

FRAÇÕES: UMA META-ANÁLISE DOS ANAIS DO ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (ENEM)

FRACTIONS: A META-ANALYSIS OF THE ANNALS OF THE NATIONAL MEETING OF MATHEMATICAL EDUCATION (ENEM)

Luciane Thiele

Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Unioeste

luciane_thiele@hotmail.com

Tiago Emanuel Klüber

Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Unioeste

tiagokluber@gmail.com

Arthur Belford Powell

The State University of New Jersey

powellab@newark.rutgers.edu

Resumo

O ensino e a aprendizagem de frações são temas recorrentes nas pesquisas em Educação Matemática. Eles são abordados das mais diversas maneiras e com concepções específicas sobre o objeto matemático *fração*. Para se avançar no tema, torna-se importante compreender aquilo que já foi produzido. Para isso assumimos a interrogação: *O que se revela nas pesquisas publicadas do ENEM acerca dos modos de ensinar frações no Ensino Fundamental? Que interpretações estes trabalhos atribuem às frações?* Essas interrogações conduziram esta investigação, segundo uma abordagem qualitativa fenomenológica. Do levantamento realizado nos anais do evento, resultaram 20 trabalhos que foram selecionados e analisados segundo as suas próprias informações à luz das interrogações desta pesquisa. O *software Atlas.ti* foi utilizado para apoiar o processo de análise e categorização dos dados. Os principais resultados apontam para a presença de diversificados modos de ensino para o conteúdo de frações, com ênfase na compreensão das frações embasadas no modelo de partição.

Palavras-chave: Fenomenologia; Ensino Fundamental; Frações.

Abstract

The teaching and learning of fractions are recurring themes in research in Mathematics Education. They have been approached in the most diverse ways and with specific conceptions about the mathematical object *fraction*. To advance on the theme, it is important to understand what has already been produced. For that we assume the interrogation: *What is revealed in the researches published by ENEM about the ways of teaching fractions in Elementary School? What interpretations do these works assign to the fractions?* These questions led this investigation, according to a phenomenological qualitative approach. From the survey carried out in the annals of the event, 20 works resulted that were selected and analyzed according to their own information

in the light of the questions of this research. *Atlas.ti software* was used to support the data analysis and categorization process. The main results point to the presence of diversified teaching ways for the content of fractions, with emphasis on the understanding fractions based in the partition model.

Keywords: Phenomenology; Elementary School; Fractions.

OBJETO E CONTEXTO DA PESQUISA

Ao se questionar constantemente sobre o objeto¹ de pesquisa, ensino de frações, muitos trajetos e possibilidades de reflexões se abriram. Buscando explicitá-lo, podemos dizer que é decorrente do movimento incessante de retomada das interrogações da pesquisa, que emergem de uma investigação de mestrado. A necessidade de pesquisar sobre o ensino dos números fracionários surgiu a partir da experiência da primeira autora, enquanto atuava como docente de matemática em turmas do Ensino Fundamental - Anos Finais. Em suas aulas, foi possível observar que os alunos apresentavam dificuldades na construção do conceito² e na realização de operações com frações, mesmo que eles já tenham passado pelo processo de escolarização nos anos anteriores, conforme legislação vigente do Ensino Fundamental. O que se percebe, é que o ensino desse conteúdo está sendo abordado de uma maneira que prioriza a memorização de regras e procedimentos ao operar frações pelos alunos.

Conforme o relato acima, trajetos de pesquisa se abriram e fomos direcionados, também, à busca de compreensão das diversas maneiras de manifestação do fenômeno, pois “[...] buscamos pela perspectiva de onde olhar o fenômeno e o que mais vier ao encontro do que perguntamos” (BICUDO, 2011c, p. 42). Um deles refere-se aos *modos de ensinar frações* e o outro às *interpretações atribuídas a elas*, especificamente no Ensino Fundamental.

Assumimos, neste texto, a compreensão sobre o significado de pesquisar, que para Bicudo (2011a, p. 21), é “[...] perquirir sobre o que nos chama a atenção e que nos causa desconforto e perplexidade, de modo atento e rigoroso [...]”. Portanto, partimos de uma

¹Ao perceber um objeto “ele sempre nos é dado segundo um certo modo de doação ou fenômeno” (Husserl *apud* PAULO; AMARAL; SANTIAGO, 2010, p. 73). A busca pela compreensão do objeto é dada por este “modo de doação”, ou seja, é o fenômeno que buscamos compreender.

²Segundo Kieren (1980, p. 125, tradução nossa) “O termo conceito matemático é usado de muitas maneiras. Isto pode se referir a um objeto ou a uma classe de objetos matemáticos. Mais frequentemente, em matemática, um conceito é associado a uma declaração formal de definição”. Assumimos esse trecho como uma definição de frações.

inquietação, uma preocupação com o ensino das frações, a qual emerge das experiências vividas da primeira autora deste texto. Nesse sentido, foram realizadas buscas por trabalhos que contemplassem o ensino de frações no Ensino Fundamental, guiados pelas seguintes interrogações de pesquisa: *O que se revela nas pesquisas publicadas do ENEM acerca dos modos de ensinar frações no Ensino Fundamental? Que interpretações estes trabalhos atribuem às frações?* A característica do interrogado nos “conduz ao movimento de meta-pesquisa, ou seja, pesquisa sobre a pesquisa, ou ainda, sobre sua própria produção” (BICUDO; PAULO, 2011, p. 255).

Direcionamos o olhar às pesquisas já desenvolvidas e disponíveis nos anais do Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM) das treze primeiras edições (1987 a 2019). Foram selecionados como materiais significativos, os Relatos de Experiências e as Comunicações Científicas, os quais serão analisados à luz das interrogações estabelecidas. A abordagem de pesquisa é predominantemente qualitativa, segundo uma visão fenomenológica. A escolha do evento “Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM)”, justifica-se pelo vasto número de encontros e pela importância que este possui em âmbito nacional, pois congrega tanto professores, quanto pesquisadores. Cada encontro expressa, cada vez mais, o interesse pelas discussões sobre questões da Educação Matemática. Além disso, por ser itinerante, congrega perspectivas locais, regionais, nacionais e internacionais.

