REVISEM

Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática

https://doi.org/10.34179/revisem.v8i3.18280

ESPAÇOS VETORIAIS QUE ADMITEM DECOMPOSIÇÃO COMO UNIÃO DE SUBESPAÇOS PRÓPRIOS

João Francisco da Silva Filho
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira - Unilab
joaofilho@unilab.edu.br
Ivyna Maria da Silva Jucá
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira - Unilab
ivyjuca1@gmail.com

Resumo

No presente trabalho, obtemos caracterizações de espaços vetoriais de dimensão finita que podem ser escritos como união finita ou enumerável de subespaços próprios. Em particular, deduzimos que espaços vetoriais de dimensão finita sobre corpos infinitos (respectivamente não enumeráveis) não podem ser escritos como união finita (respectivamente enumerável) de subespaços próprios.

Palavras-Chave: Espaços vetoriais, Subespaços, União de subespaços próprios.

Abstract

In the present work, we obtain characterizations of vector spaces of finite dimension which can be written as finite union or enumerable union of proper subspaces. In particular, we deduce that vector spaces of finite dimension on infinite fields (respectively non enumerable fields) can't be written as finite union (respectively enumerable union) of proper subspaces.

Keywords: Vector spaces, Subspaces, Union of proper subspaces.

1 Introdução

Mais comumente, verifica-se que a abordagem de espaços vetoriais encontrada na literatura, principalmente a nível de Graduação, fica mais restrita a espaços vetoriais reais e complexos, ou seja, espaços vetoriais sobre os corpos dos números reais e dos números complexos, respectivamente. Sabendo que espaços vetoriais reais e complexos não triviais são infinitos não enumeráveis, também ficamos restritos a conhecer bem mais sobre os espaços vetoriais infinitos e pouco costuma-se explorar acerca de espaços vetoriais finitos.

Por outro lado, deve-se recordar que um conhecido resultado de Álgebra Linear nos garante que espaços vetoriais reais e complexos de dimensão finita não podem ser escritos como uma união finita de subespaços próprios (cf. Bueno [2], Hoffman e Kunze [4] e Lima [6]), nos levando a questionar se este resultado continuaria válido para espaços vetoriais de dimensão finita sobre um corpo arbitrário e espaços vetoriais reais e complexos de dimensão infinita.

Neste trabalho, apresentamos alguns exemplos e obtemos caracterizações para os espaços vetoriais que admitem decomposição como união finita de subespaços próprios. Finalmente, caracterizamos os espaços vetoriais que admitem decomposição como união enumerável de subespaços próprios, concluindo que os espaços vetoriais de dimensão finita sobre corpos não enumeráveis não podem ser escritos como união enumerável de subespaços próprios. Deve-se ainda ressaltar que as caracterizações anteriormente mencionadas não constam na literatura.

2 Preliminares

Nesta seção, recordamos conceitos e notações necessários à formalização das noções de conjuntos finitos, infinitos, enumeráveis e não enumeráveis, bem como espaços vetoriais e transformações lineares, que serão essenciais ao longo do trabalho. Mais detalhes sobre os referidos assuntos, podem ser conferidos em Lima [5], Bueno [2], Gonçalves [3] e Lima [6].

2.1 Conjuntos Finitos, Enumeráveis e Não Enumeráveis

Inicialmente, revisitamos os conjuntos finitos, infinitos, enumeráveis e não enumeráveis, bem como notações e resultados relacionados a estes conceitos, cujas demonstrações encontram-se em Lima [5]. Para isso, adotamos a notação $I_n = \{k \in \mathbb{N}; 1 \leq k \leq n\}$ que será usada com frequência no trabalho.

Definição 2.1. *Dizemos que um conjunto X é finito se for vazio ou existe uma bijeção $\varphi : I_n \to X$ para algum $n \in \mathbb{N}$, onde n corresponde ao número de elementos (ou cardinalidade) para conjuntos não vazios.*

Exemplo 2.2. O conjunto $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ é finito, visto que a função $\varphi : I_n \to I_n$, dada por $\varphi(x) = x$, define uma bijeção.

