

**ESTABILIDADE PARAMÉTRICA DE UM PÊNDULO CARREGADO
PRÓXIMO A UM FIO CARREGADO OSCILANTE**

José Laudelino de Menezes Neto
Universidade Federal da Paraíba
laudelino@dcx.ufpb.br

Adecarlos Costa Carvalho
Universidade Federal do Maranhão
adecarlos.carvalho@ufma.br

Renata de Farias Limeira Carvalho
Universidade Federal do Maranhão
limeira.renata@ufma.br

Resumo

Neste artigo, estudamos a dinâmica de um pêndulo matemático planar com um bulbo eletricamente carregado. Próximo ao pêndulo, há um fio horizontal infinito, também carregado e oscilando harmonicamente na direção vertical. O problema apresenta duas posições na vertical que são equilíbrios independentemente dos parâmetros envolvidos. Utilizando o Teorema de Krein-Gelfand-Lidskii e o Método de Deprit-Hori, analisamos a estabilidade paramétrica desses equilíbrios, sendo construídas superfícies de fronteira que separam regiões de instabilidade e estabilidade no espaço de parâmetros.

Palavras-chave: Sistema Hamiltoniano, método de Deprit-Hori, matriz fundamental.

Abstract

In this paper, we study the dynamics of a planar mathematical pendulum with an electrically charged bulb. Near the pendulum, there is an infinitely long horizontal wire, also charged and harmonically oscillating in the vertical direction. The problem presents two vertical positions that are independent equilibria of the involved parameters. Using the Krein-Gelfand-Lidskii Theorem and the Deprit-Hori Method, we analyze the parametric stability of these equilibria, constructing boundary surfaces that separate regions of instability and stability in the parameter space.

Keywords: Hamiltonian system, method of Deprit-Hori, fundamental matrix.

1 Introdução

O pêndulo matemático planar com um ponto de suspensão oscilante tem sido objeto de estudo há muito tempo, como é possível verificar nas referências [3, 5, 10, 11, 12]. Alguns estudos também lidam com pêndulos que apresentam um ponto de suspensão oscilante, uma carga elétrica no pêndulo e estão próximos a objetos eletricamente carregados como em [2], [4] e [6]. No primeiro, o objeto carregado é uma carga pontual, no segundo uma placa condutora oscilante e no terceiro um fio carregado com comprimento infinito.

No nosso estudo, propomos um problema em que o pêndulo planar tem um ponto de suspensão fixo e uma carga elétrica q no pêndulo. Próximo ao pêndulo, há um fio de comprimento infinito eletricamente carregado, em posição horizontal e com uma oscilação harmônica vertical dada por ρ , como ilustrado na Figura 1. Observamos que, no estudo realizado em [6], foi analisada a dinâmica de um pêndulo com oscilação no ponto de suspensão e fio horizontal fixo, o que difere da dinâmica abordada no presente contexto.

A equação do movimento depende de quatro parâmetros adimensionais μ, α, δ e ε como descritos na Equação (2.1). O problema apresenta duas posições na vertical que são equilíbrios independentemente desses parâmetros, os quais denominamos de P_1 e P_2 . Em ambas as posições de equilíbrio, o pêndulo está perpendicular ao fio horizontal. O equilíbrio P_1 ocorre quando o pêndulo aponta no sentido do fio, enquanto em P_2 o pêndulo aponta no sentido oposto. Nosso objetivo é investigar a estabilidade paramétrica de cada uma dessas posições de equilíbrio. Para valores suficientemente pequenos de $\varepsilon > 0$, utilizamos o Teorema de Krein-Gelfand-Lidskii e o Método de Deprit-Hori para construir superfícies de fronteira que separam as regiões de instabilidade e estabilidade no espaço de parâmetros $(\mu, \alpha, \delta, \varepsilon)$. Essas superfícies foram definidas como gráficos sobre o espaço $(\mu, \delta, \varepsilon)$, expressas como séries de potências em ε e seus coeficientes dependendo de μ e δ . As expressões dessas superfícies foram calculadas analiticamente nos Teoremas 4.1, 4.2 e 4.3. Por outro lado, para valores arbitrários de $\varepsilon > 0$, obtemos essas regiões de instabilidade e estabilidade de modo numérico, seguindo a análise descrita em [7, 13].

A estrutura do artigo é como segue. Na seção 2 descrevemos o problema na sua formulação Hamiltoniana e encontramos as regiões de estabilidade linear do problema não perturbado, $\varepsilon = 0$, no espaço dos parâmetros (μ, α, δ) . Os coeficientes das superfícies fronteiras que separam as regiões de estabilidade e instabilidade são restritas a essas regiões. Na Seção 3, realizamos algumas mudanças de variáveis simpléticas no Hamiltoniano linearizado para cada equilíbrio. O Hamiltoniano resultante reduz substancialmente os cálculos de normalização da seção seguinte. Na Seção 4, normalizamos

o Hamiltoniano periódico no tempo para o caso de valores suficientemente pequenos de $\varepsilon > 0$ via método de Deprit-Hori, obtendo um Hamiltoniano autônomo que simplifica a análise da estabilidade. Esse Hamiltoniano autônomo foi utilizado para obter as superfícies fronteiras que separam as regiões de estabilidade e instabilidade no espaço de parâmetros $(\mu, \alpha, \delta, \varepsilon)$. Na Seção 5, para valores arbitrários de $\varepsilon > 0$, utilizamos um método numérico para obter as regiões de estabilidade e instabilidade no espaço de parâmetros, seguindo a análise descrita em [7, 13].

2 Formulação do Problema

Considere um pêndulo planar de comprimento ℓ com um ponto de suspensão em O . O bulbo do pêndulo tem massa m e uma carga elétrica q . Abaixo do pêndulo, há um fio horizontal de comprimento infinito com uma distribuição homogênea de carga elétrica positiva. A densidade linear de carga uniforme no fio é σ . O fio oscila harmonicamente na direção vertical, a uma distância ρ do ponto O' . O ponto O' está a uma distância fixa $d > \ell + \rho$ de O e a direção da reta passando por O a O' é perpendicular ao fio horizontal (veja Figura 1)¹.

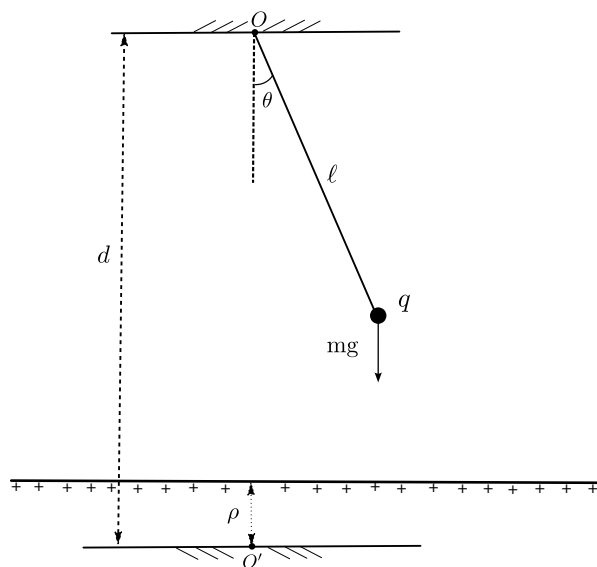


Figura 1: Pêndulo carregado e fio horizontal oscilante também carregado.