As questões que concernem a nossa região de inquérito, bem como os aspectos metodológicos para a realização desta pesquisa, os procedimentos adotados no processo de recolha e produção de dados, e posteriormente, a análise, serão apresentados a seguir.

ASPECTOS DA PESQUISA

Assumindo a pesquisa qualitativa, segundo uma visão fenomenológica, entendemos que a principal característica nesta postura é ser conduzido por uma interrogação, a qual nos movimenta para a explicitação do fenômeno e dela mesma (BICUDO; KLÜBER, 2013).

Afirmamos que pesquisar é buscar uma interrogação em diferentes perspectivas, de maneira que a ela podemos voltar uma vez e outra ainda e mais outra... A interrogação se comporta como se fosse um pano de fundo onde as perguntas do pesquisador encontram seu solo, fazendo sentido. (BICUDO, 2011a, p. 22-23).

Com essa compreensão, interrogamos: *O que se revela nas pesquisas publicadas do ENEM acerca dos modos de ensinar frações no Ensino Fundamental? Que interpretações estes trabalhos atribuem às frações?* Direcionando-nos, como já afirmamos, à relevância da análise dos trabalhos disponíveis nos anais do Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM), para que pudéssemos compreender o nosso fenômeno: os modos de ensinar frações e as interpretações atribuídas a elas, especificamente no Ensino Fundamental.

Perseguindo o sentido das interrogações, esta pesquisa se ateve a dois momentos: o primeiro momento consistiu na busca por trabalhos (Comunicação Científica e Relato de Experiência) que continham no título os termos *frações* ou *fração*. Essa busca nos fez considerar inicialmente 59 textos, dirigidos ao ensino de frações, disponibilizados nos anais do evento. Apresenta-se, no Quadro 1, a distribuição desses trabalhos, informando a edição do evento; local e ano do evento e a quantidade de relatos de experiências e comunicações científicas.

Quadro 1 – Trabalhos sobre frações localizados nos anais do ENEM.

Edição do ENEM	Local e ano	Relatos de experiência	Comunicações científicas
I	PUC-SP, São Paulo, 1987	0	0
II	UEM, Maringá-PR, 1988	0	0
III	UFRN, Natal-RN, 1990	0	0
IV	FURB, Blumenau-SC, 1992	0	0
V	UFS, Aracaju, 1995	0	0
VI	UNISINOS, Rio Grande do Sul, 1998	0	0
VII	UFRJ, Rio de Janeiro, 2001	1	1
VIII	UFPE, Recife, 2004	0	2
IX	UNI-BH, Belo Horizonte, 2007	0	2
X	Ilhéus: Via Litterarum, Salvador, 2010	1	4
XI	PUC-PR, Curitiba, 2013	6	3
XII	Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2016	10	8
XIII	Arena Pantanal, Cuiabá/MT, 2019	5	16

Fonte: Elaborado pelos autores (2022).

O segundo momento ocorreu após a leitura dos resumos, em que os trabalhos foram analisados e selecionados, segundo as suas próprias informações, à luz das interrogações desta pesquisa, restando apenas 20 dos 59 encontrados na primeira busca. Desses, 10 são Relatos de Experiência (RE) e 10 são Comunicações Científicas (CC). Em seguida, fez-se a leitura aprofundada de cada um deles.

O Quadro 2 contém a listagem dos trabalhos utilizados para a investigação,

informando: o título de cada um; o (s) autor (es); o ano do evento; a classificação dos trabalhos em Relatos de Experiências (RE) ou Comunicações Científicas (CC) e; o código do trabalho.

Quadro 2 – Trabalhos selecionados à luz das nossas interrogações

TÍTULO	ANO	RE	CC	CÓDIGO
Frações como extensão do Sistema numérico	2001		x	T01
Construindo a representação da fração: abordagem tradicional versus abordagem conceitual.	2004		x	T02
A resolução de adição de frações por crianças através do referencial de metade.	2004	x		T03
Operações com frações x dificuldade na resolução de problemas.	2007		x	T04
Um olhar sobre alguns obstáculos que permeiam a aula de matemática: um exemplo com frações.	2007		x	T05
Adição e subtração de frações com denominadores diferentes a partir de situações-problemas.	2010		x	T06
Adição e subtração de frações com calculadora virtual.	2010		x	T07
O uso de jogos no ensino de fração.	2013		x	T08
Análise do processo de aprendizagem de frações.	2013	x		T09
A utilização do lúdico no processo de ensino-aprendizagem de frações.	2013	x		T10
O ensino das frações de uma maneira diferenciada.	2013	x		T11
Prática matemática: uma sequência didática para o ensino e aprendizagem de frações.	2013	x		T12
Algumas revelações de alunos e professoras do 4º. ano do ensino fundamental sobre o significado parte-todo dos números racionais.	2016		x	T13
Ensino de frações equivalentes através de dobraduras.	2016	x		T14
Ensino de fração: uma experiência com o frac-soma 235.	2016	x		T15
O ensino de frações no ensino fundamental i: livros paradidáticos, culinária, jogos e tecnologias.	2016	x		T16
Análise institucional e praxeológica do objeto frações: Análise da questão corrida de revezamento.	2019		x	T17
Triminó de frações: O uso de jogos na formação docente.	2019	x		T18
Que delícia de fração!	2019	x		T19
Aprimorando o conhecimento dos estudantes sobre a magnitude da fração: Um estudo preliminar com alunos nos anos iniciais	2019		x	T20

Fonte: Elaborado pelos autores (2022).

