Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática

https://doi.org/10.34179/revisem.v9i1.18573

NÍVEIS DE PENSAMENTO ALGÉBRICO DE LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA: O CASO DOS PROBLEMAS DE PARTILHA

LEVELS OF ALGEBRAIC THINKING OF GRADUATES IN MATHEMATICS: THE CASE OF PROBLEMS OF PARTITION

Tharsis dos Santos Ferreira
Universidade Federal Rural de Pernambuco – UFRPE
tharsis_10@hotmail.com

Jadilson Ramos de Almeida
Universidade Federal Rural de Pernambuco – UFRPE
jadilson.almeida@ufrpe.br

Resumo

Esse trabalho teve por objetivo identificar o nível de desenvolvimento do pensamento algébrico de licenciandos em matemática ao resolverem problemas de partilha. Para tanto foi utilizado como base o modelo desenvolvido por Almeida (2016), que propõe quatro níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico em relação aos problemas de partilha. Os sujeitos da pesquisa foram 64 alunos do 1º período do curso de licenciatura em matemática de uma universidade pública. A coleta de dados ocorreu por meio de um teste composto por seis problemas de partilha. Verificamos que a maior parte dos participantes, 73%, se encontram com o pensamento algébrico consolidado. Entretanto, ainda foi possível perceber que alguns alunos chegam no curso de licenciatura em matemática com essa forma de pensar sem estar plenamente desenvolvida, uma vez que 14% dos sujeitos da pesquisa se encontram no nível 0, ou seja, não conseguem estabelecer as relações necessárias para responder a um problema de partilha.
Palavras-chave: Educação algébrica. Pensamento algébrico. Problemas de partilha. Licenciatura em matemática.

Abstract

This work aimed to identify the level of development of algebraic thinking of mathematics degree students when solving problems of partitioning. For that, the model developed by Almeida (2016) was used as a basis. It proposes four levels of development of algebraic thinking in relation to problems of partition. The research subjects were 64 students from the 1st period of the mathematics degree course at a public university. Data collection occurred through a test composed of six partitioning problems. We found that most participants (73%) have consolidated algebraic thinking. However, it was still possible to notice that some students begin the mathematics degree course with an underdeveloped algebraic thinking, since 14% of the research subjects are at level 0, that is, they are unable to establish the necessary relationships to answer a problem of partition.
Keywords: Algebraic education. Algebraic thinking. Problems of partition. Degree in mathematics.

INTRODUÇÃO

Em relação ao ensino da álgebra no Brasil, pesquisadores, como Araújo (2008) e Almeida (2016) apontam que ele era, e em muitos casos ainda é essencialmente trabalhado de forma mecânica, limitando-se ao transformismo algébrico[1]. Essa forma de ensino diminui a álgebra a uma mera linguagem simbólica alfanumérica, composta por símbolos sem sentido.

Essa forma de trabalhar a álgebra acarreta uma aprendizagem frágil, revelada, por exemplo, nos resultados de algumas avaliações externas, como o Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco (SAEPE), em que apenas 21,4% dos estudantes do 9º ano do ensino fundamental conseguem identificar uma equação do 2º grau que expressa um problema, e 22% conseguem identificar uma equação do 1º grau que representa a conversão de um problema em linguagem natural (ALMEIDA; CÂMARA, 2014a).

Para que ocorra uma mudança nesse cenário defendemos que "o ensino da álgebra nas escolas de educação básica deve ser uma das preocupações dos cursos de licenciatura em matemática na busca de uma melhor formação aos professores" (ARAÚJO, 2008, p. 342). Isso porque os futuros professores de matemática podem, ao assumiram suas salas de aulas, mudar o foco, deixando o transformismo algébrico de lado, e tendo como eixo orientador o desenvolvimento do pensamento algébrico, como vem apontando as atuais orientações curriculares, como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018) e o Currículo de Pernambuco (CPE) (PERNAMBUCO, 2019) e pesquisas atuais nessa área (KIERAN, 2007; ARAÚJO, 2008; BORRALHO; BARBOSA, 2011).

Entretanto, algumas pesquisas (PIRES, 2012; ALMEIDA; CÂMARA, 2014b; SILVA, 2015) apontam para dificuldades encontradas por futuros professores tanto no que diz respeito à aprendizagem como ao ensino da álgebra quando se tem como foco o desenvolvimento do pensar algebricamente.

Acreditamos, portanto, que é fundamental realizar investigações que relacionem o ensino de álgebra e os futuros professores de matemática, pois, é possível que ainda existam lacunas na formação inicial dos futuros professores de matemática a respeito de

[1] "Estamos utilizando a expressão transformismo algébrico para designar o processo de obtenção de expressões algébricas equivalentes mediante o emprego de regras e propriedades válidas" (FIORENTINI, MIORIM; MIGUEL, 1993, p. 83).

discussões relacionadas ao ensino e à aprendizagem da álgebra na educação básica (ARAÚJO, 2008).

Nesse texto trazemos resultados de um recorte de um projeto maior[2], e que teve por objetivo identificar o nível de desenvolvimento do pensamento algébrico de licenciandos em matemática de uma universidade pública do Estado de Pernambuco em relação aos problemas de partilha. A busca de resposta a esse objetivo se deu por defendermos que para pensarmos ações relacionadas à educação algébrica na graduação, é fundamental termos um diagnóstico dos licenciandos em relação ao tema.

Escolhemos os problemas de partilha como objeto algébrico por ser, segundo Almeida e Câmara (2014a), os que mais aparecem nos livros didáticos do 7º ano do ensino fundamental para o ensino de equações polinomiais do 1º grau. Além disso, Almeida (2016) e Almeida e Câmara (2018) elaboraram um modelo teórico que possibilita identificar o nível de pensamento algébrico de alunos em relação a esse tipo de problema que iremos adotar como referência.

CARACTERIZAÇÃO DE PROBLEMAS DE PARTILHA (PP)

Os problemas de partilha se caracterizam por ter um valor conhecido que, por sua vez, é repartido em partes desiguais e desconhecidas (MARCHAND; BEDNARZ, 1999). É um tipo de problema de estrutura algébrica relacionado às equações polinomiais do 1º grau, e podem ser classificados de acordo com o número de relações – uma, duas ou mais; a natureza das relações – que podem ser aditivas ou multiplicativas; e o encadeamento das relações – que podem ser do tipo fonte, composição ou poço.