A função Lagrangeana é dada por $L = T - U$, onde T representa a energia cinética,

¹Todas as figuras foram produzidas pelos autores.

U_g é a energia potencial gravitacional e U_e é a energia potencial eletrostática, com $U = U_g + U_e$. Supomos que a velocidade do bulbo é pequena o suficiente para desprezarmos a força magnética.

Se θ é o ângulo que o pêndulo faz com a vertical, veja a Figura 1, então as coordenadas do pêndulo são $x = \ell \sin \theta$ e $y = d - \ell \cos \theta$. Então a energia cinética é dada por

$$T = \frac{m}{2} \left[(\ell \dot{\theta} \cos \theta)^2 + (\ell \dot{\theta} \sin \theta)^2 \right] = \frac{m\ell^2 \dot{\theta}^2}{2}$$

e a energia potencial gravitacional é dada por $U_g = -mg(d - \ell \cos \theta)$. Considerando que $d - \rho - \ell \cos \theta$ é a distância da carga q ao fio, a energia potencial eletrostática é dada por

$$U_e = -2\kappa_0 q \sigma \log \left(\frac{d - \rho - \ell \cos \theta}{d - \rho} \right),$$

onde κ_0 é a constante de Coulomb e o ponto O foi utilizado como o ponto de referência para o cálculo do potencial eletrostático. Assim, a equação do movimento do pêndulo é

$$m\ell \ddot{\theta} + mg \sin \theta - \frac{2\kappa_0 q \sigma}{d - \rho - \ell \cos \theta} \sin \theta = 0.$$

Considerando que o fio horizontal está sujeito a uma oscilação harmônica com amplitude a e frequência ν , expressa como $\rho = a \cos \nu t$, é conveniente adotar $\tau = \nu t$ como a nova variável independente. Dessa forma, temos que $\ddot{\theta} = \nu^2 \theta''$, onde a linha denota a derivada em relação a τ . Definindo os parâmetros adimensionais $\alpha = \frac{g}{\ell \nu^2}$, $\varepsilon = \frac{a}{\ell}$, $\delta = \frac{d}{\ell}$, $\mu = \frac{q}{\ell \sigma}$ e escolhendo σ de forma que $\frac{2\kappa_0 \sigma^2}{m \ell \nu^2} = 1$, a equação do movimento se torna

$$\theta'' + \alpha \sin \theta - \frac{\mu \sin \theta}{\delta - \varepsilon \cos \tau - \cos \theta} = 0. \quad (2.1)$$

Os valores $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ correspondem aos pontos que são equilíbrios para todos os valores dos parâmetros. Nosso objetivo é estudar a estabilidade paramétrica desses equilíbrios usando a formulação Hamiltoniana.

Fazendo $x = \theta$ e $y = \theta'$, a equação do movimento (2.1) pode ser escrita como um sistema Hamiltoniano

$$x' = H_y, \quad y' = -H_x,$$

cuja função Hamiltoniana é

$$H(x, y, \tau, \mu, \alpha, \delta, \varepsilon) = \frac{1}{2} y^2 - \alpha \cos x - \mu \log(\delta - \varepsilon \cos \tau - \cos x). \quad (2.2)$$

Os dois equilíbrios têm suas posições perpendiculares ao fio horizontal, a saber $P_1 = (0, 0)$ e $P_2 = (\pi, 0)$. Quando $\varepsilon = 0$, temos um sistema autônomo com um grau

de liberdade que descreve o movimento de um pêndulo carregado e sem oscilação no fio horizontal. Nesse caso, temos o seguinte resultado sobre a estabilidade linear dos equilíbrios.

Proposição 2.1. *Supondo $\varepsilon = 0$, temos as seguintes regiões de estabilidade e instabilidade para os equilíbrios P_1 e P_2 do sistema Hamiltoniano (2.2):*

- Para o equilíbrio P_1 , a região de estabilidade é dada por $\mu < \alpha(\delta - 1)$, e a região de instabilidade é dada por $\mu > \alpha(\delta - 1)$.
- Para o equilíbrio P_2 , a região de estabilidade é dada por $\mu > \alpha(\delta + 1)$, e a região de instabilidade é dada por $\mu < \alpha(\delta + 1)$.

Demonstração. As matrizes hessianas são da forma

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

onde $A = \alpha - \frac{\mu}{\delta-1}$ para o equilíbrio P_1 , e $A = \frac{\mu}{\delta+1} - \alpha$ para o equilíbrio P_2 . Logo, a parte quadrática de H é da forma $H_2 = \frac{1}{2}(Ax^2 + y^2)$.

De acordo com o Teorema de Dirichlet [14], o equilíbrio é estável se H_2 for definida positiva. Por outro lado, se H_2 for indefinida, então a matriz do sistema linear

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -A & 0 \end{bmatrix}$$

terá autovalores reais e, portanto, o equilíbrio é instável.

Podemos concluir que o equilíbrio é estável quando $A > 0$ e instável quando $A < 0$, como desejado. \square

Observação 2.2. Observamos que, quando $\mu = 0$, a equação (2.1) descreve o movimento de um pêndulo simples, sem carga e sem oscilação no fio horizontal. Nesse caso, o equilíbrio P_1 é estável, enquanto P_2 é instável. A partir da Proposição 2.1, concluímos que, para o pêndulo carregado, o equilíbrio estável P_1 do pêndulo simples torna-se instável quando $\mu > \alpha(\delta - 1) > 0$, enquanto que o equilíbrio instável P_2 do pêndulo simples torna-se estável quando $\mu > \alpha(\delta + 1) > 0$.

3 Estabilidade Paramétrica

Nosso objetivo é estudar a estabilidade paramétrica do sistema linearizado de (2.2) no espaço dos parâmetros. Para isso, faremos uso do Teorema de Krein-Gelfand-Lidskii, veja [13], cujo enunciado segue abaixo.

Considere um sistema Hamiltoniano linear, cuja função Hamiltoniana é da forma

$$H = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sigma_k (x_k^2 + y_k^2) + \varepsilon H_1 + \varepsilon^2 H_2 + \dots, \quad (3.1)$$

onde H_1, H_2, \dots são formas quadráticas nas variáveis $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$ com coeficientes contínuos e 2π periódicos em t .