Recolhidos os 20 textos, passou-se ao processo de análise. Nessa etapa, foi utilizado o *software* de apoio, análise qualitativa, *Atlas.ti* que, segundo Klüber (2014), auxilia na

organização e nos registros do movimento realizado pelo pesquisador. Esse software não efetua as análises por si só, pois este é um esforço demandado pelo pesquisador. Com o auxílio desse *software*, buscou-se os invariantes que emergiram dos modos de ensinar e as interpretações atribuídas acerca do conteúdo de frações, relatados nas Comunicações Científicas ou nos Relatos de Experiências. Conforme menciona Bicudo (2011a), iniciamos a análise com a leitura e releitura atenta dos trabalhos, nos quais buscávamos identificar os elementos concernentes às nossas interrogações de pesquisa, os quais, foram organizados com o intuito de chegar até as unidades de significado, que foram estabelecidas pelo pesquisador. Estas não se encontram prontas nos textos, mas são resultados de leituras atentas, “[...] com a intenção de destacar o que de importante, em relação à interrogação, está sendo dito” (BICUDO, 2011a, p. 26).

Uma vez estabelecidas, as unidades foram lidas e relidas repetidas vezes, buscando compreendê-las em seus significados individuais e convergentes, com vista às categorias. Destacamos que essas categorias não foram definidas a *priori*, pois na investigação fenomenológica, deixamos que as coisas se manifestem como são, sem projetar nelas nossas expectativas (PALMER, 1969). Esses procedimentos fenomenológicos indicam o ato de *redução* ou uma *epoché*, no qual o pesquisador deve ter o cuidado para que o que ele conhece sobre o investigado não conduza o caminho da investigação (PAULO; AMARAL; SANTIAGO, 2010). As interpretações das categorias foram efetuadas hermeneuticamente, buscando “[...] explicitar o que compreende do dito pelo sujeito, construindo as asserções articuladas ou, colocando na linguagem do pesquisador, o sentido percebido nos discursos do sujeito” (PAULO; AMARAL; SANTIAGO, 2010, p. 74).

ANÁLISE E INTERPRETAÇÃO

No encadeamento da metodologia assumida e das explanações realizadas, foram estabelecidas dez categorias que emergiram das unidades de significado destacadas dos Relatos de Experiências e Comunicações Científicas. Estas são apresentadas no Quadro 3 e no Quadro 4.

As categorias S1, S2, S3, S4, S5 e S6, advêm da primeira interrogação: *O que se revela nas pesquisas publicadas do ENEM acerca dos modos de ensinar frações no Ensino Fundamental?* As categorias F7, F8, F9 e F10, são provenientes da segunda interrogação:

Que tipos de interpretações estes trabalhos atribuem às frações? Inicialmente, serão apresentadas as categorias provenientes da primeira interrogação (Quadro 3), sucedidas pelas respectivas análises. E, na sequência, será realizado o mesmo movimento com as categorias provenientes da segunda interrogação. A numeração das categorias se deu de maneira aleatória e não por indicação de nível ou grau de importância. Na coluna da direita, as categorias foram nomeadas de acordo com as convergências dos sentidos que decorreram das unidades de significado, que são apresentadas na coluna da esquerda.

Quadro 3 – Categorias provenientes da primeira interrogação

CATEGORIA	NOME
S1	Sobre os alunos participantes
S2	Sobre o encadeamento didático utilizado
S3	Sobre o referencial teórico para o encadeamento didático
S4	Sobre os aspectos do cotidiano dos alunos
S5	Sobre os materiais manipuláveis utilizados
S6	Sobre os <i>softwares</i> utilizados

Fonte: Elaborado pelos autores (2022).

A categoria S1, **Sobre os alunos participantes**, mostra que doze das propostas de atividades são voltadas aos alunos do Ensino Fundamental – Anos Finais, na maioria aos alunos dos 6º e 7º anos (faixa etária entre 11 e 12 anos), e oito para o ensino nos Anos Iniciais, voltados a alunos dos 2º até o 5º ano (faixa etária de 7 a 10 anos). Talvez a predominância de trabalhos nos Anos Finais de escolarização se deva ao fato do conteúdo de frações se concentrar nesses respectivos anos de escolaridade, conforme previsto nos documentos orientadores de ensino. A maior parte dos alunos frequentavam escolas públicas municipais e estaduais, nas quais o professor da turma, por meio de iniciativas próprias ou em conjunto com a universidade, desenvolveu maneiras diversificadas de abordar o conteúdo de frações. Além disso, na descrição dos trabalhos, ficou explícito o envolvimento dos alunos nas atividades propostas, visto que, a maioria delas eram diferentes daquelas que estavam habituados a desenvolver.

A categoria S2, **Sobre o encadeamento didático utilizado**, envolve o uso de diversificados materiais manipuláveis, como: o uso de *softwares*, avaliações diagnósticas, avaliações pós-teste e resolução de situações-problema envolvendo imagens e representações simbólicas. Do total de trabalhos analisados, quatro deles utilizaram uma abordagem mista, ou seja, mais de dois modos de ensino para trabalhar o conteúdo fração.

Ao que concerne à aplicação de pré e pós-testes, nove trabalhos utilizaram algum

tipo de avaliação. Desses, cinco trabalhos utilizaram pré e pós-testes e quatro utilizaram pré-teste *ou* pós-teste. Os pré-testes, também chamados de avaliações diagnósticas, têm o intuito de observar o que os alunos entendem sobre frações e os pós-testes visam verificar a evolução da aprendizagem deles após serem submetidos a alguma sequência de atividades pré-estabelecidas. Entremeio aos testes, os autores utilizaram-se de alguma sequência de atividades, mas poucos apresentaram o seu desenvolvimento, visto que os objetivos dos trabalhos se centravam na análise dos resultados (acertos/erros) apresentados nos testes.

Na categoria S3, **Sobre o referencial teórico para o encadeamento didático**, observamos que seis dos vinte trabalhos contam com referencial teórico para o encadeamento didático dos trabalhos.