No exemplo "*Alan, Bruno e Carlos têm, juntos, 120 figurinhas. Bruno tem o dobro de figurinhas de Alan e Carlos tem 40 figurinhas a mais que Alan. Quantas figurinhas têm cada um?",* temos um PP com duas relações, a primeira de natureza multiplicativa (Bruno tem o dobro de figurinhas de Alan) e a segunda de natureza aditiva (Carlos tem 40 figurinhas a mais que Alan).

Quanto ao encadeamento das relações, esse PP é do tipo fonte, pois as grandezas são originadas em função de apenas uma grandeza. Nesse caso, a fonte é a quantidade de

[2] O projeto referido aqui está vinculado ao grupo de pesquisa Al Jabr em História, Epistemologia e Didática da álgebra, do qual os autores fazem parte.

figurinhas de Alan, que pode ser indicada, na resolução do problema, pela letra X. As outras grandezas, isto é, a quantidade de figurinhas de Bruno e de Carlos, são originadas a partir da quantidade de figurinhas de Alan. Por isso, dizer que "Bruno tem o dobro de figurinhas de Alan" é representado, no momento da conversão*,* por "2X", assim como dizer que "Carlos tem 40 figurinhas a mais que Alan" é representado por "X + 40". Por isso*,* após sua conversão temos a equação "X + 2X + (X + 40) = 120".

Nos problemas de partilha cujo encadeamento é do tipo composição as relações são estabelecidas seguindo uma sequência, como podemos observar no exemplo a seguir: *"Paulo, Beto e Mário vão repartir entre eles 90 figurinhas de modo que Beto receba o dobro de figurinhas de Paulo e Mário receba o triplo de Beto. Quantas figurinhas cada um vai receber?"*

Nesse problema as relações seguem uma sequência, "Beto receba o dobro de figurinhas de Paulo e Mário receba o triplo de Beto", ou seja, a ordem Paulo – Beto – Mário. Portanto, diferentemente dos problemas de partilha tipo fonte, nos do tipo composição as grandezas são originadas de fontes diferentes. Para converter o enunciado desse problema temos que adotar, como fonte inicial, a quantidade de figurinhas de Paulo, que podemos representar por "X". Como Beto tem o dobro de figurinhas de Paulo, representamos sua quantidade por "2X". Já Mário tem o triplo de figurinhas de Beto, e, como a quantidade de Beto está representada por "2X", então a quantidade de Mário deve ser representada por "3.2X", ou "6X". Nesse caso a fonte não é mais a quantidade de figurinhas de Paulo, como seria em um problema do tipo fonte, mas, sim, a quantidade de figurinhas de Beto. Finalizando, como a soma das quantidades de figurinhas de Paulo, Beto e Mário é igual a 90, temos a equação "X + 2X + 6X = 90".

Já nos PP com encadeamento do tipo poço as relações convergem para uma das personagens do problema, como podemos observar no exemplo: *"João, Carla e Maria vão repartir entre eles 50 chaveiros de modo que João receba metade dos chaveiros de Carla e 10 chaveiros a mais que Maria. Quantos chaveiros cada um vai receber?"*

No caso desse problema as relações convergem para João. Isto é, dizer que "João recebe metade dos chaveiros de Carla" significa que, no momento da conversão, o estudante tem que levar em consideração a operação inversa, ou seja, representar essa expressão por "2X" e não por "x/2". Isso porque ele tem que perceber que se João recebe metade dos chaveiros de Carla, então Carla recebe o dobro de chaveiros de João, por isso 2X.

Da mesma forma, a conversão da expressão “dez chaveiros a mais que Maria” não significa “X + 10” e, sim, “X – 10”, uma vez que o estudante tem que perceber que se João recebe dez chaveiros a mais que Maria, então Maria recebe dez chaveiros a menos que João. Por fim, como a soma dos chaveiros de João, Carla e Maria é igual a 50, temos, após a realização da conversão, a equação “X + 2X + X – 10 = 50”.

Pesquisas apontam que existe um grau de complexidade dos PP quando se leva em consideração o encadeamento das relações. Os com encadeamento tipo fonte são considerados os mais fáceis, seguido pelos com encadeamento tipo composição. Já os com encadeamento tipo poço são considerados os mais difíceis (OLIVEIRA; CÂMARA, 2011; SANTOS JUNIOR, 2013).

NÍVEIS DE DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO

Segundo Miguel, Fiorentini e Miorim (1992) o método antigo de ensinar álgebra não é suficiente para o entendimento dos alunos da educação básica, sendo primordial a inserção da construção do significado e do desenvolvimento do pensamento algébrico nos anos iniciais do ensino fundamental até o ensino médio.

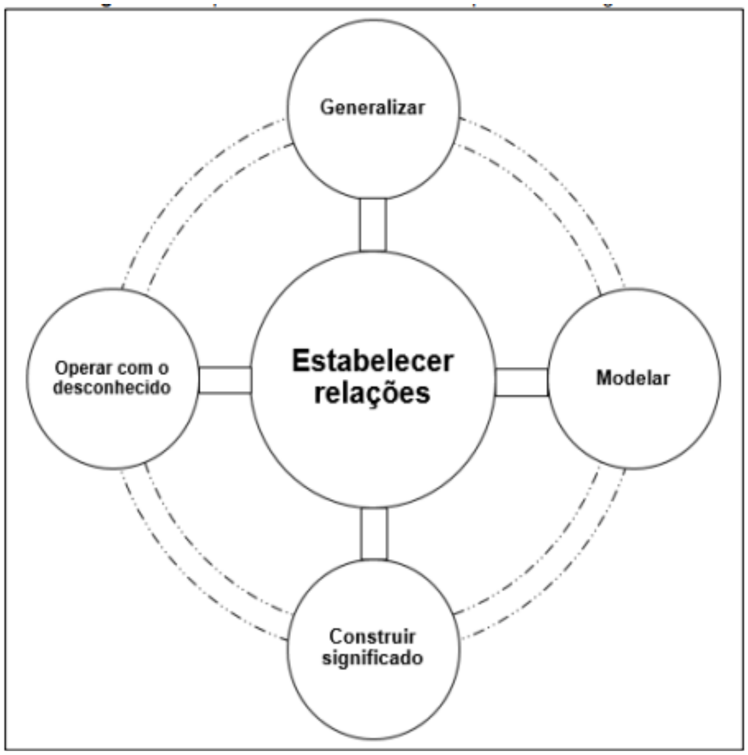
Os professores devem diversificar atividades, permitindo, aos seus alunos, desenvolver o pensamento algébrico (ARCAVI, 2005). Acreditamos que seja fundamental a escolha de situações adequadas que permitam, aos alunos, desenvolver a compreensão dos objetos e da linguagem algébrica, já que a passagem da aritmética para álgebra é uma das grandes dificuldades dos alunos, como apontam Radford, (2009) e Lins (1992).