Na sequência, apresentamos um interessante resultado relacionado aos conjuntos finitos.

Proposição 2.3. *Sejam X e Y conjuntos não vazios e $\phi : X \to Y$ uma bijeção, então X é finito com n elementos se, e somente se, Y é finito com n elementos.*

Apresentamos a seguir uma propriedade de subconjuntos de conjuntos finitos.

Proposição 2.4. *Todo subconjunto de um conjunto finito é finito.*

Dando continuidade, apresentamos um resultado que trata sobre a cardinalidade da união disjunta de conjuntos.

Proposição 2.5. *Dados X e Y conjuntos finitos disjuntos com m e n elementos, respectivamente, então o conjunto $X \cup Y$ é finito com $m + n$ elementos.*

Como aplicação da Proposição 2.5, decorre um resultado sobre a cardinalidade de produtos cartesianos.

Corolário 2.6. *Dados $X_1, X_2, \dots, X_k$ conjuntos finitos com $m_1, m_2, \dots, m_k$ elementos, respectivamente, então o produto cartesiano $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k$ é um conjunto finito que possui $m_1 m_2 \cdots m_k$ elementos.*

Na sequência, definimos *conjunto infinito* e enunciamos alguns exemplos.

Definição 2.7. *Dizemos que um conjunto X é infinito se não for finito.*

Exemplo 2.8. O conjuntos dos números naturais $\mathbb{N}$ é infinito.

Suponha por absurdo que $\mathbb{N}$ é conjunto finito, então existe uma bijeção $\varphi : I_n \to \mathbb{N}$, que em particular será injetiva e sobrejetiva. Nessas condições, vamos denotar

$$m = \max\{\varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(n)\},$$

implicando que $\varphi(k) < m+1$ para todo $k \in I_n$, contrariando o fato de φ ser sobrejetiva.

Combinando o Exemplo 2.8 com a Proposição 2.4, conclui-se que todo conjunto que possui os naturais como subconjunto é um conjunto infinito. Em particular, obtemos os próximos exemplos.

Exemplo 2.9. Os conjuntos dos números inteiros $\mathbb{Z}$, racionais $\mathbb{Q}$, reais $\mathbb{R}$ e complexos $\mathbb{C}$ são infinitos.

Dando prosseguimento, recordamos o conceito de conjuntos enumeráveis seguida de exemplos.

Definição 2.10. *Dizemos que um conjunto X é enumerável se for finito ou se existir uma bijeção $\varphi : \mathbb{N} \to X$.*

Exemplo 2.11. Os conjuntos dos números naturais $\mathbb{N}$ e dos números inteiros $\mathbb{Z}$ são enumeráveis.

Nesse momento, enunciamos um resultado que nos traz uma propriedade referente a conjuntos enumeráveis não vazios.

Proposição 2.12. *Sejam X e Y conjuntos não vazios e $\phi : X \to Y$ uma bijeção. Então X será enumerável, se e somente se, Y for enumerável.*

No próximo resultado, apresentamos uma propriedade referente a subconjuntos de conjuntos enumeráveis.

Proposição 2.13. *Todo subconjunto de um conjunto enumerável é enumerável.*

Como consequência da Proposição 2.13, obtemos os seguintes resultados:

Corolário 2.14. *Sejam X e Y dois conjuntos não vazios e $\varphi : X \to Y$ uma função, então valem as afirmações:*

(a) *Se φ é injetiva e Y é enumerável, então X é enumerável.*
(b) *Se φ é sobrejetiva e X é enumerável, então Y é enumerável.*

Corolário 2.15. *Dados X e Y conjuntos enumeráveis, então o produto cartesiano $X \times Y$ é enumerável.*

Usando os Corolários 2.14 e 2.15, podemos justificar mais um exemplo de conjunto enumerável.