Para organizar a sequência de atividades, os autores do trabalho T12 utilizaram a Teoria das Situações Didáticas de Brousseau, em especial, o conceito de situação didática. O trabalho T2 respalda-se na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, no qual a fração é concebida não apenas como um conceito, mas como um dos elementos que compõe o Campo Conceitual Multiplicativo. Os autores do trabalho T17 analisaram a compreensão dos alunos a respeito do conteúdo de divisão de frações, baseado na Teoria da Transposição Didática e na Teoria Antropológica do Didático.

Os autores do trabalho T9 analisaram o processo de aprendizagem de frações baseado nos estudos de Piaget. O trabalho T4, ao apresentar as sequências de atividades, utilizou a metodologia de resolução de problemas, seus autores recomendam esta maneira de abordar o tema, pois acreditam que ele contribui de forma significativa para compreender as regras práticas que auxiliam nas operações aritméticas com frações. O autor do trabalho T20, utilizou uma perspectiva histórico-cultural sobre a História da Matemática e Educação Matemática para compreender o que é uma fração e para construir tarefas. Para introduzir os números fracionários, fundamentou suas atividades na magnitude das frações, baseado nos estudos de Behr *et al.* (1984), Fazio *et al.* (2014), Carraher (1993, 1996) e Powell e Ali (2018).

A categoria S4 é denominada: **Sobre a utilização de aspectos do cotidiano dos alunos**. A utilização de aspectos do cotidiano dos alunos, como *receitas culinárias* para o ensino de frações, também teve destaque nos trabalhos. No desenvolvimento das receitas,

os autores dos trabalhos T11, T16 e T19, realizaram alguns questionamentos relativos às frações, no sentido de mostrar que os conteúdos matemáticos, sobretudo, as frações, são importantes até na preparação de receitas. Esses autores realizaram a análise das receitas, o cálculo do dobro e metade das quantidades e realizaram a divisão em partes iguais.

A categoria S5, tem como título: **Sobre os materiais manipuláveis utilizados**. Os autores do trabalho T11, utilizaram o material manipulável *tangram* para trabalhar os conceitos iniciais de fração, partindo da sua definição. Os autores dos trabalhos T10 e T12, utilizaram o material manipulável *discos de frações* para reforçar a composição de um inteiro. O trabalho T20, apresenta as potencialidades da perspectiva de medição para o estudo das frações e utiliza as *barras de Cuisenaire* para desenvolver a ideia de que uma fração relata uma comparação multiplicativa entre duas quantidades comensuráveis.

Os autores do trabalho T16 exploraram o livro *Frações sem Mistérios*, escrito por Luzia Faraco Ramos. Na sequência, utilizaram o *material dourado* com o intuito de compreender melhor o sentido de numerador e denominador, utilizaram também o *tangram* para compreender com mais significação as operações de adição e subtração de frações e as frações equivalentes.

Os autores do trabalho T15 construíram o material manipulável *frac-soma 235* e relataram realizar marcações para cortarem a folha de forma a otimizar o seu espaço. Essa experiência de construção do material é o ponto de partida, segundo os autores, para a sistematização de conceitos matemáticos.

Em dois dos trabalhos analisados foram utilizadas dobraduras. Os autores do trabalho T14 desenvolveram uma atividade em uma turma do PIBID (Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência), cujo objetivo foi reforçar o conteúdo visto em sala de aula. Os autores do trabalho T11 utilizaram dobraduras com intuito de comparar os tamanhos das frações.

Ao que concerne ao uso de jogos didáticos, os autores dos trabalhos T07, T08, T10, T16 e T18 propuseram diversos jogos para o ensino das frações, como: *Bafrão*, *dominó de frações equivalentes*, *papa todas*, *triminó de frações*, *pizza com frações* e *jogos de baralho*. Os jogos, em geral, tinham como objetivo: a fixação ou retomada de conteúdo; abordar conceitos de frações; leitura correta e a identificação de numerador e denominador; identificar as várias formas de representação das frações: decimal, fracionária e

geométrica; abordar as operações de adição e subtração de frações, com o mesmo denominador e denominadores diferentes.

Categoria S6: **Sobre a utilização de *software* no ensino de frações.** Ao que se refere ao uso de algum *software* para o ensino e a aprendizagem de frações, destacamos três trabalhos. Os autores dos trabalhos T06 e T07 utilizaram o *software calculadora virtual* para a realização de algumas operações com frações. O objetivo de trabalhar com a calculadora era avaliar sua viabilidade no ensino de frações envolvendo situações problemas. No trabalho T16, os autores utilizaram o jogo online *enigma das frações*, que aborda conceitos de frações equivalentes e sua representação gráfica. Esses autores ainda ressaltam que o jogo não era somente para dispor de momentos de diversão, mas que, foi utilizado como recurso didático para desafiar os alunos cognitivamente.

As categorias F7, F8, F9 e F10 são provenientes da segunda interrogação: *Que interpretações estes trabalhos atribuem às frações?* E são apresentadas no Quadro 4.

Quadro 4 – Categorias provenientes da segunda interrogação

CATEGORIA	NOME
F7	Fração como comparação entre parte e todo
F8	Fração como conceito operacional, simbólico e representacional
F9	Fração como medição/mensuração
F10	Fração como representação do real

Fonte: Elaborado pelos autores (2022).

Categoria F7: **Fração como comparação entre parte e todo.** O autor do trabalho T02 relata que o conceito global de frações não se alcança de uma vez e “A identificação e a caracterização dos contextos que tornam significativas as noções de fração, estão ligadas a um megaconceito” (BEZERRA, 2004, p. 4). Esse autor propôs a seus alunos uma sequência de problemas sobre frações, envolvendo situações de: metade; terça parte; quinta parte; ou seja, abrangem situações que envolvam divisões, uma maneira de interpretar as frações. Os autores do trabalho T03, de maneira semelhante, propuseram a resolução de adição de frações por meio do referencial de “metade”.

