Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática

https://doi.org/10.34179/revisem.v8i3.18348

O USO DA DEFINIÇÃO FORMAL DE LIMITE FINITO PARA FUNÇÕES REAIS: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO[1]

ON THE USE OF THE FORMAL DEFINITION OF FINITE LIMIT FOR REAL FUNCTIONS: A PROPOSAL FOR TEACHING

Sonia Maria Monteiro da Silva Burigato[2]
Universidade Federal do Mato Grosso do Sul – UFMS
sonia.burigato@ufms.br

Mustapha Rachidi
Universidade Federal do Mato Grosso do Sul – UFMS
mustapha.rachidi@ufms.br

Resumo

O objetivo principal deste artigo é estudar a seguinte questão: existem funções reais com valores reais, para as quais o estudo da existência, ou não, do limite finito em um ponto só é possível pela utilização da definição formal de limite? Para isso, primeiramente delimitamos o campo conceitual envolvido na construção do conceito de limite de função em um ponto, conforme Vergnaud, com intuito de elaborar situações para trabalhar com nossa questão. Em seguida, propomos três atividades, cujas análises, tanto didáticas quanto teóricas, ilustram a importância da definição formal como ferramenta pertinente para a abordagem dessas atividades. Além disso, o trabalho matemático apresentado visa contribuir para o aprofundamento do pensamento funcional, que é fundamental para a análise matemática em geral. Trazemos também discussões e considerações didáticas, e algumas observações sobre o ensino e a aprendizagem, relacionadas à definição formal de limite, inclusive dos principais conceitos envolvidos nesta definição. Sendo, assim, uma oportunidade para os estudantes aplicarem esta definição em situações em que não poderá utilizar as propriedades sobre os limites. Permitindo, com isso, que eles ampliem a compreensão deste conceito, conforme propõe Vergnaud.

Palavras-chave: Funções reais, Limite, Definição formal de limite, Épsilon e delta, Curso de Matemática.

Abstract

The main objective of this article is to study the following question: are there real-valued real functions, for which the study of the existence or not of the finite limit at a point is not possible,

[1] O presente trabalho foi realizado com apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq.

[2] Lider do Grupo GECEMS.

than using the formal definition of limit? For this, we first delimit the conceptual field involved in the construction of the concept of the limit of a function at a point, according to Vergnaud, in order to elaborate situations to work on our question. Next, we propose three activities whose analyses, both didactic and theoretical; illustrate the importance of the formal definition, as a relevant tool for approaching these activities. In addition, the mathematical work presented here aims to contribute to the deepening of functional thought, fundamental for mathematical analysis in general. We also provide didactic discussions and considerations, and some observations on teaching and learning, related to the formal definition of the limit, including the main concepts involved in this definition. The analyses of the activities have shown that it is possible to elaborate situations to mobilize the formal definition of the limit, to approach the concept of limit of certain functions, which appear in the manuals. As a result, it is an opportunity for students to apply this definition in situations where they cannot use the usual properties and techniques on limits. This allows them to broaden the understanding of this concept, as proposed by Vergnaud.
Keywords: Real functions, Formal definition of the limit, Finite Limit, Epsilon and delta, Mathematical course.

INTRODUÇÃO

Desde os trabalhos de Newton e Leibniz, o conceito de limite passou por várias etapas, cheias de obstáculos e polêmicas, durante seu desenvolvimento antes da primeira definição proposta por Cauchy. Ele tinha como objetivo estudar a continuidade, que era uma das preocupações dos matemáticos do século XVIII e início do século XIX. Essa definição seminal de Cauchy, qualificada de “metafísica”, foi adequadamente matematizada com Weierstrass e posteriormente formalizada usando a notação de valor absoluto com Jordan (RACHIDI, FREITAS e MONGELLI, 2020). Resultando, assim, na definição de limite de função que é encontrada atualmente proposta no ensino, com uso de épsilon e delta, de inequações e módulos, usualmente denominada de definição formal.

Essa definição formal com épsilon e delta é apresentada na introdução do conceito de limite de uma função real, em geral, após a discussão de uma definição intuitiva desse conceito. Todavia, mesmo sendo trabalhada em conjunto com noções mais intuitivas, a definição formal é considerada de difícil compreensão para os estudantes.

Neste sentido, diversos estudos trazem que essas duas definições, tanto a formal como a intuitiva, envolvem aspectos considerados complexos para os estudantes, e que a passagem de uma linguagem intuitiva para o uso formal da definição utilizando épsilon e delta não é tarefa simples, evidenciando, por exemplo, que existe uma “distância” entre o que é trabalhado na definição intuitiva com o que é utilizado na definição formal, utilizando épsilon e delta (CORNU, 1983). Esses resultados são utilizados em estudos que buscam minimizar esse problema, como, por exemplo, em pesquisas sobre elaboração e aplicação de sequências didáticas para trabalhar com a introdução do conceito de limite de uma função real (LECORRE, 2016; BURIGATO, RACHIDI, 2021; ZUCHI, 2013). O objetivo geralmente é a aprendizagem desse conceito e, assim, a compreensão e mobilização dessas definições, intuitiva e formal. Todavia, existem também argumentações de que o uso da definição formal com épsilon e delta fica restrito somente a provas das propriedades operatórias, e/ou de teoremas, que serão utilizados para calcular os limites (FERNANDES, 2015; IREM, 2017).

Este fato também é observado em outros países em que o ensino de limite é iniciado pelas sequências e somente após é que são introduzidos os casos de limites com as funções. Na França, por exemplo, que segue esse modelo, é comum o uso de uma propriedade clássica, que caracteriza a existência de limites, considerando as sequências de números reais (IREM, 2017). Isso, de certa forma, influencia o modo como a definição formal é utilizada para aprofundamento desse conceito nas atividades que envolvem o limite de uma função. Esse fato foi confirmado por pesquisadores franceses da comissão do Instituto de Pesquisa em Matemática (IREM) em 2017 ao analisarem os programas, livros didáticos e notas de aulas produzidas por alguns professores das universidades. Segundo eles as atividades propostas para estudo dos limites:

> [...] se reduzem a simplesmente solicitar os "cálculos" de limites sobre funções explícitas usando regras algébricas. Raramente os exercícios são sobre funções gerais requerendo a utilização da definição em (ε; δ). [...]
> Todas as obras dos cursos estudados insistem na definição formal, embora os enunciados dos exercícios evidenciem que o predomínio é do cálculo, utilizando a álgebra dos limites sobre funções majoritariamente explícitas, esse é o objetivo principal e não o raciocínio e a escrita formal de provas. As provas são, no entanto, escritas e detalhadas na apresentação de propriedades. Raramente é dada alguma motivação para este trabalho matemático formal ou computacional. (IREM, 2017, p. 42-43, Tradução nossa).

Os autores evidenciam que há uma preocupação em relação ao trabalho mais formal da definição de limite de uma função real em termos de épsilon e delta, mas ficando seu uso restrito mais às demonstrações das propriedades sobre os limites, juntamente com as regras algébricas.

Neste aspecto nos reportamos a Vergnaud (1990), segundo ele a apresentação da definição de um conceito não é suficiente para que o aluno a compreenda. É por meio das situações que o estudante precisa lidar ao longo do ensino que um conceito adquire sentido para ele, sendo que “[...] toda situação complexa pode ser analisada como uma combinação de tarefas, cuja natureza e dificuldade próprias é importante conhecer." (VERGNAUD, 1990, p. 146, tradução nossa). No estudo e análise das situações para aprendizagem de um conceito a teoria dos campos conceituais (TCC) de Vergnaud se preocupa com os conceitos envolvidos nas situações, pois não se pode investigar o ensino e a aprendizagem de um conceito de modo isolado, ele sempre está inserido em um campo conceitual. Ou seja, seu estudo envolve diversos outros conceitos que fazem parte da sua construção. Por exemplo, as situações para aprendizagem da definição formal de limite com épsilon e delta envolvem o conjunto dos números reais, as funções, entre outros. A experiência em situações variadas é fundamental para o que esse teórico chama de conceitualização.