Teorema de Krein-Gelfand-Lidskii. *Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, o sistema linear com hamiltoniano (3.1) é estável se, e somente se, as quantidades σ_k não estão vinculadas pelas relações*

$$\sigma_k + \sigma_l = N, \quad (3.2)$$

com $k, l = 1, 2, \dots, n$ e $N = \pm 1, \pm 2, \dots$.

Fazendo $\xi = x - x_0$ e $\eta = y$, com $x_0 = 0$ para P_1 e $x_0 = \pi$ para P_2 , as funções Hamiltonianas linearizadas de (2.2) são dadas por

$$H(\xi, \eta, \tau, \mu, \alpha, \delta, \varepsilon) = \frac{\eta^2}{2} - \left(\frac{\mu}{\delta - 1 - \varepsilon \cos \tau} - \alpha \right) \frac{\xi^2}{2}, \quad \text{para } P_1 \quad (3.3)$$

$$H(\xi, \eta, \tau, \mu, \alpha, \delta, \varepsilon) = \frac{\eta^2}{2} + \left(\frac{\mu}{\delta + 1 - \varepsilon \cos \tau} - \alpha \right) \frac{\xi^2}{2}, \quad \text{para } P_2. \quad (3.4)$$

Para simplificar o trabalho, definimos $s_1 = -1$, $s_2 = 1$, $\delta_1 = \delta - 1$, e $\delta_2 = \delta + 1$. Dessa forma, utilizaremos apenas uma expressão para representar os Hamiltonianos (3.3) e (3.4), dada por:

$$H(\xi, \eta, \tau, \mu, \alpha, \delta, \varepsilon) = \frac{\eta^2}{2} + s_i \left(\frac{\mu}{\delta_i - \varepsilon \cos \tau} - \alpha \right) \frac{\xi^2}{2}, \quad (3.5)$$

onde o índice i está associado ao equilíbrio P_i , com $i = 1, 2$. O polinômio característico do sistema pode ser expresso da seguinte maneira:

$$\lambda^2 + s_i \frac{\mu - \alpha \delta_i + \alpha \varepsilon \cos \tau}{\delta_i - \varepsilon \cos \tau}.$$

Por se tratar de um sistema não-autônomo, a análise da estabilidade torna-se mais complexa. Para estudar a estabilidade paramétrica faremos uso da frequência do sistema não perturbado, $\varepsilon = 0$, que é dada por

$$\omega = \sqrt{s_i \left(\frac{\mu}{\delta_i} - \alpha \right)}. \quad (3.6)$$

No caso de um grau de liberdade, a equação (3.2) assume a forma $2\omega = N$, com $N = \pm 1, \pm 2, \dots$. Assim, do Teorema de Krein-Gelfand-Lidskii, se para algum número inteiro N a frequência dada em (3.6) satisfaz $2\omega(\mu, \alpha, \delta) = N$, então o sistema linear não perturbado não é parametricamente estável, ou seja, em qualquer vizinhança existe um sistema instável. Analisando o sistema no espaço dos parâmetros $(\mu, \alpha, \delta, \varepsilon)$, a equação $2\omega(\mu, \alpha, \delta) = N$, $N \geq 1$, define uma superfície no subespaço $(\mu, \alpha, \delta, 0)$. Assim, para qualquer ponto $(\mu_0, \alpha_0, \delta_0, 0)$ sobre essa superfície, se $\varepsilon > 0$ então o ponto $(\mu_0, \alpha_0, \delta_0, \varepsilon)$ pode ou não ser estável. Construiremos, portanto, superfícies fronteiras das regiões de estabilidade e instabilidade no espaço dos parâmetros $(\mu, \alpha, \delta, \varepsilon)$. Essas superfícies serão definidas como gráficos sobre o espaço $(\mu, \delta, \varepsilon)$, expressas como séries de potências em ε e seus coeficientes dependendo de μ e δ .

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon + \alpha_2\varepsilon^2 + \alpha_3\varepsilon^3 + \alpha_4\varepsilon^4 + \mathcal{O}(\varepsilon^5), \quad \text{com } \alpha_j = \alpha_j(\mu, \delta), \quad j \geq 0, \quad (3.7)$$

sendo $\alpha_0 = \frac{\mu}{\delta_i} - s_i \frac{N^2}{4}$ para o equilíbrio P_i , $i = 1, 2$.

Substituindo (3.7) no Hamiltoniano (3.5) e reorganizando em série de potências de ε , obtemos

$$H(\xi, \eta, \tau, \mu, \alpha, \delta, \varepsilon) = \frac{N^2}{8}\xi^2 + \frac{1}{2}\eta^2 - s_i \sum_{j \geq 1} \frac{\xi^2}{2} \left(\alpha_j - \frac{\mu}{\delta_i^{j+1}} \cos^j \tau \right) \varepsilon^j. \quad (3.8)$$

Fazendo a mudança de variáveis simpléticas

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{\omega_0}}x, \quad \eta = \sqrt{\omega_0}y, \quad \omega_0^2 = s_i \left(\frac{\mu}{\delta_i} - \alpha_0 \right)$$

o Hamiltoniano (3.8) se torna

$$\mathcal{H}(x, y, \tau, \mu, \alpha, \delta, \varepsilon) = \frac{\omega_0}{2}(x^2 + y^2) + \varepsilon \mathcal{H}_1 + \varepsilon^2 \mathcal{H}_2 + \dots, \quad (3.9)$$

onde $\mathcal{H}_j = -s_i \frac{x^2}{N} \left(\alpha_j - \frac{\mu}{\delta_i^{j+1}} \cos^j \tau \right)$, $j \geq 1$, são formas quadráticas nas variáveis x, y com coeficientes contínuos e 2π periódicos em τ .

Com o intuito de simplificar o último hamiltoniano, faremos a seguinte mudança de coordenadas simpléticas:

$$x = \cos \omega_0 \tau X + \sin \omega_0 \tau Y, \quad y = -\sin \omega_0 \tau X + \cos \omega_0 \tau Y,$$

onde $\omega_0 = \frac{N}{2}$. Essa rotação elimina o termo \mathcal{H}_0 , reduzindo substancialmente os cálculos subsequentes. Nessas novas coordenadas, o Hamiltoniano (3.9) assume a forma

$$H = -s_i \sum_{j \geq 1} \frac{1}{N} \left(\cos \frac{N\tau}{2} X + \sin \frac{N\tau}{2} Y \right)^2 \left(\alpha_j - \frac{\mu}{\delta_i^{j+1}} \cos^j \tau \right) \varepsilon^j, \quad (3.10)$$

onde o índice $i = 1, 2$ está associado, respectivamente, aos equilíbrios P_1 e P_2 , como pode ser visto na Equação (3.5).