Os trabalhos T09, T19 e T17 abordaram situações problemas que envolvam divisões, como: “Mamãe fez um bolo para dividir entre seus filhos. Dividiu o bolo em 10 partes, Pedrinho comeu $\frac{1}{4}$ do bolo, e Ana comeu $\frac{2}{5}$ do bolo. Que quantia de bolo os dois comeram juntos?” (SANTOS; BULLAMNN; MARCHEZAN, 2013, p. 6); “Se a turma tem 22 alunos e a receita rende 8 pedaços, quantas pizzas serão necessárias para que todos

comam pelo menos um pedaço?” (SILVA, 2019, p. 5); “Em uma corrida de revezamento, cada corredor percorre $\frac{1}{8}$ de km. Quantos corredores são necessários para uma corrida de $\frac{3}{4}$ kms?” (LEÃO, 2019, p. 8). Nesse último trabalho (T17), o autor se propôs a analisar a compreensão dos alunos a respeito do conteúdo de divisão de frações.

Outros trabalhos analisados também abordaram as frações de forma a priorizar o modelo de partição (quantidades discretizadas), como vemos nos trabalhos T02, T04, T11, T13, T15 e T19. Os autores do trabalho T11, utilizaram a divisão de pizzas em partes iguais e a divisão de uma folha em partes iguais. Os trabalhos T02 e T19, abordaram algumas situações problemas, como: “Julia e Renato foram comer pizza. Julia comeu $\frac{1}{4}$ e Renato $\frac{1}{4}$ de uma pizza de calabresa. Que fração da pizza eles comeram juntos?” (COSTA; SÁ, 2007, p. 5); ou “Antonio pintou a terça parte do retângulo. Quantas partes faltam para terminar?” (BEZERRA, 2004). Nesse último problema, os autores apresentaram figuras particionadas, nas quais, os alunos deveriam representar simbolicamente a parte colorida. Ao que concerne à utilização de jogos, também verificamos fortemente o uso da interpretação parte-todo, como por exemplo, no jogo *frac-soma 235*, em que cada retângulo já está dividido em partes preestabelecidas (trabalho T15); e no trabalho T13, no qual os autores apresentaram os resultados do desenvolvimento de duas atividades de material didático, que utiliza a interpretação parte-todo para a representação fracionária dos números racionais.

Categoria F8: Fração como conceito operacional, simbólico e representacional. Os trabalhos T08 e T10, destacaram a importância de trabalhar frações envolvendo situações práticas. Utilizam-se de jogos e outras atividades lúdicas para desenvolver os primeiros conceitos, como: denominador, numerador, representação simbólica e não simbólicas (quantidades discretizadas), equivalência e adição de frações, e as diferentes formas de representação (fracionária, decimal, geométrica e escrita). Nas atividades não simbólicas abordadas, priorizou-se as atividades com frações próprias.

Categoria F9: Fração como medição/mensuração. No trabalho T20, o autor utilizou as Barras Cuisenaire para trabalhar frações em uma turma de 2º ano e, assim, desenvolver a ideia de que uma “fração relata uma comparação multiplicativa entre duas quantidades comensuráveis” (POWELL, 2019, p. 1). O objetivo de uma das atividades era a mensuração do comprimento de uma barra com o comprimento de uma outra barra,

levando-as às expressões de frações-de-quantidade. Em um dos exemplos relatados, os estudantes medem o comprimento da barra marrom com as barras vermelhas e, posteriormente, com as barras brancas e concluem que uma barra marrom corresponde a quatro barras vermelhas e em comparação com as brancas, são necessárias oito brancas para se obter uma marrom, ou seja, faz-se a comparação de uma medida A em relação a medida B. Os autores do trabalho T15, mencionaram a palavra *medição* alegando trabalhar com ideias intuitivas de medição a partir da construção do material *frac soma 235*, fazendo apropriação desses conceitos para futuras aplicações.

Categoria F10: **Fração como número.** A autora do trabalho T01 ressalta a importância de as frações serem reconhecidas pelos alunos como uma extensão do sistema numérico. A autora destaca que os livros didáticos não têm auxiliado nesta questão, pois as frações são geralmente introduzidas apenas por meio de diagramas parte/inteiro. Logo, em seu trabalho, ela investiga os resultados sobre o entendimento de frações como uma extensão do sistema numérico, utilizando de uma sequência de ensino com ênfase nos conceitos de números mistos, e em frações do tipo $\frac{n}{n}$ com $n \neq 0$.

No Quadro 5, trazemos uma visão geral dos trabalhos analisados, para melhor entendimento do leitor.

Quadro 5 – Trabalhos utilizados para a análise

TÍTULO	ANO	CÓDIGO
Frações como extensão do Sistema numérico	2001	T01
Construindo a representação da fração: abordagem tradicional versus abordagem conceitual.	2004	T02
A resolução de adição de frações por crianças através do referencial de metade.	2004	T03
Operações com frações x dificuldade na resolução de problemas.	2007	T04
Um olhar sobre alguns obstáculos que permeiam a aula de matemática: um exemplo com frações.	2007	T05
Adição e subtração de frações com denominadores diferentes a partir de situações-problemas.	2010	T06
Adição e subtração de frações com calculadora virtual.	2010	T07
O uso de jogos no ensino de fração.	2013	T08
Análise do processo de aprendizagem de frações.	2013	T09
A utilização do lúdico no processo de ensino-aprendizagem de frações.	2013	T10
O ensino das frações de uma maneira diferenciada.	2013	T11

Prática matemática: uma sequência didática para o ensino e aprendizagem de frações.	2013	T12
Algumas revelações de alunos e professoras do 4º. ano do ensino fundamental sobre o significado parte-todo dos números racionais.	2016	T13
Ensino de frações equivalentes através de dobraduras.	2016	T14
Ensino de fração: uma experiência com o frac-soma 235.	2016	T15
O ensino de frações no ensino fundamental i: livros paradidáticos, culinária, jogos e tecnologias.	2016	T16
Análise institucional e praxeológica do objeto frações: Análise da questão corrida de revezamento.	2019	T17
Triminó de frações: O uso de jogos na formação docente.	2019	T18
Que delícia de fração!	2019	T19
Aprimorando o conhecimento dos estudantes sobre a magnitude da fração: Um estudo preliminar com alunos nos anos iniciais	2019	T20

Fonte: Elaborado pelos autores (2022).