A partir das discussões de Rômulo Lins (1992), James Kaput (1999) e Luis Radford (2009), Almeida (2016) e Almeida e Câmara (2017) propõem uma caracterização de pensamento algébrico. Eles defendem

> que o pensar algebricamente é revelado por meio de cinco características, a saber: “estabelecer relações”; “generalizar”; “modelar”; “operar com o desconhecido”; e “construir significado”. Além disso, sustentamos que no centro dessas características está a capacidade de estabelecer relações, e, subjacentes a ela, porém, não menos importantes, estão as outras. Portanto, defendemos que a primeira característica do pensamento algébrico desenvolvida e revelada por um sujeito é a capacidade de estabelecer relações, seguida pelas demais (ALMEIDA; CÂMARA, 2017, p. 53).

Para melhor entender as características do pensamento algébrico defendidas por Almeida (2016), é importante observar o esquema a seguir, que mostra como elas interagem e interrelacionam entre si.

Figura 1- Esquema das características do pensamento algébrico.



Fonte: (ALMEIDA, 2016, p. 80).

A capacidade de *estabelecer relações* é a primeira característica a se desenvolver pelo indivíduo. Nela o estudante, por exemplo em um problema de partilha, estabelece relações entre as partes desconhecidas do problema com a quantidade total conhecida. Já a capacidade de *modelar* é revelada quando o aluno elabora um modelo matemático que representa o problema em linguagem natural. A depender do nível de desenvolvimento do pensamento algébrico, o modelo elaborado pelo aluno pode ser escrito de forma algébrica formal, valendo-se de símbolos alfanuméricos essencialmente algébricos, ou menos formal, se valendo de uma linguagem sincopada, formada por abreviações, números, letras, dentre outros sinais.

A capacidade de *generalizar* é caracterizada pela forma que o indivíduo pensa o desconhecido. Por exemplo, em um PP o aluno revela essa característica quando pensa as quantidades desconhecidas de forma geral, percebendo as relações entre elas e a parte conhecida e “descreve essas relações em uma linguagem genuinamente algébrica, em que o X pode representar um valor qualquer, valor esse que, no problema em questão, é descoberto após a resolução da equação” (ALMEIDA; CÂMARA, 2018, p. 56).

Outra característica é a capacidade de *operar com o desconhecido*. Nela o aluno, por exemplo ao resolver uma equação polinomial do 1º grau, “manipula o desconhecido, o “X” no caso, segundo as leis da aritmética em relação à igualdade, em que são realizadas algumas operações na equação inicial com o objetivo de gerar equações equivalentes, até se chegar no valor de “X” (ALMEIDA; CÂMARA, 2018).

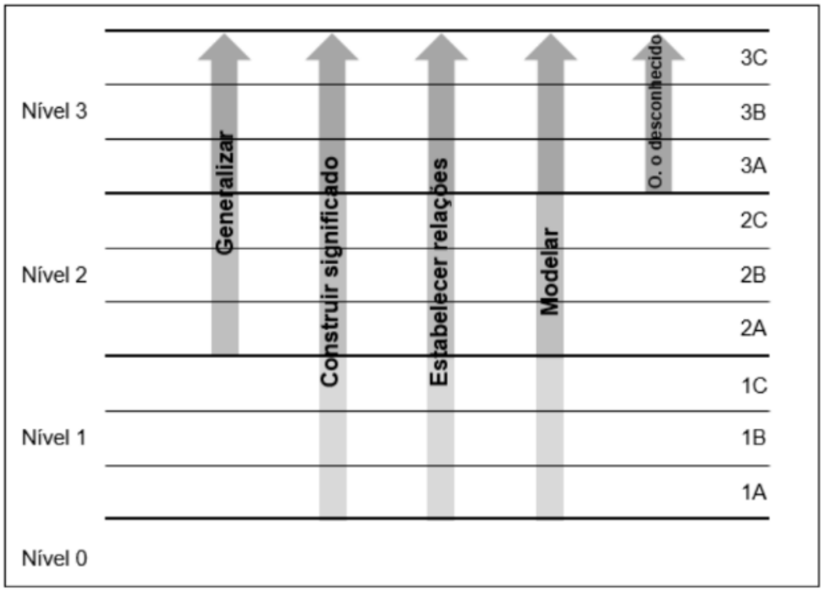
Por fim, temos a capacidade de *construir significado*. Esta característica é revelada quando o aluno constrói significado para o objeto algébrico em jogo e a linguagem utilizada para representá-lo.

Almeida (2016) considera que para desenvolver o pensamento algébrico dos alunos é necessário que o professor pense bem nas atividades propostas. Pois, é por meio dessas atividades que ele levará seus alunos a desenvolver essa forma de pensar. Mas, como saber se os alunos desenvolveram o pensamento algébrico? Como saber em qual nível eles se encontram para pensar em atividades adequadas? Foi pensando nessas questões que Almeida (2016) e Almeida e Câmara (2018) propuseram um modelo que possibilita identificar o nível de desenvolvimento do pensamento algébrico de um sujeito.

Entretanto, por acreditarem que um sujeito pode estar em um determinado nível ao se deparar com um PP e em outro nível ao se deparar com outro tipo de situação que demanda estabelecer outras relações, como, por exemplo, os problemas de generalização de padrões, o modelo proposto por eles é referente a um único tipo de situação, os PP. Por conta disso, iremos adotar esse modelo como referência para nossa análise.

