conforme quadro 1.2.

Quadro 1.2 Teorema-em-ação, segundo os comportamentos observáveis dos estudantes

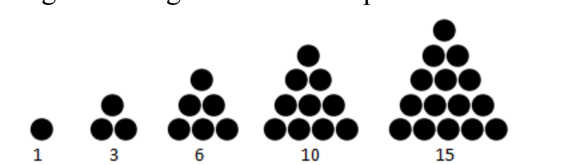
Termo geral da PA	Teorema por trás da ação	Teorema-em-ação
$a_n = a_1 + (n-1) . r$	$a_5 = a_4 + 3$ $a_6 = a_5 + 3$ $a_7 = a_6 + 3$ $a_8 = a_7 + 3$ $a_9 = a_8 + 3$	
	$a_9 = a_4 + 5.r$ $a_9 = 10 + 5.3$ $a_9 = 10 + 15$ $a_9 = 25$	

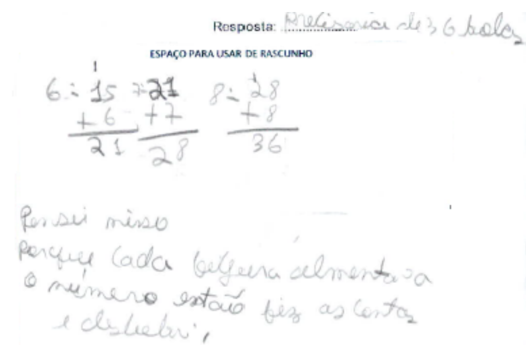
Fonte: Dados da pesquisa

Relacionando os teoremas, por trás e na ação, ficam aparente os conhecimentos implícitos (repertório) e a capacidade adaptativa dos estudantes em relação a uma progressão aritmética crescente (razão = 3>0). A estratégia utilizada pelos estudantes apresenta evidências de um raciocínio algébrico sofisticado, porém de natureza aritmética. Esta natureza é previsível uma vez que estes estudantes nunca tiveram acesso à noção conceitual da PA. Todavia, as formas de representações do pensamento algébrico (precoce) dos estudantes podem ser adaptadas para se aproximar e assumir gradualmente para as formas convencionais da Álgebra Elementar (CARRAHER; SCHILIEMANN, 2014) e posteriormente direcionar para a estrutura de uma sequência algébrica.

Exemplo 1.4 – Duas respostas de estudantes que foram consideradas para efeito da análise qualitativa do estudo, (ambos os exemplos são de estudantes do 5ºano), situação-problema Q3)

Observe a sequência das figuras triangulares formada por bolinhas.



Seguindo essa mesma ordem, quantas bolinhas serão necessárias para fazer 8ª figura?	
	

Fonte: Extratos dos protocolos de respostas

Analisando as estratégias dos estudantes investigados nesta situação-problema, observamos que ambos identificam o comportamento de uma sequência recursiva como um padrão de acréscimo quanto ao número de bolinhas utilizadas para se construir cada uma das figuras (aumento de 2, 3, 4, 5...).

Os teoremas-em-ação dos estudantes acima analisados, evidenciam a existência de um pensamento algébrico a partir de uma generalização aportada na presença de elementos *caracterizadores* e *constitutivos da álgebra*[9]. O estudante I faz uso de uma estratégia mista, representação icônica (figural) e numérica para encontrar a quantidade necessária para se formar a oitava figura triangular, enquanto o estudante II apresenta uma estratégia de natureza operacional. Ambos, compreendem a lei de recorrência como critério de formação e mantém um pensamento sequencial com características e domínio de validade inicialmente local (VERGNAUD, 1996), intuitivo e dedutivo para os estudantes I e II, respectivamente.

Podemos pressupor que os estudantes analisados se encontram em estágio cognitivo diferente, uma vez que o primeiro necessita de um suporte de natureza icônica para sustentar a estrutura operatória e o estudante II apresenta um perfil totalmente numérico. Essa constatação comportamental pode estar relacionada com os estágios de desenvolvimento lógico de Piaget, o de *operações concretas e operações formais.*

[9] Elementos constitutivos da álgebra (LINS e GIMENEZ, 2001) e Elementos caracterizadores da álgebra (FIORENTINI, 1993)

Essas estratégias, ou seja, os teoremas-em-ação identificados a seguir (exemplo 1.3) são justificáveis em seu contexto aritmético ao nível cognitivo dos estudantes e se validam no teorema por detrás de cada ação dos estudantes, conforme quadro 1.3.