A partir das análises desses trabalhos, chegamos às dez categorias apresentadas nessa seção. A categoria F7 “Fração como comparação entre parte e todo”, teve destaque, visto que grande parte os trabalhos se embasaram na perspectiva (interpretação) parte-todo.

EXPONDO SIGNIFICADOS DAS CATEGORIAS

Nesta seção, discorreremos sobre as compreensões advindas das categorias estabelecidas de acordo com as interrogações desta pesquisa. Em relação ao primeiro questionamento: *O que se revela nas pesquisas publicadas do ENEM acerca dos modos de ensinar frações no Ensino Fundamental?* a utilização de materiais manipuláveis, destaca-se entre os outros modos de ensino e, geralmente, a utilização destes vem acompanhada de situações-problema que envolvem equivalência e operações com frações. Considerando que a maioria dos textos analisados não possui referencial teórico explícito, é razoável admitir que o ensino de frações pode ter conotações empiristas, tanto que uma das categorias que se revelou enfoca as frações a partir de situações do cotidiano. Sem dúvida, o uso de materiais manipulativos e os aspectos do cotidiano se mostram importantes na disseminação do conhecimento sobre frações, porém, a manutenção de práticas empiristas no ensino de matemática continua a contribuir para a não aprendizagem dos objetos matemáticos (BECKER, 2019).

Os autores, muitas vezes, utilizaram mais de um modo de ensino para frações, demonstrando a preocupação com o ensino e a aprendizagem deste conteúdo. As atividades utilizadas foram escolhidas pelos próprios professores ou pesquisadores e eram, em sua maioria, voltadas à resolução de situações-problema. De modo geral, os alunos não tiveram oportunidades de tecerem seus próprios questionamentos ou de dialogarem acerca de suas próprias compreensões. Das categorias, podemos afirmar que as práticas utilizadas são sempre alinhadas ao currículo e o ensino é limitado a um certo tempo estipulado, não enfatizando o tempo de aprendizagem dos estudantes (BECKER, 2019; THIESEN, 2011). Um determinado conhecimento poderia ser abordado em diferentes momentos de escolarização do estudante, não fixado em apenas um momento.

A questão da temporalidade das práticas e das investigações dá indicativo de que a compreensão da aprendizagem ainda é focada em resquícios de teorias de aprendizagem focadas na imediatidade da causa e efeito das práticas, sem levar em conta o tempo necessário para cada sujeito em sua individualidade. Em nossa compreensão, isso se reforça com a presença de pré e pós-testes. Estes são muito comuns na ciência experimental e tiveram forte incentivo nas décadas de 1970 até meados da década de 1980 no Brasil. Sem a intenção de menosprezar a sua importância e a sua utilização, entendemos que o contexto em que são aplicados, de práticas efêmeras, sem acompanhamento permanente e sem o devido controle de variáveis que impactam os estudos, os tornam inócuos e pouco contribuem para o avanço das pesquisas de modo mais amplo, ainda que possam servir a ações mais pontuais e às intenções dos pesquisadores.

Naquilo que concerne às *interpretações atribuídas às frações*, os trabalhos, em sua maioria, se apoiam na interpretação parte-todo, dando ênfase às frações próprias. Esse aspecto, segundo Powell (2019a) e Graça, Da Ponte e Guerreiro (2021), pode dificultar a compreensão das frações impróprias. O entendimento advindo da curricularização sobre frações também predomina nas pesquisas, o que é plausível. No entanto, do ponto de vista da pesquisa e da compreensão das frações, é importante levar em conta mais de uma forma de interpretação, conforme indicam diferentes pesquisadores, como: Kieren (1980) e Scheffer e Powell (2019). Segundo Powell (2018), focar apenas na interpretação parte/todo, limita o entendimento dos estudantes, visto que não é suficiente como base para o ensino dos números racionais.

Alguns trabalhos, além da perspectiva de partição, apresentaram outras maneiras de interpretar frações. Destes, 5 embasaram o desenvolvimento de atividades em situações-problema que envolviam divisões e dois que fizeram menção à perspectiva de medição no desenvolvimento das atividades. Esses trabalhos, como se pôde perceber, são minoria e não denotam a compreensão hegemônica tanto do currículo quanto das práticas e pesquisas investigadas. Essas compreensões não hegemônicas podem abrir possibilidades para novas investigações, bem como para a mudança de práticas no ensino de frações. Contudo, elas trazem discrepâncias do modelo vigente e podem encontrar resistência em termos de adesão, implementação e circulação. Isso pode ser feito por meio de programas de formação de professores que sejam longevos, estudos amplos em escolas parceiras, culminando, a depender dos resultados de pesquisa, em políticas públicas para a educação.

CONCLUSÃO

Assumindo a perspectiva fenomenológica de investigação, esse movimento de pesquisa conduzido pelas interrogações: *O que se revela nas pesquisas publicadas do ENEM acerca dos modos de ensinar frações no Ensino Fundamental? Que interpretações estes trabalhos atribuem às frações?* fez emergir dez categorias: S1) Sobre os alunos participantes; S2) Sobre o encadeamento didático utilizado; S3) Sobre o referencial teórico para o encadeamento didático; S4) Sobre os aspectos do cotidiano dos alunos; S5) Sobre os materiais manipuláveis utilizados; S6) Sobre os softwares utilizados; F7) Fração como comparação entre parte e todo; F8) Fração como conceito operacional, simbólico e representacional; F9) Fração como medição/mensuração; F10) Fração como representação do real. As seis primeiras categorias advêm da primeira interrogação e as restantes da segunda interrogação.