O modelo de níveis propostos por esses pesquisadores vai do nível 0, caracterizado pela ausência de pensamento algébrico, passando pelo nível 1 – pensamento algébrico incipiente, pelo nível 2 – pensamento algébrico intermediário, chegando, por fim, ao pensamento algébrico consolidado, nível 3. Além disso, para cada nível, a partir do nível 1, existem três subníveis, denominados pelas letras A, B e C. Para visualizar melhor esse modelo, temos a figura 2 a seguir, que mostra as relações entre os níveis e as características do pensamento algébrico.

Figura 2 - Esquema do modelo



Fonte: (ALMEIDA; CÂMARA, 2018, p.565).

Os alunos que se encontram no nível 0 (Ausência de pensamento algébrico) ao se depararem com problemas de partilha não mobilizam nenhuma característica do pensamento algébrico. Geralmente para solucionar o problema utilizam a estratégia "dividir por 3", como se a partilha fosse feita em partes iguais ou realizam um "cálculo qualquer" com os valores que se encontram no enunciado do problema (OLIVEIRA; CÂMARA, 2011). Em ambas as estratégias os alunos não estabelecem as relações existentes entre as quantidades desconhecidas de cada personagem e o total conhecido.

Os alunos que se encontram no nível 1 (Pensamento algébrico incipiente), adotam, como estratégia para solucionar o problema de partilha, a estratégia "atribuir valores". Nela a incógnita é vista como um espaço vazio a ser preenchido por quantidades particulares, conhecidas (RADFORD, 2009). Ao adotarem essa estratégia, esses alunos mobilizam três das cinco característica do pensar algebricamente: a capacidade de estabelecer relações, pois percebem as condições postas no enunciado do PP; a capacidade de modelar, uma vez que elaboram um modelo matemático para representar as relações do PP, mesmo esse modelo não sendo a equação polinomial do 1º grau esperada ao converter o PP; e a capacidade de construir significado, tendo em vista que eles conseguem perceber o PP como uma relação de igualdade entre as partes e o todo, construindo significado para o objeto algébrico em questão (ALMEIDA; CÂMARA, 2018).

No subnível 1A estão os alunos que, com a estratégia atribuir valores, respondem os problemas de partilha considerados mais fáceis, que são os com encadeamento das relações tipo fonte. No subnível 1B encontram-se os alunos que conseguem responder, com essa estratégia, os PP que são de complexidade baixa e média, que são os com encadeamento das relações tipo fonte e composição. Já no subnível 1C estão os alunos que respondem, com a estratégia atribuir valores, os problemas de partilha independentemente do encadeamento das relações (ALMEIDA, 2016).

O nível 2 (Pensamento algébrico intermediário) é formado pelos alunos que utilizam a estratégia algébrica com registro sincopado. Nessa estratégia o aluno não escreve a equação na forma esperada pelo ambiente escolar, porém, eles conseguem elaborar a equação mentalmente, e, utilizam em seus registros uma linguagem sincopada, formada por letras, desenhos, abreviações, números, sinais de operações, dentre outros símbolos (ALMEIDA, 2016).

Nesse nível os alunos mobilizam quatro das cinco característica do pensar algebricamente: a capacidade de estabelecer relações, pois em seus registros é possível observar as condições do enunciado do PP; a capacidade de modelar, uma vez que já elaboram um modelo sintético que representa a história contada no enunciado do problema; a capacidade de construir significado, tendo em vista que já compreendem o PP como uma relação de igualdade entre quantidades, além de saberem o que os símbolos utilizados em seu modelo significam; por fim, eles mobilizam a capacidade de generalizar, já que a incógnita, no caso as quantidades desconhecidas, são tratadas de forma geral, diferentemente dos alunos que se encontram no nível 1 (ALMEIDA, 2016; ALMEIDA; CÂMARA, 2018).

Quanto à classificação dos subníveis, adotando a estratégia algébrica com registro sincopado, estão no subnível 2A os alunos que respondem apenas os PP tipo fonte, considerados mais fáceis; no subnível 2B encontram-se os alunos que conseguem responder os PP de complexidade baixa e média, que são os com encadeamento das relações tipo fonte e composição; e no subnível 2C estão os alunos que respondem os problemas de partilha independentemente do encadeamento das relações, fonte, composição ou poço.

No nível 3 (Pensamento algébrico consolidado) estão os alunos que conseguem resolver os problemas de partilha utilizando a estratégia algébrica com registro algébrico, ou seja, eles convertem o enunciado do PP em linguagem natural para uma equação polinomial do 1º grau escrita de forma esperada no ambiente escolar, valendo-se de uma linguagem essencialmente algébrica, formada por símbolos alfanuméricos.

Nesse nível os alunos mobilizam as cinco características do pensamento algébrico, isto é, além das quatros mobilizadas pelos alunos que estão no nível 2, eles mobilizam a capacidade de operar com o desconhecido como se fosse conhecido (ALMEIDA, 2016; ALMEIDA; CÂMARA, 2018). Essa última característica do pensar algebricamente é revelada no momento em que os alunos manipulam o desconhecido, o "X" no caso, "segundo as leis da aritmética em relação à igualdade, em que são realizadas algumas operações na equação inicial com o objetivo de gerar equações equivalentes, até se chegar no valor de "X", no desconhecido" (ALMEIDA; CÂMARA, 2017, p. 56).

Da mesma forma dos níveis 1 e 2, o nível 3 possui três subníveis. Adotando a estratégia algébrica com registro algébrico, estão no subnível 3A os alunos que respondem os problemas de partilha considerados mais fáceis, que são os com encadeamento das relações tipo fonte, no subnível 3B encontram-se os alunos que conseguem responder os problemas de partilha que são de complexidade baixa e média, que são os com encadeamento das relações tipo fonte e composição, e no subnível 3C estão os alunos que respondem os PP independentemente do encadeamento das relações.

PERCURSO METODOLÓGICO

Esse artigo tem por objetivo identificar o nível de desenvolvimento do pensamento algébrico de licenciandos em matemática de uma universidade pública do Estado de Pernambuco em relação aos problemas de partilha. A escolha da universidade não teve nenhum critério específico, apenas o fato de os pesquisadores terem, com mais facilidade, acesso a ela.

Tivemos como sujeitos da pesquisa 64 licenciandos de duas turmas do 1º período da licenciatura plena em matemática. Resolvemos escolher os licenciandos do 1º período por termos o objetivo, inicialmente, de traçar um diagnóstico sobre seus conhecimentos em relação à álgebra, mais especificamente sobre os PP, para, futuramente, em nosso projeto maior desenvolvido pelo nosso grupo de pesquisa, traçarmos ações formativas em relação ao campo da álgebra.