Exemplo 2.16. O conjuntos dos números racionais $\mathbb{Q}$ é um conjunto enumerável.

Encerramos esta subseção, definindo conjuntos não enumeráveis e apresentando dois exemplos.

Definição 2.17. *Dizemos que um conjunto X é não enumerável se não for enumerável.*

Exemplo 2.18. Os conjuntos dos números reais $\mathbb{R}$ e dos números complexos $\mathbb{C}$ são não enumeráveis.

2.2 Espaços Vetoriais e Transformações Lineares

Nesta subseção, fazemos uma breve abordagem sobre espaços vetoriais e transformações lineares para fixar notações e terminologia que serão usadas no restante do trabalho, bem como para apresentar resultados preliminares, cujas demonstrações encontram-se em Bueno [2] e Lima [6]. Inicialmente, recordamos a definição de uma importante estrutura algébrica no estudo dos espaços vetoriais, chamada de *corpo*.

Definição 2.19. *Dizemos que um corpo é um conjunto não vazio* $\mathbb{K}$ *munido de duas operações, chamadas de soma e produto*

$$+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K} \text{ (soma)} \qquad e \qquad \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K} \text{ (produto)}$$

que satisfazem, para quaisquer elementos $a, b, c \in \mathbb{K}$*, as seguintes propriedades:*

(a) $(a + b) + c = a + (b + c)$;
(b) *Existe* $0 \in \mathbb{K}$*, tal que* $a + 0 = 0 + a$;
(c) *Existe* $-a \in \mathbb{K}$*, tal que* $a + (-a) = (-a) + a = 0$;
(d) $a + b = b + a$;
(e) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;
(f) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ *e* $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$;
(g) *Existe* $1 \in \mathbb{K} - \{0\}$*, tal que* $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$;
(h) $a \cdot b = b \cdot a$;
(i) *Se* $a \neq 0$*, então existe* $a^{-1} \in \mathbb{K}$ *tal que* $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$.

Destacamos a seguir alguns exemplos de corpos que podem ser encontrados em Gonçalves [3].

Exemplo 2.20. Os conjuntos numéricos $\mathbb{Q}$ (números racionais), $\mathbb{R}$ (números reais) e $\mathbb{C}$ (números complexos) munidos com suas respectivas operações usuais de soma e produto são corpos.

Exemplo 2.21. Sendo $p \in \mathbb{N}$ um número primo, então o conjunto

$$\mathbb{Q}(\sqrt{p}) = \{a + b\sqrt{p} \in \mathbb{R}; a, b \in \mathbb{Q}\}$$

munido com a soma e o produto usuais de números reais é um corpo.

Exemplo 2.22. Sendo $p \in \mathbb{N}$ um número primo, então o conjunto $\mathbb{Z}_p = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{p-1}\}$ das classes de equivalência módulo p, munido com a soma $\oplus$ e o produto $\odot$ usuais, definidos por

$$\overline{x} \oplus \overline{y} := \overline{x + y} \qquad \text{e} \qquad \overline{x} \odot \overline{y} := \overline{x \cdot y},$$

constitui um corpo.

Diante da definição de corpo, podemos introduzir a definição de espaço vetorial sobre um corpo.

Definição 2.23. *Dizemos que um espaço vetorial X sobre um corpo $\mathbb{K}$ é um conjunto não vazio munido de duas operações, chamadas de soma e produto por escalar*

$$+ : X \times X \to X \text{ (soma de vetores)} \qquad e \qquad \cdot : \mathbb{K} \times X \to X \text{ (produto por escalar)}$$

que satisfazem, para quaisquer vetores $x, y, z \in X$ e $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{K}$, as propriedades:

(A1) $(x + y) + z = x + (y + z)$;
(A2) *Existe* $0 \in X$ (*vetor nulo*), *tal que* $x + 0 = 0 + x$;
(A3) *Existe* $-x \in X$, *tal que* $x + (-x) = (-x) + x = 0$;
(A4) $x + y = y + x$;
(A5) $1 \cdot x = x$;
(A6) $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$;
(A7) $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$;
(A8) $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$.