Neste aspecto, consideramos importante essa diversidade de situações para o trabalho com estudantes dos Cursos de Matemática, licenciatura ou bacharelado, em que esses conceitos serão mobilizados ao longo do curso. Concordamos com Artigue (1995) quando argumenta que muitas situações que dão sentido aos conceitos de função e de números reais só são possíveis no estudo com os limites, pelos estudantes.

Essas discussões nos suscitaram as seguintes questões: Após apresentação da definição de limite finito de uma função, com épsilon e delta, quais atividades são utilizadas para exemplificar o seu uso? Quais conceitos estão envolvidos nessas situações? Trabalhamos com a hipótese de que é possível elaborar situações em que a definição formal de limite finito de uma função em um ponto seja a ferramenta fundamental e pertinente para sua resolução.

Neste artigo apresentamos o estudo realizado que nos permitiu validar nossa hipótese. Organizamos este texto do seguinte modo: primeiramente apresentamos nossas escolhas teóricas e metodológicas de pesquisa; e, para situar o contexto da nossa problemática, faremos um breve estudo sobre a apresentação e utilização da definição formal de limite finito de uma função em um ponto em alguns livros didáticos indicados para estudantes de cursos de Matemática. Em seguida apresentamos alguns modelos de situações que elaboramos utilizando algumas funções identificadas nos livros didáticos, sendo que algumas foram adaptadas ou modificadas do texto original. Além disso, para cada situação, propomos uma resolução e algumas considerações didáticas do campo conceitual envolvido. Ao final, tecemos nossas conclusões e algumas perspectivas sobre o tema discutido.

REFERENCIAL TEÓRICO E METODOLÓGICO

Neste tópico apresentamos a teoria dos campos conceituais de Vergnaud (1990) que subsidiou nossos estudos, bem como, nossos encaminhamentos metodológicos.

A Teoria dos Campos Conceituais (TCC)

Para Vergnaud (1990) não podemos limitar o ensino de um conceito a apresentação da sua definição se estamos interessados na sua aprendizagem. É por meio das situações que o estudante precisa lidar que um conceito pode adquirir sentido para ele. Sendo que, cada situação envolve algum aspecto relacionado à compreensão do conceito, além do fato de envolver diversos outros conceitos que estão imbricados no processo de construção do conceito, objeto do ensino. É por causa disso que Vergnaud trata de campos conceituais quando se reporta ao ensino de um conceito visando a sua aprendizagem.

Deste modo, quando consideramos a definição formal de limite finito de função real em um ponto (DFL) precisamos analisar também outros conceitos, como o de números reais e o de funções. Em particular destacamos esses dois conceitos, pois além deles fazerem parte da construção do conceito de limite de função (ARTIGUE, 1995; RACHIDI, FREITAS E MONGELLI, 2020), alguns aspectos importantes da construção do conjunto dos números reais e de função só são vivenciados pelos estudantes quando a DFL é apresentada a eles. Ou seja, nesta introdução estamos tanto trabalhando com a construção de um novo conceito, como também estamos lidando com aspectos nunca vivenciados pelos estudantes. Por exemplo, quando aparece a expressão "*Dado um* $\varepsilon > 0$" estamos nos reportando a um número real positivo, tão pequeno quando se queira que será o "tamanho" de um dado intervalo aberto dos conjuntos dos números reais que deve se relacionar a outro intervalo com as mesmas características. Situações que envolvem números reais, com essas especificações não são trabalhadas na educação básica.

> Há situações que nunca encontramos antes e a partir delas fazemos uma transposição, uma filiação, uma analogia, uma associação, etc. As filiações existem. Não existiria desenvolvimento se não houvesse filiações, se não pudéssemos nos apoiar nos conhecimentos anteriores. Mas, ao mesmo tempo, esses conhecimentos e essas competências anteriores podem constituir um obstáculo aos novos conhecimentos. Porque não somente são pontos de apoio, mas também são maneiras de ver as coisas estruturadas e contra as quais temos de lutar para poder admitir coisas novas. [...] os conhecimentos anteriores são tanto ponto de apoio como um obstáculo. Eis de onde vem a ruptura, ou a ideia de ruptura: por vezes temos de rejeitar, ou melhor, tomar distância em relação a esses conhecimentos anteriores a fim de poder adquirir novos conhecimentos.

(VERGNAUD, 2015, p. 19).

Neste aspecto, é importante oportunizar situações em que o aluno precise lidar com as especificidades dos conceitos envolvidos na DFL para que ele consiga avançar nesse processo de conceitualização. Vergnaud (1990) considera um conceito como uma tríade envolvendo: um conjunto de situações que dão sentido ao conceito, objeto de ensino; um conjunto de invariantes operatórios, que são os conhecimentos que devem ser mobilizados para lidar com as situações; e um conjunto de formas linguísticas ou não, que irá permitir representar simbolicamente os dois conjuntos anteriores. Em nossa pesquisa buscamos elaborar situações envolvendo a DFL considerando essa tríade de conjuntos, sendo que para isso, primeiramente delimitamos o campo conceitual em que iríamos elaborar essas atividades. A seguir, apresentamos como encaminhamos nossos estudos.

Encaminhamentos metodológicos

Nossa investigação teve como objetivo propor situações para o ensino do conceito de limite finito de função em um ponto, em particular atividades para o estudo da DFL. Para isso, fizemos um estudo bibliográfico buscando delimitar o campo conceitual para elaboração das atividades.

Assim, primeiramente investigamos algumas pesquisas envolvendo essa temática, selecionamos livros didáticos utilizados pelos professores na disciplina em que a DFL é introduzida. A escolha desses livros foi por meio do estudo das ementas da disciplina que apresenta esta definição nos Cursos de Matemática – Licenciatura, oferecidos pela universidade em que trabalhamos em seis cidades do estado de Mato Grosso do Sul. Selecionamos os três livros didáticos mais indicados nas bibliografias dessa disciplina, em que buscamos identificar e estudar:

- Como a DFL é apresentada nos livros didáticos, no caso os conceitos e as representações utilizadas;
- As atividades utilizadas para estudo da DFL;
- As funções utilizadas para exemplificar a DFL.

Esse estudo nos permitiu selecionar algumas funções que evidenciassem aspectos importantes no uso da DFL, bem como, as representações que consideramos mais pertinentes para tratar aspectos considerados problemáticos, segundo pesquisas, para compreensão dos estudantes.

Em seguida, elaboramos situações para ensino da DFL envolvendo o campo conceitual delimitado e apresentamos uma proposta de resolução detalhada para cada uma delas, juntamente a uma discussão didática dos conceitos envolvidos, tanto na apresentação da atividade, como na proposta para a sua resolução. A seguir apresentamos os estudos realizados para delimitação do campo conceitual envolvido na apresentação da DFL.

A DEFINIÇÃO FORMAL DE LIMITE FINITO DE UMA FUNÇÃO REAL EM UM PONTO

O conceito de limite de função é introduzido na primeira disciplina que trabalha com o Cálculo Diferencial e Integral (CDI), denominada geralmente de Cálculo I (CI). Observando as ementas da disciplina de CI, oferecida nos cursos de Matemática-Licenciatura (ou de Bacharelado) pela universidade em que trabalhamos, vemos que elas têm pouca diferença, com relação à ordem de apresentação dos temas do Cálculo que serão trabalhados, todas seguem a mesma ordem: limite de uma função, derivada e integral. Como o livro didático é um recurso importante para orientar o estudo em uma disciplina, consideramos pertinente estudar as indicações para bibliografia básica. E, assim, selecionamos os três livros mais indicados para o estudo da disciplina de CI, oferecido em seis cidades pela universidade em que trabalhamos, no caso: Um Curso de Cálculo, Vol. 1 (GUIDORIZZI, 2003), O Cálculo com Geometria Analítica, volume 1 (LEITHOLD, 1994) e Cálculo, volume 1 (STEWART, 2013). A seguir apresentamos brevemente como a DFL é introduzida nesses livros, em que procuramos identificar como ela é apresentada, quais conceitos e representações são utilizados. Bem como, quais funções são mobilizadas para exemplificar a utilização dessa definição.