4 As Superfícies que separam as regiões de Estabilidade e Instabilidade

Para obtermos os coeficientes α_j da expressão (3.7) das superfícies que separam as regiões de estabilidade e instabilidade, utilizaremos o método de Deprit-Hori. Este método é descrito em detalhes em [13], e outras referências como [1, 8, 9] também podem ser consultadas. Resumidamente, o método consiste no seguinte:

Considere um sistema Hamiltoniano da forma

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial X}, \quad \frac{dX}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

com Hamiltoniano

$$H(x, X, t, \varepsilon) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^m}{m!} H_m(x, X, t), \quad (4.1)$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n)$, $X = (X_1, \dots, X_n)$ são as posições e os momentos do problema e ε é um pequeno parâmetro positivo.

O método de Deprit-Hori permite a construção de uma transformação de coordenadas simpléticas que leva o Hamiltoniano (4.1), dependente do tempo t , para um Hamiltoniano autônomo da forma

$$K(p, P) = k_{02}p^2 + k_{11}pP + k_{20}P^2, \quad (4.2)$$

onde $k_{ij} = \sum_{m=1}^{\infty} k_{ij}^{(m)} \varepsilon^m$, com $k_{ij}^{(m)}$ dependendo de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$. A equação característica associada a esse Hamiltoniano é dada por

$$\lambda^2 - (k_{11}^2 - 4k_{20}k_{02}) = 0.$$

Dessa forma, a região de estabilidade é definida pela desigualdade $4k_{20}k_{02} > k_{11}^2$, enquanto a fronteira entre as regiões de estabilidade e instabilidade é dada pela igualdade $4k_{20}k_{02} = k_{11}^2$.

Em nosso caso específico, ao aplicarmos o método de Deprit-Hori ao Hamiltoniano (3.10), obtemos um Hamiltoniano autônomo nas variáveis simpléticas p e P da forma (4.2), cujo termo k_{11} é identicamente nulo. Dessa forma, a equação característica é dada por

$$\lambda^2 + 4k_{20}k_{02} = 0.$$

Assim, a região de estabilidade é determinada pela desigualdade $k_{20}k_{02} > 0$, cuja fronteira é dada pela equação $k_{20}k_{02} = 0$, ou seja, quando

$$k_{20} = 0 \quad \text{ou} \quad k_{02} = 0. \quad (4.3)$$

Ao igualarmos a zero os coeficientes de todas as potências de ε nas expressões k_{20} e k_{02} , encontramos os coeficientes $\alpha_j(\mu, \delta)$ em (3.7) e, portanto, as superfícies fronteiras no espaço dos parâmetros $(\mu, \alpha, \delta, \varepsilon)$.

4.1 As Superfícies Fronteira para ε suficientemente pequeno

Para cada ressonância $2\omega = N$, $N = 1, 2, \dots$, aplicamos o método de Deprit-Hori ao Hamiltoniano (3.10), obtendo as superfícies fronteira.

Teorema 4.1. *As superfícies fronteiras que separam as regiões de estabilidade e instabilidade associadas à ressonância $2\omega = 1$ são parametrizadas por*

$$\alpha^+ = -\frac{s_i}{4} + \frac{\mu}{\delta_i} + \alpha_{11}^+ \varepsilon + \alpha_{12}^+ \varepsilon^2 + \alpha_{13}^+ \varepsilon^3 + \alpha_{14}^+ \varepsilon^4 + \mathcal{O}(\varepsilon^5), \quad (4.4)$$

$$\alpha^- = -\frac{s_i}{4} + \frac{\mu}{\delta_i} + \alpha_{11}^- \varepsilon + \alpha_{12}^- \varepsilon^2 + \alpha_{13}^- \varepsilon^3 + \alpha_{14}^- \varepsilon^4 + \mathcal{O}(\varepsilon^5), \quad (4.5)$$

onde

$$\begin{aligned} \alpha_{11}^+ &= \frac{\mu}{2\delta_i^2}, & \alpha_{12}^+ &= \frac{\mu}{2\delta_i^3} \left(1 + \frac{s_i \mu}{4\delta_i} \right), \\ \alpha_{13}^+ &= \frac{\mu}{\delta_i^4} \left(\frac{3}{8} + \frac{s_i \mu}{8\delta_i} - \frac{\mu^2}{32\delta_i^2} \right), & \alpha_{14}^+ &= \frac{\mu}{8\delta_i^5} \left(3 + \frac{11s_i \mu}{6\delta_i} - \frac{\mu^2}{6\delta_i^2} + \frac{s_i \mu^3}{48\delta_i^3} \right) \\ \alpha_{11}^- &= -\alpha_{11}^+, & \alpha_{12}^- &= \alpha_{12}^+, & \alpha_{13}^- &= -\alpha_{13}^+, & \alpha_{14}^- &= \alpha_{14}^+. \end{aligned}$$

Demonstração. Aplicando o método de Deprit-Hori ao Hamiltoniano (3.10) com $N = 1$, obtemos um Hamiltoniano da forma (4.2), em que o coeficiente k_{11} é idênticamente igual a zero. Os coeficiente k_{20} e k_{02} são dados por

$$k_{20} = k_{20}^{(1)} \varepsilon + k_{20}^{(2)} \varepsilon^2 + k_{20}^{(3)} \varepsilon^3 + \mathcal{O}(\varepsilon^4),$$

$$k_{02} = k_{02}^{(1)} \varepsilon + k_{02}^{(2)} \varepsilon^2 + k_{02}^{(3)} \varepsilon^3 + \mathcal{O}(\varepsilon^4)$$

onde

$$\begin{aligned}
k_{20}^{(1)} &= \frac{s_i}{4} \left(\frac{\mu}{\delta_i^2} - 2\alpha_1 \right) \\
k_{20}^{(2)} &= -\frac{\alpha_1^2}{2} - \frac{s_i\alpha_2}{2} + \frac{1}{4} \left(\frac{s_i}{\delta_i^3} + \frac{3\alpha_1}{\delta_i^2} \right) \mu - \frac{3\mu^2}{16\delta_i^4} \\
k_{20}^{(3)} &= -\alpha_1\alpha_2 - s_i\alpha_1^3 - \frac{s_i\alpha_3}{2} + \left(\frac{3s_i}{16\delta_i^4} + \frac{\alpha_1}{2\delta_i^3} + \frac{3\alpha_2}{4\delta_i^2} + \frac{5s_i\alpha_1^2}{2\delta_i^2} \right) \mu \\
&\quad - \left(\frac{5}{16\delta_i^5} + \frac{s_i\alpha_1}{\delta_i^6} \right) \mu^2 - \frac{3s_i\mu^3}{64\delta_i^6} \\
k_{02}^{(1)} &= -k_{20}^{(1)} - s_i\alpha_1, \\
k_{02}^{(2)} &= k_{20}^{(2)} + \frac{3\alpha_1\mu}{2\delta_i^2} \\
k_{02}^{(3)} &= -k_{20}^{(3)} - 2\alpha_1\alpha_2 - s_i(2\alpha_1^3 + \alpha_3) + \frac{\alpha_1\mu}{\delta_i^3} - \frac{2s_i\alpha_1\mu^2}{\delta_i^4}
\end{aligned}$$