Observação 2.24. Por simplicidade, passaremos a omitir o símbolo $\cdot$ na indicação do produto por escalar.

Na sequência, apresentamos alguns exemplos de espaços vetoriais bem conhecidos na literatura.

Exemplo 2.25. Sejam $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ um corpo e $m \in \mathbb{N}$ arbitrário, então o conjunto

$$\mathbb{K}^m = \{(x_1, x_2, \dots, x_m); x_i \in \mathbb{K} \text{ e } i \in I_m\}$$

é um espaço vetorial munido com as seguintes operações:

(1) $(x_1, x_2, \dots, x_m) + (y_1, y_2, \dots, y_m) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_m + y_m)$;

(2) $\lambda(x_1, x_2, \dots, x_m) := (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_m)$.

Observação 2.26. Por simplicidade, usamos no Exemplo 2.25 a mesma notação para as operações de $\mathbb{K}$ e $\mathbb{K}^m$.

Exemplo 2.27. Sejam $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ um corpo e $m \in \mathbb{N}$ arbitrário, então o conjunto de polinômios, definido por

$$\mathbb{K}_m[x] = \{a_0 + a_1 + \cdots + a_m x^m; a_i \in \mathbb{K} \text{ e } i \in I_m \cup \{0\}\}.$$

é um espaço vetorial munido com as operações:

(1) $(a_0 + a_1 + \cdots + a_m x^m) + (b_0 + b_1 + \cdots + b_m x^m) := (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x \cdots + (a_m + b_m)x^m$;

(2) $\lambda(a_0 + a_1 + \cdots + a_m x^m) := (\lambda a_0) + (\lambda a_1) + \cdots + (\lambda a_m)x^m$.

Exemplo 2.28. Sejam A um conjunto não-vazio e $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ um corpo, então o conjunto de funções, definido por

$$\mathcal{F}(A) = \{f : A \to \mathbb{K}; f \text{ é uma função}\}$$

é um espaço vetorial munido com as operações:
(1) $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$;
(2) $(\lambda f)(x) := \lambda f(x)$.

Agora definimos subconjuntos linearmente independentes e dependentes de um espaço vetorial.

Definição 2.29. *Dizemos que um subconjunto S de um espaço vetorial X é linearmente dependente se existem $x_1, x_2, ..., x_r \in S$ e escalares $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r \in \mathbb{K}$ não todos nulos, tais que $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_r x_r = 0$. Caso contrário, dizemos que S é um subconjunto linearmente independente.*

Apresentamos a seguir a noção de conjunto de geradores de um espaço vetorial.

Definição 2.30. *Dizemos que um subconjunto S de um espaço vetorial X é conjunto de geradores de X se todo elemento $x \in X$ pode ser escrito na forma*

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_r x_r,$$

onde $x_1, x_2, \ldots, x_r \in S$ e $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$.

Diante dos conceitos anteriormente enunciados, podemos definir uma base de um espaço vetorial.

Definição 2.31. *Dizemos que um subconjunto β de um espaço vetorial X é uma base de X se β é um conjunto de geradores linearmente independente.*

Enunciamos a seguir um conhecido resultado que fundamenta a noção de dimensão de um espaço vetorial.

Proposição 2.32. *Se um espaço vetorial X admite uma base $\beta = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ com n elementos, então toda base de X possui n elementos.*

De posse da proposição anterior, estamos em condições de introduzir o conceito de dimensão de um espaço vetorial.

Definição 2.33. *Dizemos que um espaço vetorial X possui dimensão finita $n \in \mathbb{N}$ quando admite uma base finita $\beta = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Ademais, dizemos que um espaço vetorial $X = \{0\}$ possui dimensão zero.*

Na sequência, trazemos definições e resultados sobre subespaço vetorial de um espaço vetorial.