Em “Um Curso de Cálculo, Vol. 1” de Guidorizzi (2003), o conceito de limite de uma função real é apresentado no capítulo: *Limite e Continuidade*. Primeiramente é introduzida a noção de continuidade de uma função e o limite de uma função em um ponto de modo intuitivo. As representações utilizadas são: algébrica de limite, linguagem natural escrita e a geométrica. A definição formal com uso do épsilon e delta é introduzida na (Seção 3.3), conforme a seguir:

> **Definição**: Seja f uma função e p um ponto do domínio de f ou extremidade de um dos intervalos que compõe o domínio de f. Dizemos que f tem limite L, em p, se, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existir um $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in D_f$,
> $$0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - p| < \varepsilon.$$
> Tal número L, que quando existe é único, será indicado por $\lim\limits_{x \to p} f(x)$.

Assim $\lim_{x \to p} f(x) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 \text{ tal que } x \in D_f \\ 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - p| < \varepsilon \end{cases}$
(GUIDORIZZI, 2003, p. 72).

Em seguida, só volta a mobilizar a definição formal no final do capítulo, na seção 3.9 quando faz a prova das operações sobre os limites e do Teorema do Confronto, e finaliza sem apresentar nenhum exemplo, com o uso da definição formal de limite.

Em "O Cálculo com Geometria Analítica, Volume 1", de Leithold (1994) o conceito de limite de uma função real é apresentado no capítulo 2 – O *Limite de uma Função* – Primeiro a noção intuitiva com uso de diversas representações. Esse livro busca desde o início relacionar as expressões "*tomando x suficiente próximo de*" e "*tão pequeno quanto desejarmos*" com as expressões algébricas utilizando módulos e as inequações como distâncias. Toda essa discussão é para introduzir a definição formal:

> **Definição**: Seja *f* uma função definida para todo número em algum intervalo aberto contendo *a*, exceto possivelmente no próprio *a*. O limite de *f(x)* quando *x* tende a *a* será *L*, escrito como $\lim_{x \to a} f(x) = L$.
> Se a seguinte afirmação for verdadeira:
> Dado $\varepsilon > 0$ qualquer, existe $\delta > 0$ tal que
> $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$.
> (LETHOLD, 2013, p. 58).

Leithold propõe diversos exercícios similares para a utilização da definição formal por épsilon e delta, com funções polinomiais e racionais. Em seguida, são apresentadas as propriedades sobre os limites. O autor faz a prova de algumas delas utilizando essa definição, e apresenta diversos exemplos de funções para encontrar os limites aplicando as propriedades apresentadas.

Em "Cálculo, Volume 1" de Stewart (2013), o conceito de limite de uma função real é apresentado no capítulo: *Limites e Derivadas.* Ele é definido utilizando a linguagem natural escrita para descrever o comportamento da função quando "*tomamos x suficientemente próximos de a (por ambos os lados), mas não igual a a.*" (2013 p.81). Como também, a representação algébrica do limite, e as tabelas de valores da função para valores de x próximos do ponto *a* em que o limite está sendo investigado e a representação gráfica da função. Ao final desse estudo na seção 2.4 – A Definição Precisa de Limite – o livro apresenta a DFL, vejamos como ele introduz essa definição:

> **Definição** Seja *f* uma função definida em algum intervalo aberto que contenha o número *a*, exceto possivelmente no próprio *a*. Então dizemos que o **limite de *f(x)* quando *x* tende a *a* é *L***, e escrevemos: por $\lim_{x \to a} f(x) = L$
> Se para todo $\varepsilon > 0$ dado, houver um número $\delta > 0$ tal que se
> $0 < |x - p| < \delta$ então $|f(x) - p| < \varepsilon$.

> (STEWART, 2013, p. 101).

Na apresentação desta definição o autor faz um trabalho de retomada com as noções intuitivas de limite dadas anteriormente. Por exemplo, relacionando a expressão "*f(x) aproxima-se cada vez mais de L*" com a noção de distância utilizando módulos e as inequações. O autor argumenta que conforme a função dada o uso da definição com épsilon e delta demanda de muito trabalho e que:

> Felizmente isso é desnecessário, pois as Propriedades dos Limites dadas [...] podem ser demonstradas [...] então os limites das funções complexas podem ser encontrados rigorosamente a partir das Propriedades dos Limites, sem recorrer diretamente à definição. (STEWART, 2013, p. 105).

Parece-nos que essa afirmação enfatiza o aspecto algébrico e os métodos computacionais do limite, que podem ocultar tanto o lado topológico ligado ao conceito de limite, quanto a profundidade do pensamento funcional da DFL.

Com relação ao pensamento funcional, geralmente ele é descrito por alguns elementos que o caracterizam. Segundo Blanton e Kaput:

> Conceituamos amplamente o pensamento funcional para incorporar a construção e a generalização de padrões e relações usando diversas ferramentas linguísticas e representacionais e tratando relações generalizadas, de funções, que resultam como objetos matemáticos úteis por si mesmos. (2004, p. 8, tradução nossa).

Desse modo, o pensamento funcional está ligado ao conceito de função, fazendo com que possamos encontrá-lo em vários ramos da matemática, onde o conceito de função está presente. Assim, o pensamento funcional vai para além da matemática, o que permite enriquecer a formação do aluno em diferentes áreas. Diante disso, encontramos em Georges a seguinte reflexão:

> Tendo em conta a preeminência do pensamento funcional e a disponibilidade dos vários métodos matemáticos para a interpretação, representação, generalização e aplicação das relações funcionais para tornar possível a aquisição de hábitos corretos de pensamento funcional, somos levados a crer que este é o objetivo principal do ensino da matemática. (1929, p. 608, tradução nossa).

Desse modo, consideramos importante elaborarmos situações que favoreçam o aprofundamento do pensamento funcional. No estudo desses livros didáticos observamos que há um predomínio pela aplicação da DFL nas funções polinomiais, nas provas das operações e nas propriedades sobre o limite de uma função. E, assim, seus limites são apresentados por meio dos teoremas e das propriedades demonstradas no início do estudo sobre limites. Mas encontramos também funções interessantes em que essa definição poderia ser utilizada para se mostrar a existência ou não dos limites, com a possibilidade de trabalharmos com as relações funcionais. Assim, escolhemos três funções que iremos utilizar para compormos outras funções para as nossas atividades:

$f(x) = sen\left(\frac{k}{x}\right)$, com $k \neq 0$,

$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ é um racional} \\ 0 & \text{se } x \text{ é um irracional} \end{cases}.$

$f(x) = [\![x]\!]$, em que $[\![x]\!] = máx\{n \in \mathbb{Z} \,/\, n \leq x\}$, ou $[\![x]\!] \leq x \leq [\![x]\!] + 1$.

Nos livros analisados o estudo do limite nessas funções é realizado por meio do estudo e discussão de pontos próximos, à direita e à esquerda, do ponto de investigação do limite juntamente com observação da representação gráfica da função. De forma mais rigorosa, Guidorizi, Leithold e Stewart utilizam essas funções para a exemplificação de uma aplicação do Teorema do Confronto ou para uma situação em que o limite não existe, por meio de uma tabela com pontos próximos, à direita e à esquerda (do ponto de investigação) e pela observação da representação gráfica. Por outro lado, as três funções aparecem na lista de atividades propostas, após a definição de continuidade, para serem resolvidas intuitivamente, sem uso do épsilon e delta. Ou como exemplos resolvidos que utilizam a representação gráfica para identificar a existência, ou não do limite, ou a aplicação das propriedades.