Quadro 1.3 Teorema-em-ação, segundo os comportamentos observáveis dos estudantes

Soma do enésimo termo da sequência	Teorema por trás da ação	Teorema-em-ação
$S_n = \sum_{i=1}^{n} 1+2+3+\dots = \frac{n(n+1)}{2}$	$S_6 = 21$ $S_7 = 28$ $S_8 = 36$	$6^a - 21$ $7^a - 28$ $8^a - 36$
	$S_6 = S_5 + 6$ $S_7 = S_6 + 7$ $S_8 = S_7 + 8$	6: 15 + 6 = 21 7: 21 + 7 = 28 8: 28 + 8 = 36

Fonte: Dados da pesquisa

Podemos observar que os esquemas utilizados pelos estudantes têm dupla acepção. Para esses estudantes são ferramentas que possibilitam a compreensão e resolução da situação-problema e para nós (pesquisadores) são úteis como suporte para rastrear a relação entre o conhecimento implícito intuitivo e os conhecimentos que os estudantes conseguem explicitar (VERGNAUD, 1996). Sejam eles acertados ou não, numérico ou icônico, em linguagem materna ou outro tipo de linguagem permite compreender e estimar o nível cognitivo dos estudantes em relação às noções algébricas mediadas pelo campo aritmético.

Conforme observamos na análise, essa forma de raciocinar dos estudantes apresenta uma filiação implícita entre as estruturas aritméticas e algébricas, seja na forma de registrar seus esquemas ou numa ideia de continuidade (VERGNAUD, 1996). Essa relação pode ser resultado de uma relação direta com a metodologia de ensino do professor, com desenvolvimento cognitivo dos estudantes, ou ainda o nível de abstração em que se encontram (no momento) e seus limites epistemológicos impostos pela álgebra. Haja visto que, a forma de representação Semiótica e o uso de símbolos têm um significado particular nos conceitos e nas notações criadas pelos estudantes (BRIZUELA, 2006). Sendo necessário analisar preliminarmente suas estratégias de ações para compreender seu desenvolvimento cognitivo. Eles, os estudantes, criam seus sistemas de representação a partir de um conjunto particular de notações adequadas ao seu desenvolvimento cognitivo e, com isso, estabelecem seus próprios argumentos operatórios (KAPUT, 1995).

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Considerando o objetivo proposto de identificar e compreender a natureza das estratégias apresentadas pelos estudantes dos 3º e 5º anos do Ensino Fundamental nos teoremas-em-ação utilizados na resolução (ou tentativa) de três situações-problemas e na relação destas com os campos aritmético e algébrico, podemos conjecturas que: após as análises dos resultados gerados nas três situações-problema, identificamos a existência de uma relação intrínseca entre a aritmética e álgebra, por assim dizer uma continuidade filial (VERGNAUD, 1996; FALCÃO, 2003) e não uma ruptura conforme posto nos manuais didáticos.

Conforme observamos na análise essa forma algébrica de raciocinar dos estudantes é intuitiva, fruto de uma dedução proveniente de suas experiências nos domínios da aritmética, de suas estruturas generalizáveis e das relações intrínsecas entre os conceitos aritméticos e algébricos. Por isto, não concordamos com a forma estanque que os domínios da aritmética (atualmente) se apresentam no currículo Ensino Fundamental para os anos iniciais. Separar as estruturas aritméticas das algébricas tende a perpetuar uma ideia equivocada e antiga em que primeiro se domina a aritmética para depois adentrar no contexto da álgebra (a partir do 7ºano). Logo, esperamos persuadir professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental a olhar para as estruturas aritmética além do meramente observável (números) e ver relações algébricas coexistentes (função e sequência algébrica). Ademais, conjecturamos que as diretrizes curriculares da BNCC possam fazer este ajuntamento entre estes dois campos do conhecimento matemático básico da Educação: a *aritmética* e a *álgebra*.

Ressaltamos também que compete a cada professor fazer uma ponte ou ainda um degrau mais baixo entre os domínios da aritmética e da álgebra que possibilite aos estudantes um salto epistemológico entre eles. Essa premissa encontra-se em conformidade com as estratégias, os esquemas (registros), os teoremas que subjaz aos conhecimentos e nas ações identificados nos extratos dos protocolos de respostas dos estudantes. Compreendemos que, ao identificarmos na resolução (ou tentativa) de solucionar uma situação didática atípica, os estudantes se beneficiaram das estruturas aritméticas e desenvolveram estratégias algébricas peculiares que valida a estreita ligação e filiação conceitual entre os campos aritméticos e algébricos.