Para produção dos dados foi utilizado um questionário composto por seis problemas de partilha. Os PP do teste foram os mesmos utilizados na pesquisa de Almeida (2016) que propôs o modelo que iremos adotar em nossas análises e foram entregues impressos em uma folha de papel com o seguinte comando: "respondam os problemas a seguir". Foi solicitado que respondessem de caneta e que deixassem todos os registros no papel. A aplicação foi realizada em uma aula, após a autorização dos professores das turmas, e durou cerca de 60 minutos.

Como categorias de análises adotamos o modelo de níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico relacionado aos problemas de partilha proposto por Almeida (2016). Nesse sentido, para identificar em qual nível o licenciando se encontra tomamos como base a estratégia adotada por ele para resolver os problemas. Já com relação aos subníveis, a referência foi a complexidade dos PP.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Iniciamos nossa análise com o rendimento dos licenciandos. No quadro 1 a seguir consta o número de acerto, erro e não resposta aos problemas de partilha. O item "não resposta" refere-se aos problemas que foram deixados em branco.

Quadro 1 – Rendimento dos licenciandos em relação aos PP

	Frequência absoluta	**Porcentagem**
Acertos	295	77%
Erros	49	13%
Não resposta	40	10%
Total	**384**	**100%**

Fonte: Dados da pesquisa

Com base no Quadro 1 podemos verificar que um pouco mais de três quartos (77%) dos PP foram resolvidos de forma correta, o que era esperado, tendo em vista que os sujeitos da pesquisa foram alunos da licenciatura em matemática e os PP estão relacionados com as equações polinomiais do 1º grau, trabalhadas no ensino fundamental.

Mesmo tendo um índice considerável de acertos, ficamos surpresos com o número de erros e não respostas, que, juntos, somam 23%. Revelando, nesse caso, que ainda é possível encontrar alunos de uma graduação que tem por objetivo formar professores de matemática com dificuldades em resolver problemas relacionados com conceitos da matemática escolar.

Analisamos também o rendimento dos licenciandos levando em consideração o encadeamento das relações dos PP. No Quadro 2 a seguir temos esse resultado.

Quadro 2 – Rendimento por encadeamento de relações

	ACERTOS	ERROS	NÃO RESPOSTA	Total
PP tipo fonte	108	9	11	128
	84%	7%	9%	100%
PP tipo composição	99	18	11	128
	77%	14%	9%	100%
PP tipo poço	88	22	18	128
	69%	17%	14%	100%
TOTAL	**192**	**166**	**158**	

Fonte: Dados da pesquisa

É possível observar que a quantidade de acerto vai decrescendo e a de erro aumentando de acordo com o encadeamento das relações dos PP. Nos problemas do tipo fonte 84% dos licenciandos conseguiram resolver de forma correta, contra 77% de acerto para os do tipo composição e 69% para os do tipo poço. Esses dados corroboram com os resultados das pesquisas de Marchand e Bednarz (1999), Oliveira e Câmara (2011) e Santos Junior (2013), que mostram, assim como nossos dados, que os PP do tipo fonte são considerados mais fáceis, seguidos pelos do tipo composição. Já os do tipo poço são os mais difíceis.

No Quadro 3 a seguir temos a distribuição dos 64 partícipes da pesquisa por níveis e subníveis do pensamento algébrico, levando em consideração a frequência e a porcentagem em cada categoria.

Quadro 3 - Nível de desenvolvimento do pensamento algébrico dos licenciandos

Níveis	Frequência	Porcentagem	Subníveis	Frequência	Porcentagem
Nível 0	9	14%	-	9	14%
Nível 1	3	5%	1A	0	0%
			2B	2	4%
			3C	1	1%
Nível 2	5	8%	2A	0	0%
			2B	1	1%
			2C	4	7%

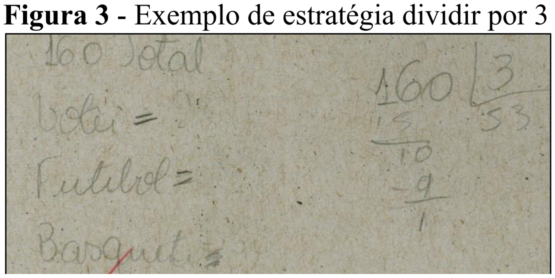
Nível 3	47	73%	3A	0	0%
			3B	9	14%
			3C	38	59%
Total	64	100%	-	64	100%

Fonte: Dados da pesquisa

Esses dados apontam que 14% dos licenciandos situam-se no nível 0, isso significa que encontramos 9 sujeitos que não conseguiram mobilizar nenhuma das características do pensamento algébrico ao se depararem com um PP. Normalmente, diante dessas situações os sujeitos adotam estratégias essencialmente aritméticas, denominadas por Oliveira e Câmara (2011) de “total como fonte”, “dividir por 3” ou “realizar um cálculo qualquer”. Ressaltamos, porém, que os licenciandos que se encontram no nível 0 não significa, necessariamente, que eles não pensam algebricamente, uma vez que eles podem mobilizar características dessa forma de pensar em outras situações algébricas, como, por exemplo, os problemas de generalização de padrões, já que a sua estrutura demanda o estabelecimento de relações diferentes das necessárias para solucionar os PP (ALMEIDA, 2016; ALMEIDA; CÂMARA, 2018).