Observação. Nos livros didáticos citados acima, podemos observar que, na definição formal de limite, GUIDORIZZI usa a expressão “o ponto *a*” e STEWART usa “o número *a*”. De fato, podemos dizer que para os livros didáticos, o uso do limite de uma função em "um ponto a" de um intervalo ou $\mathbb{R}$, está relacionado à representação geométrica do conjunto dos números reais. Assim, no contexto do nosso estudo, podemos dizer que: um limite indica o valor que uma função assume quando as **entradas** se aproximam de um dado “ponto a” ou “número a”. Isso equivale, portanto, a dizer: O limite da função *f* "no ponto *a*"; O limite da função *f* "em *a*" ou O limite da função *f* quando a variável *x* tende ao "número *a*". Além disso, em Cálculo o uso da expressão "ponto *a*" está ligado ao estudo de outras propriedades importantes das funções reais como as noções de: ponto fixo; ponto de inflexão; pontos de singularidade; etc.

DELIMITAÇÃO DO CAMPO CONCEITUAL PARA A DEFINIÇÃO FORMAL

Consideramos que essas funções podem ser utilizadas para o estudo com a DFL por possibilitarem, por um lado, a discussão de aspectos importantes relacionados à compreensão dessa definição formal. Por outro lado, com elas podemos trabalhar com exemplos em que essa definição é a única ferramenta para se mostrar a existência, ou não de limites. Entretanto, esse trabalho só será interessante se for pensado como uma situação de aprendizagem para o aluno, ou seja, que vise contribuir com a compreensão de aspectos mais formais envolvidos no estudo do CDI. Assim, é preciso que essas funções, como outras análogas, sejam utilizadas refletindo sobre esses aspectos envolvidos na construção do conceito de limite de função, que fazem parte também das definições utilizadas. Ou seja, as situações em que a definição de limite de função é tratada, precisam ser elaboradas considerando os outros conceitos envolvidos na sua construção. Esses são os conhecimentos que os alunos precisam mobilizar para lidar com as situações (VERGNAUD, 2009) e avançar na aprendizagem do conceito que no nosso caso é a compreensão da DFL.

Para elaboração das atividades para estudo da DFL foi preciso delimitar o campo conceitual, sendo que nossas escolhas foram em função do estudo que fizemos das pesquisas sobre o tema, mas principalmente dos livros didáticos. A seguir, no Quadro 1, apresentamos a DFL com algumas variações na sua formulação, as funções que serão utilizadas para o seu estudo. Bem como, os conceitos, as relações envolvidas e as representações utilizadas.

Quadro 1: Delimitação do campo conceitual

Situação para estudo da DFL
Funções trabalhadas: $f(x) = x\left[\!\left[\frac{1}{x}\right]\!\right]$; $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ é um racional} \\ 0 & \text{se } x \text{ é um irracional} \end{cases}$ e $f(x) = sen\left(\frac{1}{x}\right)$ **Representações**: • Utilizadas nas atividades: Algébricas e linguagem natural escrita. • Solicitadas aos alunos nas atividades: Algébricas e linguagem natural escrita. **Conceitos, propriedades e relações utilizadas:** Manipulação algébrica, como: a fatoração, a multiplicação, simplificação e a redução de termos; Propriedades: de módulos, de valor absoluto e das desigualdades; Propriedades da função trigonométrica seno; Propriedades do conjunto dos números racionais e irracionais. **Números reais**:

Aproximação de um número seja ele do conjunto de números do domínio ou da imagem de uma função, a ideia de poder se aproximar infinitamente; representar conjunto de números na notação de intervalos abertos e/ou fechados, e na forma de inequações, e a ideia de que em um intervalo, aberto e/ou fechado, existem infinitos números;

Funções:
Relacionar intervalos abertos da imagem com intervalos abertos do domínio; relacionar um conjunto de elementos da imagem, com o seu respectivo conjunto de pontos do domínio; e estudar o comportamento das funções para mostrar que o limite existe e apresentar o limite ou mostra que o limite não existe.

Formulações para a DFL[3]

Primeira – Usando valor absoluto. Seja f uma função definida em E um subconjunto de R, e a um número real, não necessariamente contido em E. Seja L um número real. Dizemos que L é o limite de f em a se,

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \text{ tal que } 0 < |x-a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - L| < \epsilon$$

Como sabemos que $|b-a|$ representa a distância entre os pontos B e A da reta de abscissa b e a, respectivamente, podemos expressar em linguagem natural escrita a definição formal da seguinte forma:

"P*ara todo* ϵ *>0 existe* $\delta > 0$ *tal que se a distância de x para a é menor do que* δ *então a distância de* $f(x)$ *para L é menor do que* ϵ".

Segunda – Usando as desigualdades. Pela propriedade de módulo, temos que: $|y| < b$ $(b > 0)$ equivalente a: $-b < y < b$, a definição formal pode ser reescrita sobre a seguinte forma:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tal que } x \neq a \text{ e}, -a{+}\delta < x < a{+}\delta \;\Rightarrow\; -L{+}\epsilon < f(x) < L{+}\epsilon$$

Assim, podemos expressar na linguagem natural escrita a definição formal da seguinte forma:

"Cada vez que x está mais próximo de ***a*** *então* $f(x)$ *está mais próximo de L".*

Terceira - Usando os intervalos. Por outro lado, temos: $|y| < b$ $(b > 0)$ equivale a: $-b < y < b$ e a: $y \in\,]-b, b[$, a definição formal pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \text{ tal que } x \neq a \text{ e } x \in\,]-a{+}\delta, a{+}\delta\, [\;\Rightarrow\; f(x) \in\,]-L{+}\epsilon\;\; , L{+}\epsilon[$$

Assim, podemos expressar na linguagem natural escrita a definição formal da seguinte forma:

"Para todo ϵ *>0 existe* $\delta > 0$ *tal que para todo x na vizinhança* $]-a{+}\delta, a{+}\delta\, [$ *de a então* $f(x)$ *está na vizinhança* $]-L{+}\epsilon\;\; , L{+}\epsilon[$ *de L*".

Fonte: Elaborado pelos autores da pesquisa.

Usaremos essas três funções e essas formulações para a DFL nas resoluções das provas das atividades que iremos apresentar a seguir. Essas variações na formulação nos permitem evidenciar os conceitos que estão envolvidos na sua apresentação. É importante observar também que o estudo do limite por meio de intervalos está ligado ao conceito da topologia dos números reais.

SITUAÇÃO PARA O ESTUDO DA DEFINIÇÃO FORMAL

[3] As provas das equivalências dessas formulações podem ser encontradas em Rachidi, Freitas e Mongelli (2020).

Para trabalharmos com a situação para dar sentido a DFL (VERGNAUD, 1990) elaboramos três atividades em que essa definição, com suas variações, é o conhecimento pertinente para sua resolução. As funções foram elaboradas utilizando as três funções que apresentamos na sessão anterior, selecionadas nos livros didáticos supracitados, no caso, inserindo algumas variações que consideramos pertinentes para o tratamento da definição. Buscamos, com isso, oferecer o estudo de algumas funções que possibilitasse a abordagem, e discussão, dos elementos envolvidos na definição considerados importantes. Mais especificamente envolvendo a compreensão das relações que precisam ser estabelecidas entre o delta e o épsilon dado, e com os conceitos envolvidos nessa construção, no caso o de funções e do conjunto dos números reais.

As atividades foram elaboradas com um enunciado e alguns itens. A intenção é possibilitar a construção de um passo a passo em que o estudante mobilize as propriedades, tanto de módulos e das inequações, como também das funções utilizadas para aplicação da definição. Em cada uma delas é proposta uma resolução com comentários para suscitar possíveis questionamentos aos estudantes e, com isso, favorecer a discussão dos conceitos que estão sendo mobilizados na aplicação da DFL.

O limite da função $\boldsymbol{f(x) = x \left[\!\left[\frac{1}{x}\right]\!\right]}$ em 0

Essa primeira atividade escolhida envolve a função maior inteiro em sua composição. Vimos que ela aparece nos três livros que citamos, principalmente nos exercícios propostos para os estudantes. Sendo que a abordagem geométrica é o que prevalece nessas discussões. Escolhemos trabalhar com a representação algébrica, considerada mais difícil de compreensão para os alunos (CORNU, 1983; ZUCHI, 2005), mas que é fundamental para mobilização da DFL, bem como, das propriedades e dos próximos conceitos envolvidos no estudo do cálculo. Vejamos seu enunciado, a seguir, no Quadro 2.