As interpretações dessas categorias, que se revelaram ao longo desta pesquisa, nos permitem afirmar que há uma preocupação no ensino e a aprendizagem das frações, observamos isso na quantidade de trabalhos encontrados. Também nos fez perceber que a maioria dos trabalhos se volta a alunos dos anos finais do Ensino Fundamental, especificamente aos de 6º e 7º anos, os autores relataram ter percebido a dificuldade e a insegurança que estes alunos apresentam em aprender frações.

Destacou-se a busca dos autores por diversos modos de propiciar o conhecimento

e a aprendizagem das frações, optando por maneiras diversificadas de se trabalhar o conteúdo, de um jeito que aproxime a realidade do aluno ao aprendizado deste conteúdo. Para isso, utilizaram-se de: materiais manipuláveis; *softwares*; aspectos do cotidiano dos alunos; sequências de atividades que envolvem figuras, desenhos ou situações-problema.

Em relação às interpretações atribuídas às atividades realizadas, a maioria foi embasada no modelo de partição, conforme descrito em uma das categorias. Talvez este fato se dê em virtude de os livros didáticos também utilizarem unicamente esta interpretação. Podemos destacar, neste momento a percepção do autor Powell (2018, p. 79) que afirma “[...] até agora, as pesquisas em Educação Matemática não têm avançado a prática do ensino de frações e operações com frações para que os estudantes possam construir e apropriar o conhecimento com facilidade”. Esta afirmação se deve ao fato desse conteúdo ser abordado unicamente por uma visão ontológica, como percebido na análise dos trabalhos.

Nesse contexto, revela-se ainda a necessidade de mudanças nos documentos orientadores em relação ao ensino das frações, valorizando as várias interpretações para elas. Também há a necessidade de se trabalhar nas formações continuadas dos professores, principalmente aqueles dos anos iniciais do Ensino Fundamental, ponto em que se inicia o estudo deste conteúdo, metodologias que valorizem as cinco interpretações de frações. Assim, haverá um avanço na aprendizagem dos alunos, minimizando as dificuldades nos anos seguintes. Mais ainda, seria essencial ter pesquisas que abordam as vantagens cognitivas do ensino inicial de uma ou outra das interpretações de frações.

REFERÊNCIAS

AMATO, S. A. Frações como uma extensão do Sistema numérico. *In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 7., 2001, Rio de Janeiro. **Anais [...]**. Rio de Janeiro: Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2001, p. 1-10.

BECKER, F. Construção do Conhecimento Matemático: natureza, transmissão e gênese. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 33, p. 963-987, 2019.

BEHR, M. J. et al. Order and equivalence of rational numbers: A clinical teaching experiment. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 5, n. 5, p. 321-341, 1984.

BERNARDI, T. P.; MEGID, M. A. B. A. O ensino de frações no ensino fundamental I:

livros paradidáticos, culinária, jogos e tecnologias. *In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 12., 2016, São Paulo. **Anais [...]**. São Paulo, SP, 2016, p. 1-12.

BEZERRA, F. J. B. Construindo a representação da fração: abordagem tradicional versus abordagem conceitual. *In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 8., 2004, Recife. **Anais [...]**. Recife: Universidade Federal de Pernambuco, 2004, p. 1-10.

BICUDO, M. A. V. A pesquisa qualitativa olhada para além dos seus procedimentos. *In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. (Org.) Pesquisa qualitativa segundo a visão fenomenológica*. 1ªed. São Paulo: Editora Cortez, 2011a, p. 11-28.

BICUDO, M. A. V. Aspectos da pesquisa qualitativa efetuada em uma abordagem fenomenológica. *In: Maria Aparecida Viggiani Bicudo. (Org.) Pesquisa qualitativa segundo uma visão fenomenológica*. 1ªed. São Paulo: Editora Cortez, 2011b, p. 29-40.

BICUDO, M. A. V. A pesquisa qualitativa fenomenológica: interrogação, descrição e modalidades de análise. *In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. (Org.) Pesquisa qualitativa segundo a visão fenomenológica*. 1ªed. São Paulo: Editora Cortez, 2011c, p. 41-74.

BICUDO, M. A. V.; KLÜBER, T. E. A questão de pesquisa sob a perspectiva da atitude fenomenológica de investigação. **Conjectura: filosofia e educação**, [s. l.], v. 18, n. 3, p. 24-40, 2013.

BICUDO, M. A. V.; PAULO, R. M. Um exercício filosófico sobre a pesquisa em Educação Matemática no Brasil. **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 25, n. 41, p. 251-298, 2011.

CARRAHER, D. W. Lines of Thought: A Ratio and Operator Model of Rational Number. **Educational Studies in Mathematics**, v. 25, n. 4, p. 281-305, 1993. Disponível em: <http://www.jstor.org.proxy.libraries.rutgers.edu/stable/3482758>.

CARRAHER, D. W. Learning about fractions. *In: STEFFE, L. P. et al. (Org.) Theories of mathematical learning*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1996. p. 241-266.

CAVALCANTI, J. D. B.; SANTOS, M. C.; JÓFILI, Z. M. S. Um olhar sobre alguns obstáculos que permeiam a aula de matemática: um exemplo com frações. *In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 9., 2007, Belo Horizonte. **Anais [...]**. Belo Horizonte: Universidade de Belo Horizonte - UNI-BH, 2007, p. 1-10.

COSTA, A. C.; SÁ, P. F. Operações com frações X dificuldade na resolução de problemas. *In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 9., 2007, Belo Horizonte. **Anais [...]**. Belo Horizonte: Universidade de Belo Horizonte - UNI-BH,

2007, p. 1-10.

CRUZ, M. S. S.; SPINILLO, A. G. A resolução de adição de frações por crianças através do referencial de metade. *In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 8., 2004, Recife. **Anais [...]**. Recife: Universidade Federal de Pernambuco, 2004, p. 1-10.

FAZIO, L. K. et al. Relations of different types of numerical magnitude representations to each other and to mathematics achievement. **Journal of Experimental Child Psychology**, v. 123, p. 53-72, 7/1/July 2014. 2014. Disponível em: <<https://login.proxy.libraries.rutgers.edu/login?url=https://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=edselp&AN=S0022096514000204&site=eds-live>>.