A seguir, na Figura 3, apresentamos a estratégia dividir por 3 adotada por um licenciando para resolver o seguinte PP: *“Em uma escola, 160 alunos praticam esportes. O número de alunos que jogam basquete é 10 a mais do que jogam vôlei, e o número de alunos que joga futebol é 20 a mais dos que jogam basquete. Nessa escola, quantos alunos praticam cada esporte?”*

Figura 3 - Exemplo de estratégia dividir por 3

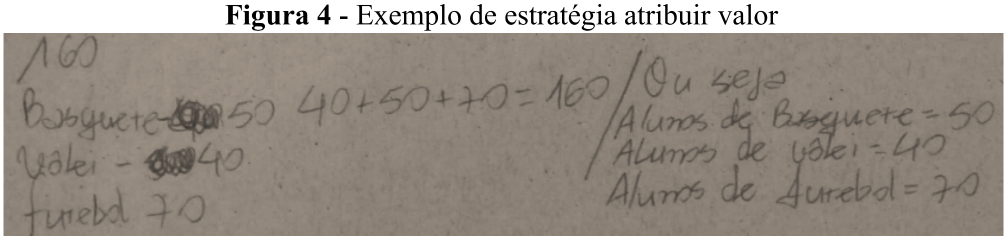


Fonte: Dados da pesquisa

Ao adotar essa estratégia o licenciando não mobiliza nenhuma das características do pensar algebricamente. Ele parece entender o problema como sendo aritmético, em que a divisão do total de pontos deve ser feita em partes iguais para os três times, ou seja, ele não consegue perceber as condições propostas no enunciado, deixando, portanto, de estabelecer as relações necessárias para a resolução correta do problema (OLIVEIRA; CÂMARA, 2011; ALMEIDA, 2016, 2018; ALMEIDA; CÂMARA, 2018).

No nível 1, no qual o pensamento algébrico é ainda incipiente, se encontra o menor número de licenciandos, apenas 5 %. Revelando, nesse caso, que apenas 3 dos 64 participantes da pesquisa adotaram a estratégia de atribuir valores como método de resolução dos PP. Podemos observar, na figura 4 a seguir, um exemplo dessa estratégia adotada por um partícipe da pesquisa para resolver o seguinte problema: *"Em uma escola, 160 alunos praticam esportes. O número de alunos que jogam basquete é 10 a mais dos que jogam vôlei, e o número de alunos que jogam futebol é 20 a mais dos que jogam basquete. Nessa escola, quantos alunos praticam cada esporte?"*

Figura 4 - Exemplo de estratégia atribuir valor



Fonte: Dados da pesquisa

A princípio é comum pensar que essa estratégia é essencialmente aritmética, uma vez que se vale de cálculos aritméticos. Entretanto, acreditamos que o aluno que a adota para resolver um PP está mobilizando as seguintes característica do pensar algebricamente: "estabelecer relações"; "modelar" e "construir significado"

Assim como apontam as pesquisas de Almeida (2016, 2018) e Almeida e Câmara (2017, 2018), assumimos que a característica central do pensar algebricamente "é essencial para resolver corretamente um problema de estrutura algébrica" (ALMEIDA, 2018, p. 705). Portanto, mesmo que os registros deixados pelo licenciando na figura 4 não revelem, de forma explícita, como ele chegou no número de alunos que praticam cada esporte, defendemos que eles indicam que o licenciando compreendeu as condições postas no enunciado do PP, já que as levou em consideração em sua resposta.

Talvez o que tenha acontecido é que pelo fato de se tratar de um sujeito que já concluiu a educação básica, ele tenha realizado os cálculos mentalmente, ou escolhido já na primeira tentativa o valor correto. Entretanto, os rabiscos que ele deixou no papel pode indicar que ele iniciou sua resposta com um valor para o número de alunos que jogam vôlei, e após realizar os cálculos percebeu que não era a resposta correta, o levando a escolher o próximo valor, ou seja, 40.

A capacidade de modelar, isto é, de elaborar um modelo matemático que represente as relações contidas no enunciado do problema pode ser percebida nos registros do licenciando, uma vez que eles parecem indicar que, ao colocar os nomes dos esportes abaixo de 160, o licenciando quis mostrar que a soma das quantidades de cada esporte é igual a esse valor, como é posto no enunciado. Além disso, após chegar nos valores, ele os somam para comprovar sua hipótese.

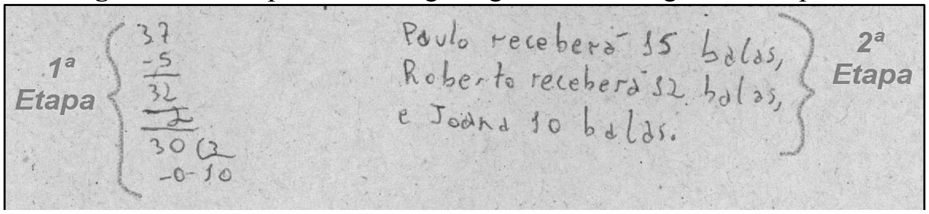
Já a última característica do pensamento algébrico revelada é a capacidade de construir significado para os objetos e a linguagem algébrica. Isso porque o processo de escolha do valor para a incógnita inicial (vôlei = 40) não é feito de forma aleatória, mostrando que o licenciando compreendeu o problema de partilha como uma relação entre a soma das quantidades de alunos que praticam cada esporte e o total de alunos.

Por fim, foi possível verificar que dos 3 licenciandos que se encontravam no nível 1, 2 estavam no subnível 1B, ou seja, conseguiram resolver os PP com encadeamento tipo fonte (considerados os mais fáceis) e os com encadeamento tipo composição (de complexidade média) e 1 estava no último subnível, o 1C, que indica que ele conseguiu resolver, adotando a estratégia atribuir valores, os PP independentemente do encadeamento de suas relações (fonte, composição ou poço) (ALMEIDA, 2016, 2018; ALMEIDA; CÂMARA, 2018).

Foi verificado também que apenas 8% dos sujeitos se encontravam no nível 2, isto é, com o pensamento algébrico intermediário. Nesse nível os sujeitos já são capazes de pensar o problema de partilha em termos de uma equação polinomial do 1º grau, revelando em seus registros, mesmo que não seja de forma explícita, a indeterminação, diferentemente dos que estão no nível 1.

A Figura 5 a seguir apresenta a estratégia adotada por um licenciando que se encontra no nível 2 ao solucionar o problema: *"Joana, Paulo e Roberto vão repartir 37 balas de modo que Paulo receba 5 balas a mais que Joana e Roberto receba 2 balas a mais que Joana. Quantas balas receberá cada um?"*

Figura 5 - Exemplo de estratégia algébrica com registro sincopado



Fonte: Dados da pesquisa

Na solução o licenciando adota a estratégia algébrica com registro sincopado, ou seja, ao que tudo indica ele equaciona o problema mentalmente (Oliveira & Câmara, 2011), mesmo que o modelo utilizado por ele para representar a conversão do problema não seja composto pelos símbolos essencialmente algébrico, o que não é necessário para estar a pensar algebricamente (RADFORD, 2009; ARCAVI, 2005; KAPUT, 1999; ALMEIDA, 2016, 2018; ALMEIDA; CÂMARA, 2017, 2018).