Quadro 2: Primeira atividade

Atividade 1. Considere a função f definida por: $f(x) = x\left[\!\left[\frac{1}{x}\right]\!\right]$, em que $x \neq 0$. Para responder os itens a seguir, lembre-se que nessa função você está trabalhando também com a função maior inteiro, no caso $\left[\!\left[\frac{1}{x}\right]\!\right] = máx\{n \in \mathbb{Z} \,/\, n \leq \frac{1}{x}\}$. a) Seja $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$, utilize a definição da função maior inteiro para provar que: $0 \leq \frac{1}{x} - \left[\!\left[\frac{1}{x}\right]\!\right] < 1$; b) Deduza que $0 \leq \left\lvert\frac{1}{x} - \left[\!\left[\frac{1}{x}\right]\!\right]\right\rvert < 1$, e que: $\left\lvert 1 - x\left[\!\left[\frac{1}{x}\right]\!\right]\right\rvert < \lvert x\rvert$; c) Usando a definição formal de limite, estude o limite da função $f(x) = x\left[\!\left[\frac{1}{x}\right]\!\right]$, no ponto $x_0 = 0$.

Fonte: Elaborado pelos autores.

Solução proposta:

a) Seja $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$, pela definição do maior inteiro $[\![x]\!]$, temos que: $\left[\!\left[\frac{1}{x}\right]\!\right] \leq \frac{1}{x} < \left[\!\left[\frac{1}{x}\right]\!\right] + 1$. Subtraindo $\left[\!\left[\frac{1}{x}\right]\!\right]$ de todos os membros dessa inequação obtemos que: $\left[\!\left[\frac{1}{x}\right]\!\right] - \left[\!\left[\frac{1}{x}\right]\!\right] \leq \frac{1}{x} - \left[\!\left[\frac{1}{x}\right]\!\right] < \left[\!\left[\frac{1}{x}\right]\!\right] + 1 - \left[\!\left[\frac{1}{x}\right]\!\right]$. Assim, ficamos com seguinte inequação:

$$0 \leq \frac{1}{x} - \left[\!\left[\frac{1}{x}\right]\!\right] < 1.$$

b) Usando a desigualdade $0 \leq \frac{1}{x} - \left[\!\left[\frac{1}{x}\right]\!\right] < 1$, encontrada, podemos deduzir que:

$$0 \leq \left\lvert\frac{1}{x} - \left[\!\left[\frac{1}{x}\right]\!\right]\right\rvert < 1.$$

Observe que isso é possível, pois se trata de uma diferença de termos, no caso $\frac{1}{x} - \left[\!\left[\frac{1}{x}\right]\!\right]$, que é igual ou menor do que um. Multiplicando por $\lvert x\rvert > 0$ em todos os membros dessa inequação, temos: $0.\lvert x\rvert \leq \lvert x\rvert\left\lvert\frac{1}{x} - \left[\!\left[\frac{1}{x}\right]\!\right]\right\rvert < 1.\lvert x\rvert$. Logo, obtemos a seguinte desigualdade: $0 \leq \lvert x\rvert\left\lvert\frac{1}{x} - \left[\!\left[\frac{1}{x}\right]\!\right]\right\rvert < \lvert x\rvert$. Como $\lvert x\rvert > 0$, podemos fazer a distribuição no produto precedente, e assim ficamos com: $0 \leq \left\lvert x.\frac{1}{x} - x\left[\!\left[\frac{1}{x}\right]\!\right]\right\rvert < \lvert x\rvert$, isto é,

$$0 \leq \left\lvert 1 - x\left[\!\left[\frac{1}{x}\right]\!\right]\right\rvert < \lvert x\rvert.$$

c) Com alguns valores numéricos particulares $x = \frac{1}{n+0,5}$, para todo número inteiro $n > 0$, obtemos que $x.\left[\!\left[\frac{1}{x}\right]\!\right] = 1$. Assim, podemos conjecturar que o valor do limite é $\lim\limits_{x\to 0} x.\left[\!\left[\frac{1}{x}\right]\!\right] = 1$. Agora, pela definição de limite, temos que para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tais que:

$$\lvert x - 0\rvert = \lvert x\rvert < \delta \Rightarrow \left\lvert 1 - x\left[\!\left[\frac{1}{x}\right]\!\right]\right\rvert < \varepsilon.$$

Usando a desigualdade b) deduzimos que $\left\lvert 1 - x\left[\!\left[\frac{1}{x}\right]\!\right]\right\rvert < \lvert x\rvert$. Consequentemente, se tomarmos $\delta = \varepsilon$, temos que:

$$|x-0| = |x| < \delta = \varepsilon \Rightarrow \left|1 - x\left[\!\left[\frac{1}{x}\right]\!\right]\right| < |x| < \varepsilon.$$

Assim, com a definição formal de limite, deduzimos que:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x.\left[\!\left[\frac{1}{x}\right]\!\right] = 1.$$

Algumas observações didáticas

Nessa atividade, é importante observar que o raciocínio é baseado sobre nas propriedades do maior inteiro e no conceito de valor absoluto. E que a falta de uma representação gráfica usual, ou adequada para tratar a situação dada, pode implicar em uma dificuldade no raciocínio intuitivo para conjecturar o limite. Por outro lado, o trabalho com alguns valores numéricos particulares, do tipo $x = \frac{1}{n+0,5}$, para todo $n > 0$ ou $x = \frac{1}{10^n+0,3}$, pode favorecer com que o estudante conjecture sobre o valor do limite $\lim_{x\to 0} x.\left[\!\left[\frac{1}{x}\right]\!\right]$.

Observação. Para a questão (a), usando a definição do maior inteiro, podemos ver que para todo número real a temos $[\![a]\!]$, e que $[\![a]\!] \leq a < [\![a]\!] + 1$. Assim, para $a = \frac{1}{x}$, podemos deduzir rapidamente que: $\left[\!\left[\frac{1}{x}\right]\!\right] \leq \frac{1}{x} < \left[\!\left[\frac{1}{x}\right]\!\right] + 1$.

Nesta atividade os alunos precisam mobilizar: o conceito de maior inteiro, as propriedades de valor absoluto e de ordem em $\mathbb{R}$ e a definição formal de limite de uma função em um ponto. Ela foi organizada para que a pergunta (a) fosse uma consequência da definição de maior inteiro e, a partir dela, e das propriedades de valor absoluto se deduzir a resposta para o item (b). Com a definição formal de limite e o uso do item (b) obtém-se o resultado de (c).

A função de Dirichlet $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ é um racional} \\ 0 & \text{se } x \text{ é um irracional} \end{cases}$

Esta segunda atividade, apresentada no Quadro 3, a seguir, envolve a função de Dirichlet. Ela aparece em dois dos livros investigados (GUIDORIZZI, 2003; STEWART, 2013) para discussão sobre a continuidade de uma função. Sendo em um deles para o trabalho com os limites laterais e no outro para exemplificação no estudo do Teorema do Confronto.

Quadro 3: Segunda atividade

Atividade 2. Seja a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ é um racional} \\ 0 & \text{se } x \text{ é um irracional} \end{cases}$, ela é chamada de função Dirichlet. Considerando essa função, responda as questões a seguir:
a) Sendo $a \in \mathbb{R}$, suponha que a função f admita um limite L em a. Escreva a definição formal de limite e justifique por que L é finito e $L \geq 0$.
b) Considerando $L > 0$:
 i) Escreva a definição formal do limite da função em a, tomando $\varepsilon = \frac{L}{2}$;
 ii) Usando a propriedade de densidade e tomando um número irracional x tal que $x \in]a-\delta, a+\delta[$, ou seja $|x-a| < \delta$, o que podemos concluir?
c) Considerando $L = 0$:
 i) Escreva a definição formal do limite da função em a, tomando $\varepsilon = \frac{1}{2}$;
 ii) Usando a propriedade de densidade e tomando um número irracional x tal que $x \in]a-\delta, a+\delta[$, ou seja $|x-a| < \delta$, o que podemos concluir?
d) Considerando o que você trabalhou nos itens anteriores, o que você pode concluir sobre o limite da função Dirichlet em um ponto $a \in \mathbb{R}$?