Definição 2.34. *Dizemos que um subconjunto não vazio Y de um espaço vetorial X é um subespaço vetorial se Y munido com as mesmas operações de X é também um espaço vetorial.*

Definição 2.35. *Dizemos que um subespaço vetorial Y de um espaço vetorial X é próprio quando Y está contido propriamente em X.*

Dando prosseguimento, abordamos aqui um tipo particular de aplicação entre dois espaços vetoriais que preserva a estrutura linear, conhecida como *transformação linear* (ou *aplicação linear*), conforme definido a seguir.

Definição 2.36. *Dados espaços vetoriais X e Y, então uma aplicação $T : X \to Y$ é dita ser uma transformação linear se satisfaz*

$$T(x + \lambda y) = T(x) + \lambda T(y),$$

para todos $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$.

Dois importantes conjuntos relacionados ao domínio e ao contradomínio de uma transformação linear encontram-se definidos a seguir.

Definição 2.37. *Dada uma transformação linear $T : X \to Y$, dizemos que:*

(a) *O conjunto $Ker(T) = \{x \in X; T(x) = 0\}$ é o núcleo de T;*
(b) *O conjunto $Im(T) = \{y \in Y; y = T(x) \text{ com } x \in X\}$ é a imagem de T.*

Antes do último resultado da seção, introduzimos mais uma definição.

Definição 2.38. *Uma transformação linear $T : X \to Y$ é chamada de isomorfismo, quando é injetiva e sobrejetiva, simultaneamente.*

Para finalizar esta seção, apresentamos um resultado que fornece uma conhecida caracterização para espaços vetoriais de dimensão finita.

Proposição 2.39. *Todo espaço vetorial $X \neq \{0\}$ de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{K}$ é isomorfo a $\mathbb{K}^m$ para algum $m \in \mathbb{N}$.*

3 Resultados Principais

Nesta última seção, apresentamos os resultados principais do trabalho que buscam caracterizar os espaços vetoriais que podem ser decompostos como união finita ou união enumerável de subespaços próprios, mostrando que a existência das referidas decomposições em um espaço vetorial de dimensão finita está diretamente relacionada à sua cardinalidade.

Inicialmente, apresentamos dois exemplos de espaços vetoriais que correspondem a casos particulares do Exemplo 2.25 e podem ser decompostos como união de subespaços próprios.

Exemplo 3.1. O produto cartesiano $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ munido com suas operações de soma e produto usuais é um espaço vetorial sobre $\mathbb{Z}_2$. Sendo assim, tem-se que

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = X_1 \cup X_2 \cup X_3,$$

onde $X_1 = \{(\overline{0}, \overline{0}), (\overline{0}, \overline{1})\}$, $X_2 = \{(\overline{0}, \overline{0}), (\overline{1}, \overline{0})\}$ e $X_3 = \{(\overline{0}, \overline{0}), (\overline{1}, \overline{1})\}$ são subespaços próprios de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Exemplo 3.2. O produto cartesiano $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ munido com suas operações de soma e produto usuais é um espaço vetorial sobre $\mathbb{Z}_3$. Dessa forma, observa-se que

$$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 = X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4,$$

onde $X_1 = \{(\overline{0}, \overline{0}), (\overline{0}, \overline{1}), (\overline{0}, \overline{2})\}$, $X_2 = \{(\overline{0}, \overline{0}), (\overline{1}, \overline{0}), (\overline{2}, \overline{0})\}$, $X_3 = \{(\overline{0}, \overline{0}), (\overline{1}, \overline{1}), (\overline{2}, \overline{2})\}$ e $X_4 = \{(\overline{0}, \overline{0}), (\overline{1}, \overline{2}), (\overline{2}, \overline{1})\}$ são subespaços próprios de $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$.

Nesse momento, vamos definir um importante subconjunto para espaços vetoriais não triviais que estará presente em alguns resultados.