Usando as equações (4.3), podemos obter os coeficientes α_j de (3.7) para duas superfícies no espaço dos parâmetros da seguinte forma:

Para $k_{20}^{(1)} = 0$, temos $\frac{s_i}{4} \left(\frac{\mu}{\delta_i^2} - 2\alpha_1 \right) = 0$, o que implica que $\alpha_{11}^+ = \frac{\mu}{2\delta_i^2}$. Substituindo esse valor na expressão de $k_{20}^{(2)}$, a equação $k_{20}^{(2)} = 0$ se torna

$$-\frac{s_i\alpha_2}{2} + \frac{s_i\mu}{4\delta_i^3} + \frac{\mu^2}{16\delta_i^4} = 0,$$

o que implica

$$\alpha_{12}^+ = \frac{\mu}{2\delta_i^3} \left(1 + \frac{s_i\mu}{4\delta_i} \right).$$

Substituindo os valores encontrados para α_1 e α_2 na expressão de $k_{20}^{(3)}$, encontramos o valor de α_{13}^+ . O processo pode ser repetido até a ordem desejada, obtendo assim as parametrizações dessas superfícies conforme descrito em (4.4) e (4.5). \square

As duas superfícies encontradas no Teorema 4.1 delimitam a região de instabilidade associada à ressonância $2\omega = 1$. O índice $i = 1$ está relacionado ao equilíbrio P_1 , enquanto o índice $i = 2$ está associado ao equilíbrio P_2 , como mostrado na Equação (3.5). A Figura 2 apresenta três seções planares da região de instabilidade associada ao equilíbrio P_1 . Elas foram obtidas pela interseção com os planos $\mu = 5$, $\mu = 30$ e $\mu = 50$, com $\delta = 4$. Já a Figura 3 está relacionada ao equilíbrio P_2 e mostra a interseção da região de instabilidade com os planos $\mu = 10$, $\mu = 400$ e $\mu = 800$, com $\delta = 10$.

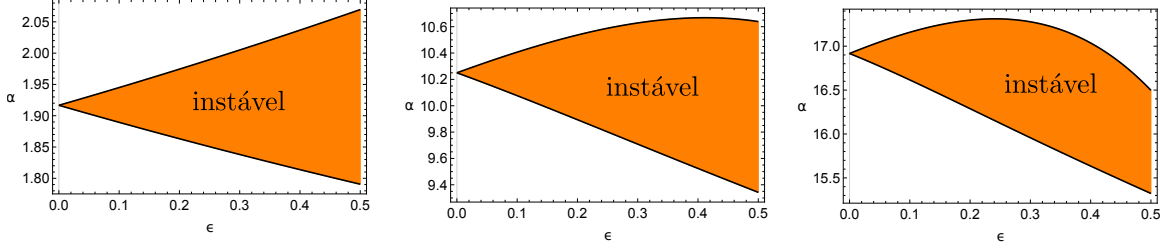


Figura 2: Respectivamente, seções planares $\mu = 5$, $\mu = 30$ e $\mu = 50$ para o equilíbrio P_1 com $\delta = 4$

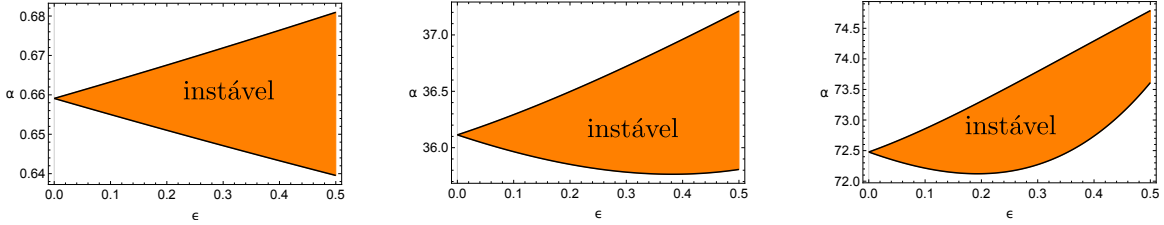


Figura 3: Respectivamente, seções planares $\mu = 10$, $\mu = 400$ e $\mu = 800$ para o equilíbrio P_2 com $\delta = 10$

Teorema 4.2. *As superfícies fronteiras que separam as regiões de estabilidade e instabilidade associadas à ressonância $2\omega = 2$ são parametrizadas por:*

$$\alpha^+ = -s_i + \frac{\mu}{\delta_i} + \alpha_{22}^+ \varepsilon^2 + \alpha_{24}^+ \varepsilon^4 + \mathcal{O}(\varepsilon^5), \quad (4.6)$$

$$\alpha^- = -s_i + \frac{\mu}{\delta_i} + \alpha_{22}^- \varepsilon^2 + \alpha_{24}^- \varepsilon^4 + \mathcal{O}(\varepsilon^5), \quad (4.7)$$

onde os coeficientes são dados por

$$\alpha_{22}^+ = \frac{\mu}{12\delta_i^4} (9\delta_i - 5\mu s_i),$$

$$\alpha_{22}^- = \frac{\mu}{12\delta_i^4} (3\delta_i + \mu s_i),$$

$$\alpha_{24}^+ = \frac{\mu}{3456s_i\delta_i^8} (2160s_i\delta_i^3 - 1989\delta_i^2\mu - 726s_i\delta_i\mu^2 + 763\mu^3),$$

$$\alpha_{24}^- = -\frac{\mu}{3456s_i\delta_i^8} (-432s_i\delta_i^3 - 315\delta_i^2\mu - 42s_i\delta_i\mu^2 + 5\mu^3).$$

Demonstração. Nesse caso, usando $N = 2$, obtemos que os coeficientes k_{20} e k_{02} são

dados por

$$\begin{aligned}
 k_{20}^{(1)} &= -\frac{s_i \alpha_1}{4} \\
 k_{20}^{(2)} &= -\frac{\alpha_1^2}{16} - \frac{s_i \alpha_2}{4} + \frac{3s_i \mu}{16\delta_i^3} - \frac{5\mu^2}{48\delta_i^4} \\
 k_{20}^{(3)} &= -\frac{\alpha_1 \alpha_2}{8} - \frac{s_i \alpha_1^3}{32} - \frac{s_i \alpha_3}{4} + \frac{5\alpha_1 \mu}{32\delta_i^3} - \frac{55s_i \alpha_1 \mu^2}{288\delta_i^4} \\
 k_{02}^{(1)} &= -\frac{s_i \alpha_1}{4} \\
 k_{02}^{(2)} &= -\frac{\alpha_1^2}{16} - \frac{s_i \alpha_2}{4} + \frac{s_i \mu}{16\delta_i^3} + \frac{\mu^2}{48\delta_i^4} \\
 k_{02}^{(3)} &= -\frac{\alpha_1 \alpha_2}{8} - \frac{s_i \alpha_1^3}{32} - \frac{s_i \alpha_3}{4} - \frac{\alpha_1 \mu}{32\delta_i^3} + \frac{s_i \alpha_1 \mu^2}{288\delta_i^4}.
 \end{aligned}$$

