

**ANÁLISE DE UM PROBLEMA DE PERTURBAÇÃO SINGULAR VIA  
MÉTODO DAS EXPANSÕES EMPARELHADAS**

Douglas Machado da Silva  
Universidade Federal de Pelotas-UFPEL  
[doumach99@gmail.com](mailto:doumach99@gmail.com)

Leslie Darien Pérez Fernández  
Universidade Federal de Pelotas-UFPEL  
[leslie.fernandez@ufpel.edu.br](mailto:leslie.fernandez@ufpel.edu.br)

Alexandre Molter  
Universidade Federal de Pelotas-UFPEL  
[alexandre.molter@ufpel.edu.br](mailto:alexandre.molter@ufpel.edu.br)

Julián Bravo Castillero  
Universidad Nacional Autónoma de México-UNAM  
[julian@mym.iimas.unam.mx](mailto:julian@mym.iimas.unam.mx)

**Resumo**

Encontrar a solução exata para um modelo matemático pode se tornar uma tarefa difícil, ou até mesmo impossível. Desta forma é imprescindível que técnicas para aproximação de soluções sejam estudadas e empregadas toda vez que não seja possível obter soluções exatas. Neste artigo será considerada a teoria das perturbações para obter a solução de uma equação diferencial com perturbação singular, onde será mostrado que a abordagem padrão não fornece resultados satisfatórios. E portanto, uma nova abordagem se faz necessária, neste caso será empregado o chamado método das expansões emparelhadas.

**Palavras-chave:** Perturbação singular; Solução assintótica formal; Expansão assintótica; Emparelhamento assintótico

**Abstract**

Finding the exact solution to a mathematical model can become a difficult or even impossible task. Thus, it is essential that techniques for approximating solutions be studied and employed whenever it is not possible to obtain exact solutions. In this article the perturbation theory will be considered to obtain the solution of a differential equation with singular perturbation, where it will be shown that the standard approach does not provide satisfactory results. Therefore, a new approach is needed, in this case, the so-called method of matched asymptotic expansions will be used.

**Keywords:** Singular perturbation; Formal asymptotic solution; Asymptotic expansion; Asymptotic matching

## 1 Introdução

Soluções analíticas de modelos matemáticos são muitas vezes difíceis ou impossíveis de se obter, devido à não-linearidade, não-homogeneidade e em geral, suas condições de contorno. Assim, dada a importância de se entender e encontrar uma solução para estes modelos, se fazem necessárias ferramentas matemáticas para tal finalidade. Para isso, há inúmeras técnicas matemáticas, mas neste artigo, destaca-se o uso de um conjunto de técnicas oriundas da análise assintótica envolvendo um certo parâmetro pequeno. A esse conjunto de técnicas denomina-se teoria de perturbações [1, 6, 7].

As técnicas de perturbação têm como finalidade decompor a solução do problema original  $u^\varepsilon$  em uma sequência recorrente de problemas mais simples, envolvendo o parâmetro pequeno  $0 < \varepsilon \ll 1$ , normalmente chamado de parâmetro de perturbação. Com estes problemas mais simples, constrói-se uma solução assintótica formal  $u^{(\infty)}$  (SAF) [2] do problema para  $u^\varepsilon$ , a qual é expressa como uma série de potências de  $\varepsilon$ . E assim, obtém-se uma solução limite  $u_0$ , quando  $\varepsilon$  é suficientemente pequeno, a qual aproxima bem  $u^\varepsilon$ .

Sobre os tipos de perturbações, existem dois tipos: perturbação regular e perturbação singular. De forma geral, pode-se dizer que para um problema de perturbação regular, a solução aproximada para valores pequenos de  $\varepsilon$  tem um comportamento semelhante à solução limite, no sentido do cumprimento da equação diferencial e as condições iniciais e/ou contorno. E no caso em que não há essa semelhança, temos um problema de perturbação singular. Assim, a característica que os difere é que para problemas de perturbação singular, a natureza do problema se modifica à medida que o parâmetro pequeno  $\varepsilon$  diminui, enquanto que para problemas de perturbação regular, a natureza do problema se mantém.

No contexto de equações diferenciais, a característica principal que difere os tipos de perturbação é a presença do parâmetro  $\varepsilon$  acompanhando a derivada de maior ordem na equação diferencial, ocasionando assim, no descumprimento da condição inicial e/ou de contorno. Do ponto de vista físico, o surgimento de perturbações singulares está associado a regiões em que existem grandes mudanças no valor da variável dependente, onde este tipo de região é chamada de camada limite [3]. Portanto, para obter soluções satisfatórias em todo o domínio do problema, o estudo requer metodologias diferentes nestas regiões, dado que a abordagem padrão para o caso de perturbação regular (ou seja, tomando  $\varepsilon$  suficientemente pequeno) se mostra ineficiente. E para esta finalidade será utilizado o método de expansões emparelhadas [4, 8].

O método de expansões emparelhadas propõe a construção de soluções aproximadas da solução exata em cada região, nas quais uma é uma boa aproximação na região onde não há uma grande variação da variável dependente, chamada expansão exterior, e outra que é uma boa aproximação na camada limite, chamada expansão interior. E então, combina-se essas duas expansões através dos seus emparelhamentos, de forma que se obtenha uma expressão válida para todo o domínio.

Para apresentar estas metodologias de solução será resolvido um problema de Dirichlet singularmente perturbado, onde emprega-se o método das expansões emparelhadas. Será apresentado também uma outra solução que aproxima a solução exata do problema, obtida de considerar a expansão em série de Taylor do termo não homogêneo da equação diferencial.