Definição 3.3. *Sejam X um espaço vetorial não trivial sobre um corpo $\mathbb{K}$, $x \in X$ e $y \in X - \{0\}$ vetores distintos, então definimos o subconjunto $\mathcal{C}_{xy} := \{x + \lambda y; \lambda \in \mathbb{K}\}$.*

Antecedendo os resultados principais, enunciamos um lema que será bastante útil na demonstração dos resultados supracitados.

Lema 3.4. *Dados um espaço vetorial X não trivial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e vetores distintos $x \in X$ e $y \in X - \{0\}$, valem as afirmações:*

(a) *A aplicação $\varphi : \mathbb{K} \to \mathcal{C}_{xy}$ dada por $\varphi(t) = x + ty$ é uma bijeção.*

(b) *O corpo $\mathbb{K}$ é finito (resp. enumerável), se e somente se, o conjunto $\mathcal{C}_{xy}$ é finito (resp. enumerável).*

Demonstração. Faremos a demonstração de cada item separadamente:

(a) Dados $t_1, t_2 \in \mathbb{K}$ arbitrários, observa-se que

$$\varphi(t_1) = \varphi(t_2) \quad \Leftrightarrow \quad x + t_1 y = x + t_2 y \quad \Leftrightarrow \quad (t_1 - t_2) y = 0,$$

daí concluímos que $t_1 = t_2$, garantindo que φ é injetiva. Por outro lado, dado $z \in \mathcal{C}_{xy}$, existe $\lambda \in \mathbb{K}$, tal que

$$z = x + \lambda y,$$

implicando que $\varphi(\lambda) = z$ e garantindo que φ é sobrejetiva.

(b) Finalmente, observa-se que o item (b) decorre diretamente do item (a) combinado com as Proposições 2.3 e 2.12. □

Nosso primeiro teorema apresenta importantes informações sobre espaços vetoriais que podem ser decompostos como união finita de subespaços próprios.

Teorema 3.5. *Seja X um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ que pode ser decomposto como uma união finita de n subespaços próprios, então $\mathbb{K}$ é um corpo finito que possui cardinalidade menor que n. Em particular, valem as seguintes afirmações:*

(a) *X não pode ser escrito como união de dois subespaços próprios.*

(b) *Espaços vetoriais sobre corpos infinitos não podem ser escritos como união finita de subespaços próprios.*

Demonstração. Inicialmente, vamos admitir que X pode ser decomposto como união de n subespaços próprios, então escrevemos

$$X = \bigcup_{k=1}^{n} X_k, \tag{3.1}$$

onde $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são subespaços próprios de X. Nessas condições, existem

$$x \in X_i - \bigcup_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} X_k \qquad \text{e} \qquad y \in X_j - \bigcup_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} X_k, \tag{3.2}$$

para índices $i, j \in I_n$ distintos.

Nesse momento, vamos supor por absurdo que o subconjunto, definido por

$$\mathcal{C}_{xy} = \{x + \lambda y; \lambda \in \mathbb{K}\}$$

não possui cardinalidade inferior a n. Lembrando que $\mathcal{C}_{xy} \subset X$, podemos escrever

$$\mathcal{C}_{xy} = X \cap \mathcal{C}_{xy} = \bigcup_{k=1}^{n} X_k \cap \mathcal{C}_{xy}, \tag{3.3}$$

onde usamos a decomposição (3.1).

Decorre das relações constantes em (3.2) que $x \notin X_j$ e $y \in X_j$, portanto

$$x + \lambda y \notin X_j$$

para todo $\lambda \in \mathbb{K}$. Dessa maneira, tem-se que $X_j \cap \mathcal{C}_{xy} = \emptyset$ e assim

$$\mathcal{C}_{xy} = \bigcup_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} X_k \cap \mathcal{C}_{xy},$$

onde usamos a igualdade (3.3).

Como estamos supondo que o conjunto $\mathcal{C}_{xy}$ não possui cardinalidade inferior a n, podemos afirmar que existe um índice $l \in I_n$, tal que

$$X_l \cap \mathcal{C}_{xy}$$

possui mais de um vetor. Dados $u, v \in X_l \cap \mathcal{C}_{xy}$ distintos, tem-se que

$$u = x + \alpha y \qquad \text{e} \qquad v = x + \beta y,$$

onde $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ são elementos distintos.