Então, as equações $k_{20} = 0$ e $k_{02} = 0$ nos fornecem, respectivamente, as superfícies dadas por (4.6) e (4.7). \square

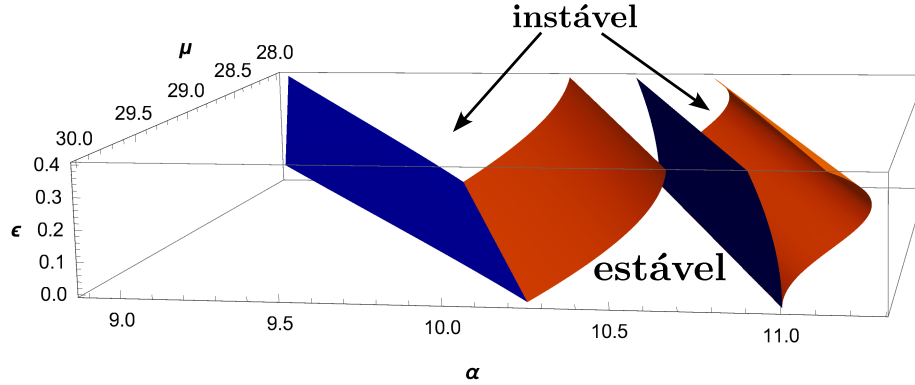


Figura 4: Superfícies dos casos $N = 1, 2$ para o equilíbrio P_1 com $\delta = 4$

A Figura 4 apresenta duas superfícies associadas às ressonâncias $2\omega = 1$ e $2\omega = 2$ do equilíbrio P_1 . Elas delimitam duas regiões de instabilidade e uma região de estabilidade quando $\delta = 4$. Por outro lado, a Figura 5 está relacionada às ressonâncias $2\omega = 1$ e $2\omega = 2$ do equilíbrio P_2 , e mostra duas regiões de instabilidade e uma região de estabilidade com $\delta = 10$.

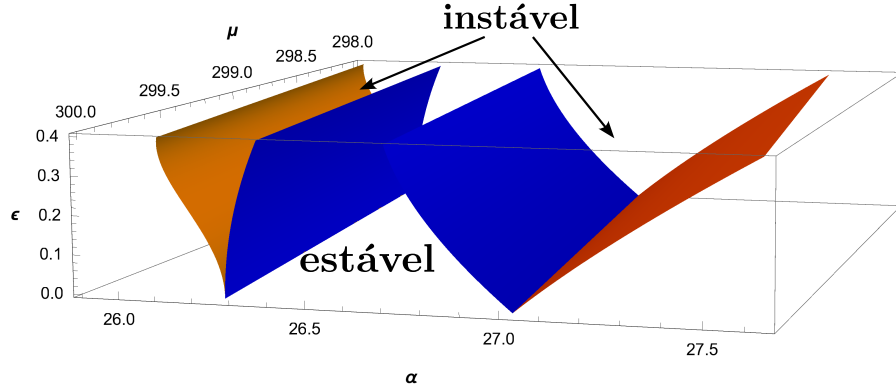


Figura 5: Superfícies dos casos $N = 1, 2$ para o equilíbrio P_2 com $\delta = 10$

Teorema 4.3. *As superfícies fronteiras que separam as regiões de estabilidade e instabilidade associadas à ressonância $2\omega = 3$ são parametrizadas por*

$$\alpha^+ = -\frac{9s_i}{4} + \frac{\mu}{\delta_i} + \alpha_{31}^+\varepsilon + \alpha_{32}^+\varepsilon^2 + \alpha_{33}^+\varepsilon^3 + \alpha_{34}^+\varepsilon^4 + \mathcal{O}(\varepsilon^5), \quad (4.8)$$

$$\alpha^- = -\frac{9s_i}{4} + \frac{\mu}{\delta_i} + \alpha_{31}^-\varepsilon + \alpha_{32}^-\varepsilon^2 + \alpha_{33}^-\varepsilon^3 + \alpha_{34}^-\varepsilon^4 + \mathcal{O}(\varepsilon^5), \quad (4.9)$$

onde

$$\begin{aligned} \alpha_{31}^+ &= 0, & \alpha_{32}^+ &= \frac{\mu}{16\delta_i^4}(8\delta_i - s_i\mu), \\ \alpha_{33}^+ &= \frac{\mu}{32\delta_i^6}(4\delta_i^2 - 4s_i\delta_i\mu + \mu^2) \\ \alpha_{34}^+ &= \frac{\mu}{5120\delta_i^8 s_i}(1920s_i\delta_i^3 - 608\delta_i^2\mu + 96s_i\delta_i\mu^2 - 13\mu^3) \\ \alpha_{31}^- &= \alpha_{31}^+, & \alpha_{32}^- &= \alpha_{32}^+, & \alpha_{34}^- &= \alpha_{34}^+ \\ \alpha_{33}^- &= -\frac{\mu}{32\delta_i^6}(4\delta_i^2 - 4s_i\delta_i\mu + \mu^2). \end{aligned}$$

Demonstração. Para $N = 3$, os coeficientes k_{20} e k_{02} são dados por

$$\begin{aligned}
 k_{20}^{(1)} &= -\frac{s_i \alpha_1}{6} \\
 k_{20}^{(2)} &= -\frac{\alpha_1^2}{54} - \frac{s_i \alpha_2}{6} + \frac{s_i \mu}{12\delta_i^3} - \frac{\mu^2}{96\delta_i^4} \\
 k_{20}^{(3)} &= -\frac{\alpha_1 \alpha_2}{27} - \frac{s_i \alpha_1^3}{243} - \frac{s_i \alpha_3}{6} + \frac{1}{6\delta_i^3} \left(\frac{s_i}{8\delta_i} + \frac{\alpha_1}{9} \right) \mu \\
 &\quad - \frac{1}{48\delta_i^4} \left(\frac{1}{\delta_i} + \frac{13s_i \alpha_1}{288} \right) \mu^2 + \frac{s_i \mu^3}{192\delta_i^6} \\
 k_{02}^{(1)} &= k_{20}^{(1)}, \quad k_{02}^{(2)} = k_{20}^{(2)}, \quad k_{02}^{(3)} = k_{20}^{(3)} - \frac{s_i \mu (s_i \mu - 2\delta_i)^2}{96\delta_i^6}.
 \end{aligned}$$