Rememorando nosso questionamento se uma situação aportar-se-á na *Aritmética ou Álgebra,* no contexto discutido em: ser par ou ser ímpar, podemos dizer que, são equivalentes as expressões de ser M (2) = 2n ou ~M (2) = 2n +1. O que difere é o conhecimento de quem está julgando essa relação. Logo separar a aritmética da álgebra consiste em uma negação da continuidade conceitual da álgebra para com a aritmética e num atraso epistemológico que precisa ser evitado nos processos de ensino da Educação Básica. A concordância com esta continuidade conceitual possibilita saltos epistemológicos fundamentais para o ensino da álgebra que possibilitarão a apropriação e progressão das noções algébricas futuras nos estudantes desde os primeiros anos escolares. Haja visto que, ao generalizar e/ou explicitar num viés algébrico uma sequência numérica, ao estabelecer uma relação de equivalência e ainda ao estabelecer relações operacionais, mesmo sem saber, os estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental estarão transitando entre os campos da aritmética e da álgebra. Esse movimento aliado a estratégias resolutivas poderá dirimir a distância imposta pelos currículos e possibilitar uma exploração entre os campos da a aritmética e a álgebra nos processos de formação dos conceitos algébricos a partir do 1º ano do Ensino Fundamental.

REFERÊNCIAS

BLANTON, M. et al. Early Algebra. In: VICTOR, J. K. (Ed.) **Algebra:** Gateway to a Technological Future. Columbia/USA: The Mathematical Association of America, 2007

BOOTH, L. R. **Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra**. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Org.). **As ideias da álgebra**. Hygino H. Domingues, tradução. São Paulo: Atual, 1995.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Base Nacional Curricular Comum**. Brasília: MEC/SEF, 2017.

BRIZUELA, B. M. **Desenvolvimento matemático na criança:** explorando notações. Maria Adriana veríssimo Veronese, tradução. Porto Alegre: Artmed, 2006.

CARRAHER, D. W, SCHLIEMANN. A. D. **O lugar da Álgebra no Ensino Fundamental**. In: Ernani M.; Síntria L. (Org.). **Diálogos sobre o ensino, aprendizagem e a formação de professores**: contribuições da Psicologia da Educação Matemática. 1. ed. Rio de Janeiro: Autografia, 2016.

CARRAHER, D. W.; MARTINEZ, M. V.; SCHLIEMANN, A. D. **Early Algebra and**

matematical generalization. **ZDM Mathematics Education**, v. 40, p. 3-22, 2008.

CARRAHER, D.; SCHLIEMANN, A.; BRIZUELA, B. Arithmetic and Algebra in early Mathematics Education. **Journal for Research in Mathematics Education**, Vol 7, 2006.

COXFORD, A. F; SHULTE, A. P. (Org). **As ideias da Álgebra**. Hygino H. Domingues, tradução. São Paulo: Atual, 1995.

DUVAL, R. **Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão matemática**. In MACHADO, S. A (Org.). **Aprendizagens em matemática:** Registros de Representação Semiótica. São Paulo: Papirus, 2003.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL. A. **Contribuições para um Repensar... a Educação Algébrica Elementar**. Pro-posições, v,4, n. 1, p. 78-91, 1993.

KIERAN, Carolyn et al. **Early Algebra**: Research into its Nature, its Learning, its Teaching. Hamburg: ICME, 2016.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI**. 4. ed. Campinas: Papirus, 2001.

MAGINA, S. A. **Teoria dos Campos Conceituais:** contribuições da Psicologia para a prática docente. São Paulo: PROEM, 2007.

MAGINA et. al. **Repensando adição, subtração:** contribuições da Teoria dos Campos Conceituais. São Paulo: PROEM, 2008.

MERINO, E., CAÑADAS, M., MOLINA, M. **Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización. Educación Matemática en la Infancia.** Disponível em file:///C:/Users/sandra/Downloads/Uso_de_representaciones_y_patrones_por_alumnos_de_.pdf

RADFORD, L. (2018). **The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school**. In C. Kieran (Ed.), Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds: The global evolution of an emerging field of research and practice (pp. 3-25). Cham, Suiza: Springer.

____________ **Signs, gestures, meanings: Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective**. In: SIXTH CONGRESS OF THE EUROPEAN SOCIETY FOR RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION. Anais. Lyon –França, 2009

PIAGET, J. & INHELDER, B. **A Psicologia da Criança**. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 1995.

PIAGET, J. **The Essential of Piaget Gruber & Vonèche.** Nova York: Basic Book, 1977.

PONTE, J. **Números e Álgebra no currículo escolar**. In: VALE, I. et. al. **Números e álgebra** na aprendizagem da matemática e na formação dos professores. Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação: Gráfica Visão, 2006.

PONTE, J. P; BRANCO, N. **Pensamento algébrico na formação inicial de professores**. Educar em Revista Curitiba, Brasil, n. 50, p. 135-155, out./dez. 2013. Editora UFPR.

VERGNAUD, G. **A criança, a matemática e a realidade:** problemas do ensino da matemática na escola elementar. ed. rev. Maria Lúcia Faria Mouro, tradução. Curitiba: Ed da UFPR, 2014.

______. **A teoria dos Campos Conceituais**. In: BRUN, J. **Didáctica das Matemáticas.** Maria José Figueiredo, tradução. Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

Submetido em 31 de agosto de 2022.
Aprovado em 15 de fevereiro de 2023.