Por outro lado, verifica-se diretamente que

$$(\alpha - \beta)^{-1}(u - v) = y \in X_j,$$

então a segunda relação de (3.2) implica que $X_j = X_l$ e $u, v \in X_j$, consequentemente

$$x = u - \alpha y \in X_j,$$

que contraria a primeira relação de (3.2) e permite concluir que a cardinalidade do conjunto $\mathcal{C}_{xy}$ é menor que n.

Usando a Proposição 2.3 e o Lema 3.4, podemos afirmar que os conjuntos $\mathbb{K}$ e $\mathcal{C}_{xy}$ são finitos com cardinalidade satisfazendo

$$|\mathbb{K}| = |\mathcal{C}_{xy}| < n, \tag{3.4}$$

visto que no parágrafo anterior constatamos que $\mathcal{C}_{xy}$ tem cardinalidade inferior a n. Sabendo que qualquer corpo possui pelo menos dois elementos (cf. Definição 2.19), então $n > 2$ e a decomposição (3.1) deve possuir mais que dois subespaços vetoriais, confirmando o item (a). Por fim, basta observar que o item (b) é uma consequência imediata da relação (3.4) anteriormente obtida. □

Como aplicação imediata do Teorema 3.5, apresentamos um conhecido resultado já mencionado na introdução (cf. Bueno [2], Hoffman e Kunze [4] ou Lima [6]).

Corolário 3.6. *Espaços vetoriais reais e complexos não podem ser escritos como união finita de subespaços próprios.*

Demonstração. Sabendo que $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ são corpos infinitos (cf. Exemplo 2.9 e 2.20), então o resultado decorre diretamente do segundo item do Teorema 3.5. □

Na sequência, caracterizamos os espaços vetoriais de dimensão finita que podem ser escritos como união finita de subespaços próprios.

Corolário 3.7. *Se X é um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{K}$ e pode ser decomposto como união de n subespaços próprios, então X é finito e sua cardinalidade satisfaz*

$$4 \leq |X| \leq (n-1)^{dim(X)}.$$

Demonstração. Sabendo que X possui dimensão finita, então existe uma base

$$\beta = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\},$$

onde m denota a dimensão de X. Como X admite subespaço próprio, obviamente

$$m = dim\, X > 1, \tag{3.5}$$

visto que espaços vetoriais de dimensão um admitem apenas subespaços vetoriais triviais.

Decorre do Teorema 3.5 que $\mathbb{K}$ é um corpo finito, então segue do Corolário 2.6 que $\mathbb{K}^m$ é finito com cardinalidade

$$|\mathbb{K}^m| = |\mathbb{K}|^m,$$

enquanto as Proposições 2.3 e 2.39 garantem que X e $\mathbb{K}^m$ possuem mesma cardinalidade, consequentemente,

$$4 \leq |X| = |\mathbb{K}|^{dim(X)} \leq (n-1)^{dim(X)},$$

onde usamos o Teorema 3.5 junto com (3.5). □

Corolário 3.8. *Seja X um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{K}$ com característica $char(\mathbb{K}) = p$. Suponha que X pode ser decomposto como união finita de n subespaços próprios, então X é finito e sua cardinalidade assume a forma*

$$|X| = p^{r dim(X)},$$

onde $r \in \mathbb{N}$ satisfaz a desigualdade $p^r \leq n-1$.

Demonstração. Aplica-se o Teorema 3.5 junto com a Proposição 2.39 e o Corolário 9.1.3 de Roman [7]. □

O nosso segundo teorema apresenta uma caracterização de espaços vetoriais que podem ser escritos como união enumerável de subespaços próprios.