Dessa forma, o licenciando mobilizou as seguintes características do pensamento algébrico:

- Estabelecer relações: revelada quando o licenciando percebe as condições postas no enunciado e realiza as operações para chegar nos valores de cada incógnita (quantidade de balas de cada personagem);
- Modelar: indicada pelos registros do licenciando, que representa de forma concisa as relações do PP;
- Construir significado: uma vez que o licenciando compreendeu o PP como uma relação entre quantidades, o entendendo como uma equação;
- Generalizar: revelada quando ele adota a quantidade de balas de Joana como a incógnita fonte da equação.

Na primeira etapa da solução é possível perceber que o licenciando faz duas subtrações sucessivas. Elas representam as quantidades que Paulo e Roberto receberam a mais que Joana. Após fazer as subtrações, o valor obtido é dividido igualmente entre as três personagens, por isso 30/3. Apesar desses passos serem feitos com registros exclusivamente aritméticos, acreditamos, assim como nos colocam Oliveira e Câmara (2011), Almeida (2016) e Almeida e Câmara (2018), que eles têm uma relação estreita entre os passos utilizados ao resolver a equação obtida após a conversão do problema, como podemos observar a seguir:

1. $X + (X + 2) + (X + 5) = 37$ (Equacionamento do problema de partilha)

2. 3X = 37 – 5 – 2 (Momento que equivale às ações de subtrair 5 e 2 dos 37)
3. 3X = 30 (Resultado encontrado após as subtrações)
4. X = 30/3 (Momento que equivale a divisão realizada pelo licenciando)
5. X = 10 (Valor encontrado após a divisão)

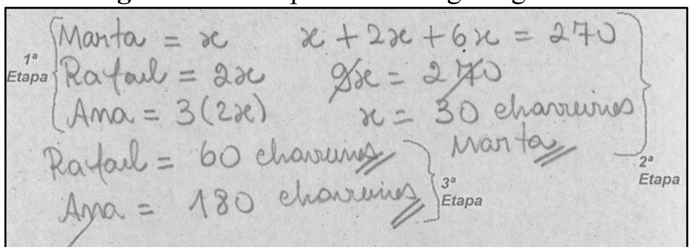
Entretanto, chegar ao 10 não é a resposta do problema, pois indica apenas a quantidade de balas de uma personagem (Joana). Na 2ª etapa, o licenciando teve que considerar as condições postas no enunciado: *"*De modo que Paulo receba 5 balas a mais que Joana" para chegar no total de balas de Paulo (15 balas). E "Roberto receba 2 balas a mais que Joana" para determinar a quantidade de balas de Roberto (12 balas).

Nesse caso, diferentemente do licenciando que se encontra no nível 1 – que parte de um valor particular, por isso a estratégia "atribuir valores" – o licenciando do nível 2 já adota a quantidade de balas de Joana como a incógnita fonte da equação. Portanto, nesse nível a indeterminação, a incógnita, já aparece de forma explícita ao discurso (RADFORD, 2009), mesmo não aparecendo nos registros do licenciando. Isso revela a capacidade de generalizar, que é uma característica do pensamento algébrico que os sujeitos que se encontram no nível 1 ainda não conseguem mobilizar (ALMEIDA; CÂMARA, 2018).Dos 5 licenciandos que se encontravam no nível 2, verificamos que nenhum se encontrava no subnível 2A, um no subnível 2B (adotando a estratégia algébrica com registro sincopado respondeu os PP com encadeamento do tipo fonte e composição) e a maioria, quatro, se encontravam no subnível 2C, ou seja, responderam aos PP independentemente do encadeamento das relações (fonte, composição ou poço).

Aproximadamente três quartos (73%) dos licenciandos que participaram da pesquisa se encontravam no nível 3, ou seja, conseguiram mobilizar todas as características do pensamento algébrico ao se depararem com os PP do teste. Desses, 59% se encontravam no subnível 3C, ou seja, responderam os PP independentemente dos encadeamentos das relações (fonte, composição e poço). Apenas 9% se encontravam no subnível 3B, que é composto pelos sujeitos que conseguem resolver os PP com encadeamento tipo fonte (considerados os mais fáceis) e composição (com grau de complexidade médio). Nenhum dos licenciandos se encontrava no primeiro subnível do nível 3.

A seguir, na Figura 6, trazemos um exemplo da estratégia algébrica utilizada por um licenciando que se encontrava no nível 3 ao resolver o problema *"Marta, Rafael e Ana* *têm juntos, 270 chaveiros. Rafael tem o dobro do número de chaveiros de Marta, e Ana tem o triplo do número de chaveiros de Rafael. Quantos chaveiros têm casa um?"*

Figura 6 - Exemplo de estratégia algébrica



Fonte: dados da pesquisa

Na solução podemos observar a característica estabelecer relações no instante em que o licenciando inicia a resposta, quando ele estabelece as relações existentes entre a quantidade de chaveiros que cada personagem tem com a quantidade total de chaveiros. Nesse mesmo momento é possível observar a capacidade de modelar do licenciando, já que ele adota a quantidade de chaveiros de marta como a fonte inicial e desconhecida e a representa por "X". Como Rafael tem o dobro de Marta, ele representa sua quantidade por "2X", e a quantidade de Ana é representada por "3(2X)", já que ela tem o triplo de Marta. No segundo momento o licenciando chega na equação "X + 2X + 6X = 270", ou seja, no modelo matemático espero no ambiente escolar para representar o problema (ALMEIDA, 2016, 2018; ALMEIDA; CÂMARA, 2018).

A capacidade de generalizar é observada a partir do momento que o licenciando adota a quantidade de chaveiro de Marta como fonte inicial do problema como um valor geral e desconhecido e a representa por uma incógnita, no caso o "X", tomando-o como base para as quantidades de chaveiros das outras personagens.

A capacidade de operar com o desconhecido como se fosse conhecido é notada na 2ª etapa de resolução, quando o licenciando manipula o desconhecido, o "X", com base nas leis da aritmética em relação à igualdade, objetivando encontrar equações equivalentes até chegar no valor de "X".