Fonte: Elaborado pelos autores.

Solução proposta:

a) Sendo $a \in \mathbb{R}$, e supondo que $\lim_{x \to a} f(x)$ existe, e neste caso L é um número finito, pois a função Dirichlet é limitada (Perceba que ela varia entre zero e um). Por outro lado, temos que $f(x) \geq 0$, portanto temos $L \geq 0$. Assim, utilizando a definição formal de limite podemos escrever que:

Seja $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que: $x \neq a,\ |x-a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - L| < \varepsilon$,

ou seja, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - L| < \varepsilon$. Como a inequação $|x-a| < \delta$ equivale a $x \neq a$ e $x \in]a-\delta, a+\delta[$, e a inequação $|f(x) - L| < \varepsilon$ que é equivale a $f(x) \in]L-\varepsilon, L+\varepsilon[$, temos que:

$$x \neq a \text{ e } x \in]a-\delta, a+\delta[\Rightarrow f(x) \in]L-\varepsilon, L+\varepsilon[.$$

b) Supondo que $L > 0$.

i) Tomando um número particular para o épsilon, no caso $\varepsilon = \frac{L}{2}$, podemos reescrever a definição de limite obtida no item (a) como:

Para $\varepsilon = \frac{L}{2}$, existe $\delta > 0$ tal que $x \neq a$ e $|x-a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - L| < \frac{L}{2}$.

Equivalente em notação de intervalo:

$$x \neq a \text{ e } x \in]a-\delta, a+\delta[\Rightarrow f(x) \in]L - \frac{L}{2}, L + \frac{L}{2}[=]\frac{L}{2}, \frac{3L}{2}[.$$

ii) Com a propriedade de densidade, temos que tomando $x_1 \neq a$ um número irracional no intervalo $]a-\delta, a+\delta[$, ou seja $|x_1 - a| < \delta$ e assim $f(x_1) = 0$ (Na função dada temos que quando x é número irracional temos que $f(x) = 0$). Logo, para $\varepsilon = \frac{L}{2}$ temos que:

$$|f(x_1) - L| = |0 - L| = |L| < \frac{L}{2}.$$ Ou seja $f(x_1) = 0 \in]L - \varepsilon, L + \varepsilon[$, isto é,

$$f(x_1) = 0 \in]L - \varepsilon, L + \varepsilon[=] \frac{L}{2}, \frac{3L}{2}[.$$

O que significa que $0 < \frac{L}{2} < f(x_1) = 0 < \frac{3L}{2}$, o que é impossível. Assim, a função f não possui limite $L > 0$, em qualquer ponto $a \in \mathbb{R}$.

c) Agora para o outro caso, supondo que $L = 0$.

i) Para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe um número $\delta > 0$ tal que:

$$\text{Para todo } x \neq a, \text{com } |x - a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x)| < \varepsilon.$$

ii) Tomando um número particular para o épsilon, no caso $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Vamos considerar o caso de um número $x_2 \neq a$ racional em $]a - \delta, a + \delta[$ ou seja $|x_2 - a| < \delta$. Assim, pela função de Dirichlet temos que $f(x_2) = 1$, e como $L = 0$, temos que: $|f(x_2) - L| = |f(x_2)| = 1 < \frac{1}{2}$, ou seja: $f(x_2) = 1 \in] - \varepsilon, +\varepsilon[=] -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}[$, o que é impossível.

d) Diante do que vimos nos itens (b) e (c) podemos concluir que a função Dirichlet não tem limite em nenhum número real.

Algumas observações didáticas.

Nessa atividade, é importante observar o papel fundamental das propriedades dos números racionais e irracionais, em particular a propriedade de densidade. Essa última propriedade pode ser ilustrada com exemplos numéricos. Também destacamos o fato de tomarmos um número particular, no caso x_1 para irracional e de x_2 para racional, no intervalo dado, para mostrar que isso é suficiente para provar que o limite não existe. Por outro lado, a escolha de valores particulares para $\varepsilon > 0$ é importante, e nos dá oportunidade de confrontar os alunos com dificuldades envolvidas no raciocínio para essa escolha. São aspectos importantes para se trabalhar, pois na função de Dirichlet também não temos uma representação gráfica para que o estudante possa conjecturar o limite. Evidenciando, assim, a necessidade de trabalhar com as várias representações algébricas, juntamente com as escolhas numéricas, e com as notações escritas em linguagem natural (e oral).

A propriedade que citamos, e que será necessária para discussão dessa atividade é:

Propriedade de Densidade*: Seja a um número real qualquer. Então, todo intervalo aberto* $]a - \delta, a + \delta[$ *, com* $\delta > 0$, *contém um número infinito de números racionais e de números irracionais.*

Esta propriedade de densidade tem um papel importante na solução proposta. De fato, isso nos permitiu ver que todos os pontos (ou números) do intervalo]a;b[não satisfazem necessariamente a segunda desigualdade do limite formal. Em outras palavras, todos os pontos (ou números) do intervalo]a;b[não satisfazem os requisitos da definição formal de limite, que é formulada em termos de intervalos.

A função definida por: $\boldsymbol{f(x) = sen\left(\frac{1}{x}\right)}$

Na terceira atividade escolhemos trabalhar com a função que alguns livros utilizam para exemplificar a não existência de limite de uma função em um ponto. Esta função $f(x) = sen\left(\frac{1}{x}\right)$, aparece nos três livros apresentados quando os autores fazem o estudo do Teorema do Confronto. É uma função interessante para trabalhar alguns aspectos envolvidos na definição formal de limite que vamos discutir ao longo da proposta de solução. Vejamos o enunciado da atividade no Quadro 4 e, em seguida, uma sugestão para sua resolução.

Quadro 4: Terceira atividade

Atividade 3. Seja a função f definida por: $f(x) = sen\left(\frac{1}{x}\right)$. Considerando essa função, responda as questões a seguir: a) Suponha que a função *f* admita um limite *L* em zero. Escreva a definição formal de limite e justifique por que *L* é finito, isto é que $L \in \mathbb{R}$. b) Considerando $\delta > 0$, com $0 < \delta < 1$, e o número $A = \frac{1}{\delta}$ i) Para $z_1 = 2[\![A+1]\!]\pi$, provar que $x_1 = \frac{1}{z_1} < \delta$ e calcule $f(x_1)$. ii) Usando a definição de limite deduzir que $\lvert L \rvert < \varepsilon$, ou seja $L \in]-\varepsilon, +\varepsilon[$. c) Considerando $\delta > 0$, com $0 < \delta < 1$, e o número $A = \frac{1}{\delta}$ i) Para $z_2 = 2[\![A+1]\!]\pi + \frac{\pi}{2}$, provar que $x_2 = \frac{1}{z_2} < \delta$ e calcule $f(x_2)$. ii) Usando a definição formal de limite deduzir que $\lvert 1 - L \rvert < \varepsilon$, ou seja $L \in]1-\varepsilon,\ 1+\varepsilon[$. d) Considerando o número $\varepsilon = \frac{1}{4}$, o que podemos deduzir sobre o limite L? e) Analisando os itens anteriores, o que você pode concluir sobre o limite da função $f(x) = sen\left(\frac{1}{x}\right)$ no ponto $x_0 = 0$?

Fonte: Elaborada pelos autores.