Das equações (4.3), obtemos os coeficientes α_j de (3.7) como nas equações (4.8) e (4.9). \square

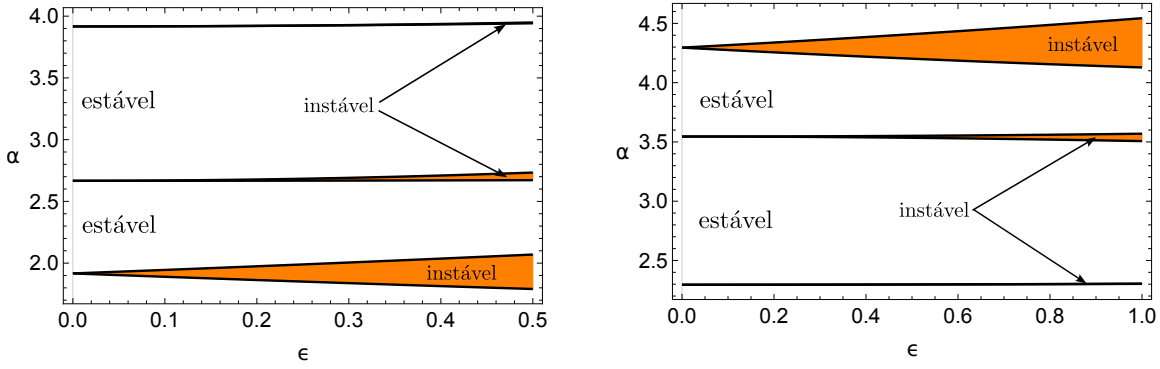


Figura 6: Seção planar $\mu = 5$ dos casos $N = 1, 2, 3$ para o equilíbrio P_1 com $\delta = 4$; Seção planar $\mu = 50$ dos casos $N = 1, 2, 3$ para o equilíbrio P_2 com $\delta = 10$.

Continuando o processo para inteiros $N > 3$, obtemos uma decomposição intercalada de regiões de estabilidade e instabilidade no espaço de parâmetros $(\mu, \alpha, \delta, \epsilon)$. Na Figura 6, apresentamos à esquerda essa decomposição relativa ao equilíbrio P_1 para $N = 1, 2$, e 3 , quando $\mu = 5$ e $\delta = 4$. À direita, apresentamos a decomposição para o equilíbrio P_2 para $N = 1, 2$, e 3 , quando $\mu = 50$ e $\delta = 10$.

5 Regiões de Estabilidade e Instabilidade para valores arbitrários de $\varepsilon > 0$: Análise Numérica

Na Seção 4 calculamos analiticamente as superfícies de fronteira separando as regiões de estabilidade e instabilidade para valores suficientemente pequenos de $\varepsilon > 0$. Na presente seção, utilizamos um método numérico, como descrito em [7, 13], para obtermos as regiões de estabilidade e instabilidade no espaço dos parâmetros para valores arbitrários de $\varepsilon > 0$. Esse método também foi utilizada no trabalho [3].

5.1 Descrição do método numérico

Seja $X(\tau)$ a matriz fundamental das soluções do sistema linear dado pelo Hamiltoniano (3.5) que satisfaz a condição $X(0) = I_2$, onde I_2 é a matriz identidade de ordem 2. Esse sistema é equivalente à equação diferencial de segunda ordem

$$\xi'' + s_i \left(\frac{\mu}{\delta_i - \varepsilon \cos \tau} - \alpha \right) \xi = 0. \quad (5.1)$$

Usando a notação

$$X(\tau) = \begin{pmatrix} x_{11}(\tau) & x_{12}(\tau) \\ x_{21}(\tau) & x_{22}(\tau) \end{pmatrix},$$

segue-se que $x_{11}(\tau)$ e $x_{12}(\tau)$ são soluções de (5.1) enquanto $x_{21}(\tau)$ e $x_{22}(\tau)$ são obtidos pelas igualdades $x_{21}(\tau) = x'_{11}(\tau)$ e $x_{22}(\tau) = x'_{12}(\tau)$. Então podemos calcular numericamente a matriz $X(2\pi)$ para cada valor dos parâmetros μ, α, δ e ε .

O método para obter as regiões de estabilidade e instabilidade no espaço dos parâmetros consiste em analisar a equação característica da matriz fundamental $X(2\pi)$ dada por

$$\rho^2 - 2a\rho + 1 = 0, \quad 2a = x_{11}(2\pi) + x_{22}(2\pi), \quad (5.2)$$

onde $|a| > 1$ implica que o equilíbrio é instável, enquanto $|a| < 1$ implica em estabilidade linear. Quando $|a| = 1$, obtemos a fronteira entre estabilidade e instabilidade, ou seja, obtemos as superfícies de fronteira que separam as regiões de estabilidade e instabilidade.

5.2 Aplicando o método

Calculamos numericamente as regiões de estabilidade e instabilidade para valores arbitrários de $\varepsilon > 0$, utilizando as mesmas condições usadas para os casos apresentados na Figura 6. Isso nos permite comparar os dois casos.

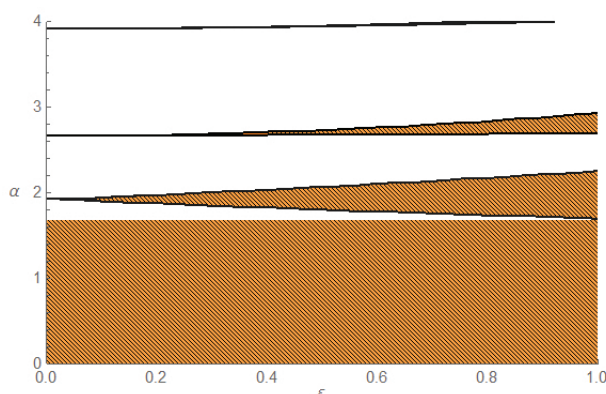


Figura 7: Seção planar calculada numericamente para $\mu = 5$, $\delta = 4$, $\alpha \in [0, 4]$ e $\varepsilon \in [0, 1]$ para o equilíbrio P_1 . A região hachurada é de instabilidade e a branca de estabilidade

Assim como na Figura 6, consideramos o equilíbrio P_1 com $\mu = 5$, $\delta = 4$, α variando em $[0, 4]$, e ε variando em $[0, 1]$. Os resultados obtidos estão apresentados na Figura 7. As regiões hachuradas em laranja representam as regiões de instabilidade, enquanto as regiões em branco indicam estabilidade. Na parte inferior da figura, podemos observar uma faixa horizontal associada aos valores de α no intervalo $[0, 1,6667]$, o que é consistente com a Proposição 2.1. De acordo com a proposição, o equilíbrio P_1 é instável para $\alpha < \mu/(\delta - 1) = 5/3 \approx 1,6667$. É importante notar que essa faixa não é visível na Figura 6 porque as superfícies foram calculadas apenas na região de estabilidade fornecida pela Proposição 2.1. As outras regiões de instabilidade, de baixo para cima, correspondem às seções planares associadas às ressonâncias $2\omega = 1$ ($\alpha = 1,9167$), $2\omega = 2$ ($\alpha = 2,6667$) e $2\omega = 3$ ($\alpha = 3,9167$).