Por fim, a capacidade de construir significado para a linguagem e os objetos algébricos pode ser observada já na 1ª etapa da solução do problema, quando o sujeito percebeu o problema como uma relação entre quantidades, o entendendo como uma equação do 1º grau. Já na 3ª etapa é possível verificar que ele compreendeu o que significa a linguagem utiliza, tendo em vista que, para ele, o "X" representa a quantidade de chaveiros que Marta possui, por isso “Marta = 30”, que “2X” indica a quantidade de Rafael, daí “Rafael = 60” (2 . 30), e que o “3.(2X)” é a quantidade de chaveiros de Ana, levando a “Ana = 180” (3.(2.30)).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os licenciandos partícipes da pesquisa mostraram ter mais facilidade em problemas de encadeamento tipo fonte, com 84% de acertos, e encontraram mais dificuldades em problemas de encadeamento tipo poço, em que houve 69% de acertos. Corroborando com os resultados das pesquisas de Oliveira e Câmara (2011) e Santos Junior (2013).

Também foi percebido que 73% dos licenciandos encontram-se no nível 3 em relação ao desenvolvimento do pensamento algébrico, o que se era esperado, já que se tratavam de alunos de um curso de graduação em matemática.

Mesmo com um percentual alto de licenciandos participantes da pesquisa com o pensamento algébrico bem desenvolvido, um dado nos chamou atenção, pois 14% se encontravam no nível 0 de desenvolvimento do pensamento algébrico em relação aos problemas de partilha. Revelando, portanto, que ainda temos alunos que entram na licenciatura em matemática com lacunas na aprendizagem de conceitos do ensino fundamental, o que também é possível observar em resultados de outras pesquisas (PIRES, 2012; ALMEIDA; CÂMARA, 2014b; SILVA, 2015). Apontando, portanto, para a necessidade de pensarmos sobre ações formativas para licenciandos em relação ao ensino e à aprendizagem da álgebra escolar.

Com base nisso deixamos uma questão: o que vem sendo feito nos cursos de licenciaturas em matemática para diminuir ou sanar as dificuldades dos licenciandos em relação aos conceitos da educação básica? Isso nos preocupa uma vez que esses licenciandos irão precisar desses conceitos durante sua graduação, além de ensiná-los quando assumir suas salas de aula.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, J. R.; CÂMARA, M. **Análise dos problemas propostos para o ensino de equações polinomiais do 1º grau nos livros didáticos de matemática**. Boletim *GEPEM*, Rio de Janeiro, vol 64. 2014a.

ALMEIDA, J. R.; CÂMARA, M. **Pensamento algébrico e formação inicial de professores de matemática**. EM TEIA – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana, (Online), vol. 5, n. 2, Recife. 2014b.

ALMEIDA, J. R.; CÂMARA, M. P**ensamento Algébrico: Em busca de uma definição**. Revista Paranaense de Educação Matemática, Campo Mourão, vol. 6, n. 10, 2017.

ALMEIDA, J. R.; CÂMARA, M. **Desenvolvimento do Pensamento Algébrico: proposição de um modelo para os problemas de partilha**. Zetetiké**,** Campinas, São Paulo, vol. 26, n.3. 2018.

ALMEIDA, J. R.; CÂMARA, M. **Níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico de estudantes dos anos finais do ensino fundamental: o caso dos problemas de partilha.** Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, vol. 21, n. 3. 2019.

ALMEIDA, J. R. **Níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico: Um modelo para os problemas de partilha de quantidade**. Tese de Doutorado em Ensino das Ciências e Matemática. UFRPE, Recife. 2016

ARAÚJO, E. A. **Ensino de álgebra e formação de professores**. Educação Matemática Pesquisa, v. 10, n. 2, São Paulo. 2008.

ARCAVI, A.. **El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos**. Conferência plenária no encontro de investigação em educação matemática. Caminha, Portugal. 2005.

BORRALHO, A.; BARBOSA, E. **Padrões e o desenvolvimento do pensamento algébrico**. In: Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática, Recife. 2011.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular.** Ministério da Educação, Brasília. 2018.

FIORENTINI, D.; MIGUEL, A.; MIORIM, A. **Álgebra ou Geometria: para onde Pende o Pêndulo?** Pró-Posições, v. 3, n. 1, pp. 39-54. 1992.

FIORENTINI, D.; MIORIM, A.; MIGUEL, A. **Contribuições para um Repensar… a Educação Algébrica Elementar** Pró-Posições, v. 4, n. 1, pp. 78-91. 1993.

KAPUT, J. **Teaching and learning a new algebra**. In. Fennema, E. & Romberg, T. A. (Ogs.). Mathematics classrooms that promote understanding. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum. 1999.

KIERAN, C. **Developing algebraic reasoning: Th e role of sequenced tasks and teacher questions from the primary to the early secondary school levels**. Quadrante. Vol. XVI, nº 1, Portugal. 2007

LINS, R. C. **A framework for understanding what algebraic thinking is**. Tese (Doctor of Philosophy) – School of Education, University of Nothingam, Nothingam, UK. 1992

MARCHAND, P.; BEDNARZ, N. **L'enseignement de l'algèbre au secondaire: une analyse des problèmes présentés aux élèves**. Bulletin AMQ, Vol. XXXIX, N°4. Québec: AMQ. 1999.

OLIVEIRA, I.; CÂMARA, M. ***Problemas de estrutura algébrica: uma análise comparativa entre as estratégias utilizadas no Brasil e no Québec***. Anais do XIII CIAEM, Recife. 2011.

PIRES, F. S. **Álgebra e formação docente: o que dizem os futuros professores de matemática**. Dissertação de Mestrado em Educação. UFSCar, São Carlos. 2012.

RADFORD, L. **Signs, gestures, meanings: Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective**. Anais do Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. Lyon, França. 2009.

SANTOS JUNIOR, C. P. **Estratégias utilizadas por alunos do 7º, 8º e 9º ano do ensino fundamental na resolução de problemas de partilha**. Dissertação de mestrado em Educação Matemática e tecnológica, UFPE, Recife. 2013.

SILVA, J. P. **Álgebra na escola básica versus álgebra na licenciatura: onde se encontra o x da questão?** Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. UFOP, Ouro Preto. 2015.

Submetido em 10 de janeiro de 2023.
Aprovado em 19 de dezembro de 2023.