Solução proposta:

a) Suponha que a função $f(x) = sen\left(\frac{1}{x}\right)$ admite um limite L em 0. Sabemos que a função seno é limitada, isto é, $1 \leq sen\,(a) \leq 1$, assim esse limite L é finito e pela definição de limite temos que: Para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe um número $\delta > 0$ tal que:

$$x \neq 0 \text{ e } |x - 0| = |x| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - L| < \varepsilon.$$

b) Como *x* tende a zero podemos assumir que $\delta < 1$, e o número $A = \frac{1}{\delta} > 1$.

i) Para $z_1 = 2[\![A+1]\!]\pi$, provar que $x_1 = \frac{1}{z_1} < \delta$ e calcule $f(x_1)$. Seja $z_1 = 2[\![A+1]\!]\pi$, observe que $z_1 = 2[\![A+1]\!]\pi > A = \frac{1}{\delta}$, assim temos:

$$0 < x_1 = \frac{1}{z_1} < \frac{1}{A} = \delta.$$

Como $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{\frac{1}{z_1}} = z_1$, temos: $f(x_1) = sen\left(\frac{1}{x_1}\right) = sen(z_1) = sen(2[\![A+1]\!]\pi) = 0$.

ii) Usando a definição formal de limite em 0, podemos escrever que:

$$|f(x_1) - L| = |sen(z_1) - L| = |sen(2[\![A+1]\!]\pi) - L| = |0 - L| = |L| < \varepsilon.$$

Então, obtemos: $-\varepsilon < L < \varepsilon$, ou seja, $L \in]-\varepsilon, \varepsilon[$.

c) Considerando $\delta > 0$, com $0 < \delta < 1$, e o número $A = \frac{1}{\delta}$

i) Para $Z_2 = 2[\![A+1]\!]\pi + \frac{\pi}{2}$, vamos provar que $x_2 = \frac{1}{Z_2} < \delta$ e calcular $f(x_2)$. De fato, tomemos agora o número real $z_2 = 2[\![A+1]\!]\pi + \frac{\pi}{2}$, nós deduzimos a seguinte equivalência:

$$z_2 = 2[\![A+1]\!]\pi + \frac{\pi}{2} > A = \frac{1}{\delta} \text{ é equivalente } 0 \le x_2 = \frac{1}{z_2} < \frac{1}{A} = \delta.$$

Temos, assim que: $0 < x_2 = \frac{1}{Z_2} < \delta$, e que

$$f(x_2) = sen\left(\frac{1}{x_2}\right) = sen\,(z_2) = sen\left(2[\![A+1]\!]\pi + \frac{\pi}{2}\right) = sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Isto é, temos: $f(x_2) = 1$.

ii) Aplicando a definição formal de limite temos que:

$$|\,f(x_2) - L| = |sen(Z_2) - L| = |1 - L| = |L - 1| < \varepsilon.$$

Assim, temos: $|L-1| < \varepsilon$ equivale a $1 - \varepsilon < L < 1 + \varepsilon$, ou seja, $L \in]1-\varepsilon,\ 1+\varepsilon[$.

d) Considerando o número real $\varepsilon = 1/_4$ o que podemos deduzir sobre o limite *L*? Conforme vimos nos itens anteriores, nós estabelecemos que $L \in]-\varepsilon,\ \varepsilon[$ pela questão (b) e pela questão (c) temos $L \in]1-\varepsilon, 1+\ \varepsilon[$, assim podemos deduzir que o limite *L* que estamos investigando pertence à intersecção desses dois intervalos, isto é, $L \in]-\varepsilon,\ \varepsilon[\ \cap\ ]1-\varepsilon,\ 1+\varepsilon[$. Tomando um valor particular para épsilon, $\varepsilon = \frac{1}{4}$, obtemos que:

$$L \in]-\tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{4}[\ \cap\ ]1-\tfrac{1}{4},\ 1+\tfrac{1}{4}[\ =\ ]-\tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{4}[\ \cap\ ]\tfrac{3}{4},\ \tfrac{5}{4}[.$$

Como, temos $]-\frac{1}{4},\ \frac{1}{4}[\ \cap\ ]\frac{3}{4},\ \frac{5}{4}[\ = \emptyset$, o que é impossível. Então, não existe um número *L* no intervalo encontrado.

Pela definição temos que o limite L existe para todo $\varepsilon > 0$, e vimos que para um épsilon particular as condições não foram satisfeitas, então podemos dizer que o limite L não existe.
e) Assim, analisando os itens anteriores, podemos concluir que a função $f(x) = sen\left(\frac{1}{x}\right)$, não tem limite no ponto $x_0 = 0$.

Algumas observações didáticas.

Observe que nesta atividade retomamos o trabalho com o conceito de maior inteiro, mas agora aplicada ao caso $[\![A+1]\!] = máx\{n \in \mathbb{Z} \,/ n \leq A+1\}$, no desenvolvimento da resolução. Além disso, usaremos as relações trigonométricas simples relacionadas ao seno, isto é: $sen(2n\pi + x) = sen(x), sen(2n\pi) = 0 \; e \; sen\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1$.

É importante também lembrar a desigualdade $0 < A < B$ então $0 < \frac{1}{B} < \frac{1}{A}$ e a seguinte propriedade dos intervalos: Sejam $]a,b[$ e $]c,d[$ dois intervalos de $\mathbb{R}$ tais que $b < c$, então $]a,b[\,\cap\,]c,d[= \emptyset$. Podemos sugerir que os alunos façam alguns exemplos utilizando alguns números inteiros. Utilizamos também as propriedades trigonométricas do seno, que podemos lembrar para os alunos. Por outro lado, para esta atividade, a representação gráfica na vizinhança de zero é complexa e não favorece o estudante observar e ter uma ideia clara sobre o limite de f em zero.

Nesta última atividade destacamos a importância dos números reais e dos intervalos e da propriedade: Se $|a| < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, podemos deduzir que $a = 0$. E, novamente, o fato de que não temos representações geométricas adequadas para essa situação. Além disso, o método utilizado para esta atividade pode ser adaptado sem maiores dificuldades, para mostrar que a função $f(x) = sen(x)$, não admite um limite em $+\infty$ ou em $-\infty$. Para isso, basta usar a definição de limite formal em $+\infty$ ou em $-\infty$.

Discussões e considerações gerais sobre as atividades

Vimos que a definição formal de limite é introduzida na disciplina de Cálculo I e que não são suscitadas situações que evidenciem a necessidade desta definição na sua apresentação e na sua prática. Busca-se facilitar o estudo da definição formal para o aluno, mas isso só “esconde” as dificuldades e a profundidade do conteúdo funcional envolvido na definição formal, bem como o seu papel importante para a análise. Em geral, os livros didáticos se limitaram a algumas funções polinomiais e a proposição de propriedades, entre outros. Diante disso, suscitando discussões sobre a necessidade de se apresentar essa definição em um curso introdutório, já que o estudante não encontra situações em que ele precise utilizar essa definição; ou mesmo que lhe seja apresentado exemplos em que ela é a única ferramenta para resolver a situação. O que pode comprometer a entrada do estudante no pensamento funcional. Mas, uma questão que a maioria dos professores ouvem de seus alunos é: onde eles vão utilizar o conceito apresentado? Ou, para que ele é necessário, ou importante?

A aprendizagem dos conceitos do CDI é um processo que demanda de muito tempo de investimento em atividades, que o aluno do Curso de Matemática irá lidar, ao longo do ensino, com uma diversidade de situações envolvendo esses vários conceitos (VERGNAUD, 2009). A definição de limite de uma função com épsilon e delta é um desses conceitos, sendo assim, é importante propor situações que propiciem a sua compreensão sempre que seja possível. É buscando resolver uma situação, em que o "[...] objeto matemático aparece como uma ferramenta para resolver [...] que o conhecimento para o estudante poderá [...] se tornar significativo e útil." (LECORRE, 2016, p. 423, tradução nossa).