Teorema 3.9. *Seja X espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ que pode ser decomposto como uma união enumerável de subespaços próprios, então valem as afirmações:*

(a) *$\mathbb{K}$ é um corpo enumerável.*
(b) *Se X possui dimensão finita, então X enumerável.*

Demonstração. Primeiramente, vamos admitir que X pode ser decomposto como união enumerável de subespaços próprios, então X é finito ou escrevemos

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k, \tag{3.6}$$

onde X_k é um subespaço próprio de X para cada $k \in \mathbb{N}$. Diante do exposto, existem

$$x \in X_i - \bigcup_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{\infty} X_k \qquad \text{e} \qquad y \in X_j - \bigcup_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{\infty} X_k, \tag{3.7}$$

para dois índices $i, j \in \mathbb{N}$ distintos.

Nessas condições, supomos por absurdo que o subconjunto

$$\mathcal{C}_{xy} = \{x + \lambda y; \lambda \in \mathbb{K}\}$$

é não enumerável. Lembrando que $\mathcal{C}_{xy} \subset X$, podemos escrever

$$\mathcal{C}_{xy} = X \cap \mathcal{C}_{xy} = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k \cap \mathcal{C}_{xy}, \tag{3.8}$$

onde usamos a decomposição (3.6).

Decorre das relações constantes em (3.7) que $x \notin X_j$ e $y \in X_j$, logo

$$x + \lambda y \notin X_j$$

para todo $\lambda \in \mathbb{K}$. Dessa forma, inferimos que $X_j \cap \mathcal{C}_{xy} = \emptyset$ e assim

$$\mathcal{C}_{xy} = \bigcup_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{\infty} X_k \cap \mathcal{C}_{xy},$$

onde usamos a igualdade (3.8).

Como a união enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável (cf. Lima [5]), podemos afirmar que existe um índice $l \in \mathbb{N}$, tal que

$$X_l \cap \mathcal{C}_{xy}$$

é não enumerável. Dados $u, v \in X_l \cap \mathcal{C}_{xy}$ distintos, escreve-se

$$u = x + \alpha y \qquad \text{e} \qquad v = x + \beta y,$$

com $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $\alpha \neq \beta$.

Em contrapartida, observa-se que

$$(\alpha - \beta)^{-1}(u - v) = y \in X_j,$$

então a segunda relação de (3.7) implica que $X_j = X_l$ e $u, v \in X_j$, consequentemente

$$x = u - \alpha y \in X_j,$$

que contradiz a primeira relação em (3.7) e nos permite afirmar que $\mathcal{C}_{xy}$ é enumerável, implicando pelo Lema 3.4 que $\mathbb{K}$ é enumerável e confirmando o item (a).

Supondo que X possui dimensão finita, segue diretamente da Proposição 2.39 e do item (a) que X é enumerável, concluindo o item (b) e a demonstração do resultado em questão. □

Finalmente, obtemos uma generalização do Corolário 3.6 que decorre diretamente do Teorema 3.9.

Corolário 3.10. *Espaços vetoriais reais e complexos não podem ser escritos como união enumerável de subespaços próprios.*

Demonstração. Como $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ são corpos não enumeráveis (cf. Exemplos 2.18 e 2.20), basta aplicar diretamente o Teorema 3.9 para obter o resultado. □

Referências

[1] Ávila, Geraldo. *Análise Matemática.* 3 ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2006.

[2] Bueno, Hamilton Prado. *Álgebra Linear: Um Segundo Curso.* Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[3] Gonçalves, Adilson. *Introdução à Álgebra.* 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

[4] Hoffman, Kenneth; Kunze, Ray. *Álgebra Linear.* São Paulo: Prentice-Hall, 1971.

[5] Lima, Elon Lages. *Curso de Análise - Volume 1.* 14 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

[6] Lima, Elon Lages. *Álgebra Linear.* 8. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

[7] Roman, Steven. *Field Theory.* Second Edition. New York: Springer-Verlag, 2006.

Submetido em 25 de Outubro de 2022.
1ª Revisão em 17 de Fevereiro de 2023.
Aceito em 13 de Maio de 2023.