No caso do equilíbrio P_2 , consideramos $\mu = 50$, $\delta = 10$, α variando no intervalo $[2, 5]$ e ε variando no intervalo $[0, 1]$. A Figura 8 apresenta os resultados dos nossos cálculos numéricos. De acordo com a Proposição 2.1, o equilíbrio é instável para $\alpha > \mu/(\delta + 1) = 50/11$, o que corresponde à faixa horizontal na parte superior da figura. As regiões de instabilidade abaixo dessa faixa representam as regiões de instabilidade associadas às ressonâncias $2\omega = 1$ ($\alpha = 4,2954$), $2\omega = 2$ ($\alpha = 3,5454$) e $2\omega = 3$ ($\alpha = 2,2954$).

6 Conclusão

Estudamos a estabilidade paramétrica de um pêndulo planar eletricamente carregado próximo a um fio horizontal de comprimento infinito que também está eletricamente carregado e sujeito a uma oscilação harmônica vertical. O problema depende de quatro

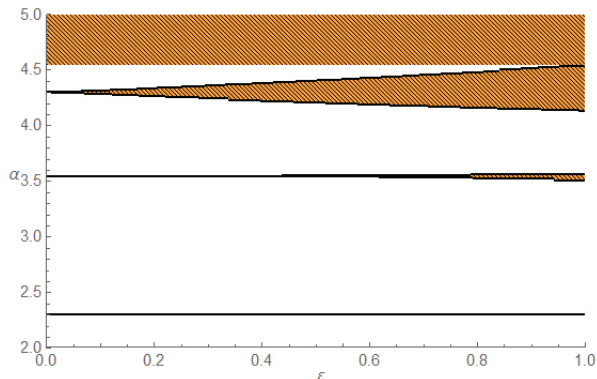


Figura 8: Seção planar calculada numericamente para $\mu = 50$, $\delta = 10$, $\alpha \in [2, 5]$ e $\varepsilon \in [0, 1]$ para o equilíbrio P_2 . A região hachurada é de instabilidade e a branca de estabilidade.

parâmetros adimensionais $(\mu, \alpha, \delta, \varepsilon)$. Quando $\mu = 0$, obtemos um pêndulo simples sem carga e sem oscilação no fio horizontal. Quando $\varepsilon = 0$ (e $\mu \neq 0$), obtemos um sistema autônomo que descreve o movimento de um pêndulo carregado sem oscilação no fio horizontal. Neste caso, determinamos as regiões de estabilidade dos equilíbrios no espaço dos parâmetros (μ, α, δ) . Em particular, concluímos que, para o pêndulo carregado, o equilíbrio estável P_1 do pêndulo simples torna-se instável quando $\mu > \alpha(\delta - 1) > 0$, enquanto que o equilíbrio instável P_2 do pêndulo simples torna-se estável quando $\mu > \alpha(\delta + 1) > 0$.

Para valores suficientemente pequenos de $\varepsilon > 0$, utilizamos o Teorema de Krein-Gelfand-Lidskii e o Método de Deprit-Hori para construir superfícies de fronteira que separam as regiões de instabilidade e estabilidade no espaço de parâmetros $(\mu, \alpha, \delta, \varepsilon)$. As expressões dessas superfícies foram calculadas analiticamente nos Teoremas 4.1, 4.2 e 4.3. Por outro lado, para valores arbitrários de $\varepsilon > 0$, utilizamos um método numérico para calcular as regiões de instabilidade e estabilidade no espaço dos parâmetros, cujos resultados foram apresentados nas Figuras 7 e 8. Com isso, obtivemos uma decomposição intercalada de regiões de estabilidade e instabilidade no espaço dos parâmetros.

Referências

- [1] Araujo, G. C., Cabral, H. E.: Parametric Stability in a $P + 2$ -Body Problem. J. Dyn Diff Equat. **30** (2018), 719-742 .

- [2] Araujo, G. C., Cabral, H. E.: Parametric Stability of a Charged Pendulum with an Oscillating Suspension Point. *Regular and Chaotic Dynamics*. **26** (2021), no. 1, 39-60 .
- [3] Bardin, B. S., Markeev, A. P.: The Stability of the Equilibrium of a Pendulum for Vertical Oscillations of the Point of Suspension. *J. App. Maths Mechs*. **59** (1995), no. 1, 879-886.
- [4] Boeck, T., Sanjari, S.L., and Becker, T., Parametric instability of a magnetic pendulum in the presence of a vibrating conducting plate. *Nonlinear Dyn*. **102** (2020), 2039-2056.
- [5] Cabral, E. H., Amorim, T. A.: Subharmonic Solutions of a Pendulum under Vertical Anharmonic Oscillations of the Point of Suspension. *Regular and Chaotic Dynamics*. **22** (2017), 782-791.
- [6] Cabral, H. E. Carvalho, A. C.: Parametric Stability of a Charged Pendulum with Oscillating Suspension Point. *Journal of Differential Equations*. **284** (2021), 23-38.
- [7] Chicone, C. *Ordinary Differential Equations with Applications*. New York: Springer-Verlag, 1999.
- [8] Dias, L. F. B., Cabral, H. E.: Parametric Stability in a Sitnikov-like Restricted P-body Problem. *Journal of Dynamics and Differential Equations*. **30** (2018), 81-82
- [9] Kamel, A.: Expansion formulae in canonical transformations depending on a small parameter. *Celest. Mech*. **1** (1969), 190-199.
- [10] Kapitsa, P. L.: The dynamic stability of a pendulum for an oscillating point of suspension, *Zh. Eksp. Teor. Fyz*. **21** (1951), no. 5, 588-598.
- [11] Kapitsa, P. L.: A pendulum with a vibrating suspension. *Uspekhi Fyz. Nauk*. **44** (1951), no. 1, 7-20.
- [12] Kholostova, O. V. Some problems of the motion of a pendulum when there are horizontal vibrations of the point of suspension. *J. Appl. Math Mechs*. **59** (1995), 553-561 .
- [13] Markeev, A. P. *Linear Hamiltonian Systems and Some Problems of Stability of the Satellite Center of Mass*. *Regular and Chaotics Dynamics*, Izhevsk (2009) (in Russian).

Menezes Neto, J. L. de; Carvalho, A. C.; Carvalho, R. F. L.

- [14] Siegel, C. L., Moser, J. K. *Lectures on Celestial Mechanics*. Springer-Verlag: New York, 1971.

Submetido em 03 de Março de 2023.

Aceito em 05 de Junho de 2023.