Nosso objetivo neste texto não foi discutir sobre a pertinência, ou não, da apresentação da definição formal na disciplina Cálculo I, ou de propor situações para minimizar as dificuldades dos alunos na sua aprendizagem. Nossa proposta foi contribuir com exemplos que possam favorecer algumas discussões no estudo desta definição. A variedade de representação é fundamental no processo de aprendizagem de um conceito, todavia, algumas funções utilizadas, no caso das atividades 1 e 2, não têm uma representação geométrica adequada para apresentarmos. Assim, nessas três atividades propostas as discussões foram em função de explorar as representações algébrica e em linguagem natural escrita, e quando possível a numérica. Nosso foco são as relações envolvidas entre as mudanças de representações algébricas que aparecem na definição, como, por exemplo, a escrita do valor absoluto, como distância, para as inequações. Novamente esse trabalho é importante para a entrada no pensamento funcional. No caso, nos referimos ao estudo dessas representações evidenciando as particularidades desses conjuntos, isto é, a existência de infinitos números racionais ou irracionais num intervalo dado. São aspectos importantes para tratar situações como a que envolve a função Dirichlet, em que não temos representações geométricas usuais (ou adequadas).

Além disso, é também uma oportunidade de compreender e aprofundar em aspectos sobre o papel importante das propriedades do conjunto dos números reais. O conceito moderno de limite apareceu com Cauchy, com seu estudo sobre as quantidades infinitamente pequenas e infinitamente grandes, baseando seu raciocínio sobre as propriedades dos números reais. O que mostra a importância desse conjunto para entrada no pensamento funcional, e no trabalho do professor, que terá de lidar com esse conjunto para fazer uma proposta interessante de ensino com a definição formal.

São aspectos importantes que vêm sendo investigados por alguns pesquisadores. Como o trabalho realizado sobre o conjunto dos números reais apresentado no livro Limite de funções de uma variável real com valores reais e generalizações (RACHIDI, FREITAS e MONGELLI, 2020), que foi baseado em uma disciplina oferecida em uma Pós-Graduação em Educação Matemática. Também se encontra em fase de finalização um livro, fruto do resultado de um projeto de pesquisa. Nele são apresentados conceitos de matemática básica que são importantes para o CDI, em que são trabalhados dois capítulos sobre o conjunto dos números reais. Buscando, com isso, apresentar as propriedades algébricas desse conjunto, de maneira axiomática. Além disso, são introduzidas como axioma as propriedades de ordem, e, por meio delas, apresentados os conceitos de intervalos e de valor absoluto, que são a base da atual definição formal de limite de uma função.

Em seguida tecemos nossas considerações finais.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Sabemos que a definição formal de limite de uma função em um ponto, com épsilon e delta, é considerada de difícil compreensão para os estudantes, e que sua introdução é realizada na primeira disciplina nos cursos de graduação. Como mencionamos, na maioria dos livros didáticos, essa definição é usada para estabelecer a unicidade do limite (quando existe) e as operações algébricas nos limites. Além disso, na maioria dos exercícios sobre os limites usam-se regras e técnicas usuais, que não envolvem a definição formal.

Assim, neste artigo procuramos apresentar e discutir algumas situações para o ensino dessa definição, sendo ela o único meio para lidar com as situações, no caso, estudar e mostrar a existência ou não dos limites. Se constituindo em uma oportunidade para mostrar aos estudantes casos em que as propriedades não dão conta de resolver, sendo, assim, é necessário usarmos a definição. Desse modo, apresentamos algumas atividades para aprofundar o estudo da definição de limite de uma função em um ponto com épsilon e delta, principalmente para ilustrar sua importância como única forma de provar a existência ou não do limite. Mais precisamente, parece-nos que se trata de uma oportunidade de mostrar aos alunos casos em que as propriedades não resolvem, sendo por isso necessário recorrer à definição formal.

Ao longo deste trabalho, inserimos também uma proposta de resolução e alguns comentários com intuito de contribuir com sua implementação, caso seja considerado pertinente para prática em sala de aula. Permitindo, assim, que o professor tenha alguns exemplos para utilizar com seus alunos no seu trabalho com a definição formal, favorecendo, com isso, confrontar os estudantes com exemplos que possam motivá-los a enfrentar as dificuldades em aprender a utilizar essa definição.

Resulta de nosso trabalho, o fato de constatar que a compreensão e o uso da definição formal de limite, requer também as técnicas e as propriedades de outros conceitos tais como: o valor absoluto e a resolução das desigualdades. Além disso, a formulação da definição formal de limite de uma função em um ponto, na forma equivalente utilizando o intervalo ou as desigualdades, permitirá ao aluno ampliar sua concepção desta importante definição do CDI. O uso de intervalos facilitará, no futuro, a vinculação dessa definição com o conceito de topologia dos números reais.

Acreditamos que essas atividades podem contribuir para melhorar o ensino da definição formal de limite mostrando sua aplicação em situações mais elaboradas. Como também favorecer o desenvolvimento do pensamento funcional, que promove a aprendizagem e a compreensão profunda dos conceitos de funções e de limites.

Dentre as perspectivas desta pesquisa, está a de estabelecer uma lista de outras atividades ou exercícios, semelhantes às atividades aqui apresentadas, sobre a utilização da definição formal de limite como único meio para afirmar a existência ou não do limite de uma função em um ponto. Isso permitirá que os professores tenham uma ampla escolha de atividades para oferecer aos alunos sobre como manipular a definição formal de limite em um ponto.

REFERÊNCIAS

ARTIGUE, M. La enseñanza de los princípios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. In: GÓMEZ, P. (ed.). **Ingeniería Didáctica en Educación Matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas**. Grupo Editorial Iberoamérica. Bogotá, 1995, p. 97-140.

BLANTON, M. L.; KAPUT, J. Elementary Grades Students' Capacity for Functional Thinking. **International Group For The Psychology of Mathematics Education**, v. 2, 2004, p. 135-142.

BURIGATO, S. M. M. S. ; OUVRIER-BUFFET, C. e FREITAS, J.L. Le concept de limite de fonction - Une analyse des schèmes d'étudiants à la transition secondaire-supérieur en France et au Brésil. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**, volume 26, p. 09 - 43. 2021, IREM de Strasbourg/France.

CORNU, B. Apprentissage de la notion de limite : conceptions et obstacles. 1983. Tese (Doctorat de Troiseme Cycle de Mathematiques Pures) – Universite Scientifique et Medicale de Grenoble, Grenoble, France.

Instituto de Pesquisa em Matemática (IREM). Limites de suites réelles et de fonctions numériques d'une variable réelle : constats, pistes pour les enseigner. Pascale Sénéchaud (Coord.), 2017. (França).

FERNANDES, J. A. N. Ecologia do Saber: O Ensino de Limite em um Curso de Engenharia. 2015. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemática) Universidade Federal do Pará, Belém.

GEORGES, J. S. Functional thinking as an objective of mathematical Education. **School Science and Mathematics**, v. 29, n. 5, p. 601-608, 1929.

GUIDORIZZI, L. Um Curso de Cálculo: Volume 1. 5ª edição. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2003.

LEITHOLD, L. O Cálculo com Geometria Analítica: Volume 1. 3ª edição. São Paulo: Editora Harbra, 1994.

LECORRE T. Des conditions de conception d'une ingénierie relative à la définition de la notion de limite. 2016. These de Doctorat de Mathématiques, sciences et technologies de l'information, Informatique – Universite de Grenoble, France.

RACHIDI, M.; FREITAS, J. L. M. e MONGELLI, M. C. G. J. Limite de funções de uma variável real com valores reais e generalizações.1ª edição. Campo Grande: Editora UFMS, 2020.

STEWART, J. Cálculo, volume I. 7ª edição São Paulo: Cengage Learning, 2013.

VERGNAUD, G. The Theory of Conceptual Fields. Journals Human Development, S. Karger AG, v. 52, n. 2, p. 83-94, 2009.

VERGNAUD, G. Entrevista com Gérard Vergnaud. [Entrevista cedida a] Candy Marques Laurendon. Revista do GEEMPA: 45 anos de Pesquisa Formação e Ação, n. 11, p. 15-23, 2015.

ZUCHI, I. A Abordagem do Conceito de Limite via Sequência Didática: do ambiente papel e lápis ao ambiente computacional. 2005. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.

Submetido em 13 de novembro de 2022.
Aprovado em 03 de maio de 2023.