GRAÇA, S. I.; DA PONTE, J. P.; GUERREIRO, A. Quando As Frações Não São Apenas Partes de Um Todo...! **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, [s. l.], v. 23, n. 1, p. 683-712, 2021.

KIEREN, T. E. The rational number construct – its elements and mechanisms. *In: KIEREN, Thomas E. (ed.) Recent Research on Number Learning*. Columbus: Eric/Smeac, p. 125- 150, 1980.

KLÜBER, T. E. Atlas/ti como instrumento de análise em pesquisa qualitativa de abordagem fenomenológica. **ETD-Educação Temática Digital**, [s. l.], v. 16, n. 1, p. 5-23, 2014.

LEÃO, K. W. M. Análise institucional e praxeológica do objeto frações: Análise da questão corrida de revezamento. *In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 13., 2019, Cuiabá. **Anais [...]**. Cuiabá-MT, 2019, p. 1-15.

LOPES, A. T.; PATRICIO, R. S. O uso de jogos no ensino de fração. *In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 11., 2013, Curitiba. **Anais [...]**. Curitiba: PUC/PR, 2013, p. 1-10.

MELO, E. M.; COSTA C. J. N. Ensino de fração: uma experiência com o frac-soma 235. *In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 12., 2016, São Paulo. **Anais [...]**. São Paulo- SP, 2016, p. 1-11.

MOREIRA, I. et al. Adição e subtração de frações com denominadores diferentes a partir de situações-problemas. *In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 10., 2010, Salvador. **Anais [...]**. Ilhéus: Via Litterarum, 2010, p. 1-10.

NASCIMENTO, K. C.; NASCIMENTO, I. A.; OLIVEIRA, D. G. Ensino de frações equivalentes através de dobraduras. *In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 12., 2016, São Paulo. **Anais [...]**. São Paulo- SP, 2016, p. 1-10.

PALMER, R. E. **Hermenêutica**. Tradução de Maria Luísa Ribeiro Ferreira. Lisboa: ed.

70, 1969.

PASUCH, A.; BARBOSA, J. V.; BASSANI, L. T. A utilização do lúdico no processo de ensino-aprendizagem de frações. *In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 11., 2013, Curitiba. **Anais [...]**. Curitiba: PUC/PR, 2013, p. 1-10.

PAULO, R. M.; AMARAL, C. L. C.; SANTIAGO, R. A. A pesquisa na perspectiva fenomenológica: explicitando uma possibilidade de compreensão do ser-professor de matemática. **Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências**, [s. l.], v. 10, n. 3, 2010.

POWELL, A. B. Melhorando a epistemologia de números fracionários: Uma ontologia baseada na história e neurociência. **Revista de Matemática, Ensino e cultura (REMATEC)**, [s. l.], v. 13, n. 29, p. 78-93, 2018.

POWELL, A. B.; ALI, K. V. Design Research in Mathematics Education: Investigating a Measuring Approach to Fraction Sense. *In: CUSTÓDIO, J. F. et al. (org.). Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica (PPGECT): Contribuições para Pesquisa e Ensino*. São Paulo: Livraria da Física, p. 221-242, 2018.

POWELL, A. B. Como uma Fração Recebe seu Nome. *Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática: ReBECM*, Cascavel, Pr, v.3, n.3, p. 700-713, 2019a.

POWELL, A. B. Aprimorando o conhecimento dos estudantes sobre a magnitude da fração: Um estudo preliminar com alunos nos anos iniciais. *In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 13., 2019, Cuiabá. **Anais [...]**. Cuiabá-MT, 2019b, p. 1-15.

SÁ, P. F.; JESUS, A. C. N.; NETO, A. J. B.; ALVES, F. J. C.; RODRIGUES, I. F. Adição e subtração de frações com calculadora virtual. *In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 10, 2010, Salvador. **Anais [...]**. Ilhéus: Via Litterarum, 2010, p. 1-10.

SANTOS, A. T.; BULLAMNN, C. L.; MARCHEZAN, A. Análise do processo de aprendizagem de frações. *In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 11., 2013, Curitiba. **Anais [...]**. Curitiba: PUC/PR, 2013, p. 1-9.

SCHEFFER, N. F.; POWELL, A. B. Frações nos livros brasileiros do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). **Revemop**, Ouro Preto, MG, v. 1, n. 3, p. 476-503, 2019.

SILVA, D. R. R.; WOLF, M. H. M.; BURIGATO, S. M. M. S. Prática matemática: uma sequência didática para o ensino e aprendizagem de frações. *In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 11., 2013, Curitiba. **Anais [...]**. Curitiba: PUC/PR, 2013, p. 1-10.

SILVA, E. W. F. Que delícia de fração! *In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 13., 2019, Cuiabá. **Anais [...]**. Cuiabá-MT, 2019, p. 1-10.

SOARES, A. W.; CÔCO, D. Triminó de frações: O uso de jogos na formação docente. *In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 13., 2019, Cuiabá. **Anais [...]**. Cuiabá-MT, 2019, p. 1-8.

THIESEN, J. S. Tempos e espaços na organização curricular: uma reflexão sobre a dinâmica dos processos escolares. **Educação em Revista**, [s. l.], v. 27, p. 241-260, 2011.

UTIMURA, G. Z.; CURI, E. Algumas revelações de alunos e professoras do 4º. ano do ensino fundamental sobre o significado parte-todo dos números racionais. *In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 12., 2016, São Paulo. **Anais [...]**. São Paulo- SP, 2016, p. 1-12.

ZABEL, M.; MUNHOZ, R. H. O ensino das frações de uma maneira diferenciada. *In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 11., 2013, Curitiba. **Anais [...]**. Curitiba: PUC/PR, 2013, p. 1-10

Submetido em 24 de outubro de 2022.

Aprovado em 09 de maio de 2023.