## 2 Preliminares

**Definição 2.1.** (*Símbolo de ordem  $\mathcal{O}$  grande [2]*): Sejam o domínio  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , e o conjunto  $E \subset \mathbb{R}_+^*$  de valores do parâmetro  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon \ll 1$ . Seja  $B_\varepsilon$  o espaço normado das funções  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  com lei de formação  $x \mapsto f(x, \varepsilon)$  e norma  $\|f(x, \varepsilon)\|_{B_\varepsilon}$  definida para cada  $\varepsilon \in E$ . A notação  $f(x, \varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^N)$ ,  $N \in \mathbb{R}$ , quando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  na norma de  $B_\varepsilon$  é equivalente a afirmar que existem constantes  $A, \varepsilon_0 \in \mathbb{R}_+^*$  tais que  $\|f(x, \varepsilon)\|_{B_\varepsilon} \leq A\varepsilon^N$  para  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0 \ll 1$ .

**Definição 2.2.** (*Expansão assintótica (EA) [2]*): Sejam  $f, g_k : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , funções do espaço normado  $B_\varepsilon$  para cada  $\varepsilon \in E$ . A série infinita  $\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k g_k(x, \varepsilon)$  é uma expansão assintótica de  $f(x, \varepsilon)$  se, e somente se, para qualquer  $N \in \mathbb{N}$ , existe um número  $M_0$  tal que, se  $m > M_0$ , então

$$f(x, \varepsilon) - \sum_{k=0}^m \varepsilon^k g_k(x, \varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^N), \quad (2.1)$$

quando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  na norma de  $B_\varepsilon$ . Notação:  $f(x, \varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k g_k(x, \varepsilon)$ .

**Definição 2.3.** (*Solução assintótica formal (SAF) [2]*): Sejam  $B_{1\varepsilon}$ ,  $B_{2\varepsilon}$  espaços normados,  $f \in B_{2\varepsilon}$  e  $L^\varepsilon : B_{1\varepsilon} \rightarrow B_{2\varepsilon}$  um operador para cada  $\varepsilon$ . Seja  $u^\varepsilon \in B_{1\varepsilon}$  a solução exata da equação

$$L^\varepsilon u^\varepsilon = f. \quad (2.2)$$

Uma solução assintótica formal de (2.2) é uma série infinita, não necessariamente convergente,

$$u^{(\infty)}(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k g_k(x, \varepsilon), \quad g_k \in B_{1\varepsilon}, \quad (2.3)$$

tal que para qualquer  $N \in \mathbb{N}$  existe um número  $M$  para o qual a relação

$$L^\varepsilon u^{(m)} - f = \mathcal{O}(\varepsilon^N), \quad (2.4)$$

em que

$$u^{(m)}(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^m \varepsilon^k g_k(x, \varepsilon), \quad (2.5)$$

é válida para todo  $m > M$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  na norma de  $B_{2\varepsilon}$ .

**Proposição 2.4** (Condição suficiente para uma SAF ser EA da solução exata [2]). *Seja  $L^\varepsilon$  o operador em (2.2). Se  $L^\varepsilon$  é linear e existem constantes  $A_1 \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $A_2 \in \mathbb{R}^*$  independentes de  $\varepsilon$ , tais que  $\|u^\varepsilon\|_{B_{1\varepsilon}} \leq A_1 \varepsilon^{A_2} \|f\|_{B_{2\varepsilon}}$ , então a SAF (2.3) é uma EA da solução exata  $u^\varepsilon$ .*

A demonstração pode ser encontrada em Bakhvalov e Panasenko [2].

### 3 Resultados Principais

Este espaço destina-se a apresentar o problema, onde primeiramente mostra-se que a abordagem via teoria de perturbação regular é ineficaz, sendo assim necessária uma outra abordagem. Tendo isso em vista, propõe-se duas metodologias alternativas: série de Taylor e emparelhamento assintótico. Vale ressaltar que estas diferentes metodologias são empregadas na construção de SAF's conforme (2.3) da solução exata do problema.

#### 3.1 Formulação do problema

Para cada  $0 < \varepsilon \ll 1$ , procura-se uma SAF da solução exata  $u^\varepsilon \in C^1(\mathbb{R}_+)$ , em que  $u^\varepsilon(t) = u(t, \varepsilon)$ , do problema de perturbação singular adimensional

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{du^\varepsilon}{dt} + u^\varepsilon = e^t, t \in \mathbb{R}_+^* \\ u^\varepsilon(0) = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Tem-se que para cada  $\varepsilon$ , a solução exata do problema em (3.1) será dada por

$$u^\varepsilon(t) = \frac{e^t - e^{-t/\varepsilon}}{1 + \varepsilon} . \quad (3.2)$$

Este problema é um caso particular do Exemplo 3.1, pp.5-8, de [5].

### 3.2 Perturbação regular

Procurando uma SAF do problema em (3.1), de acordo com (2.4) e (2.5) e observando que  $B_{1\varepsilon} = C^1(\mathbb{R}_+^*)$ ,  $B_{2\varepsilon} = C(\mathbb{R}_+^*)$ ,  $f(t) = e^t$ , e que neste caso o operador é dado por

$$L^\varepsilon = \varepsilon \frac{d}{dt} + 1 , \quad (3.3)$$

tem-se

$$\begin{aligned} L^\varepsilon u^{(m)} - f &= \varepsilon \frac{du^{(m)}}{dt} + u^{(m)} - e^t \\ &= \varepsilon \frac{d}{dt} \left[ \sum_{k=0}^m \varepsilon^k g_k(t) \right] + \sum_{k=0}^m \varepsilon^k g_k(t) - e^t \\ &= \sum_{k=0}^m g'_k(t) \varepsilon^{k+1} + \sum_{k=0}^m \varepsilon^k g_k(t) - e^t \\ &= (g_0(t) - e^t) \varepsilon^0 + \sum_{k=1}^m (g'_{k-1}(t) + g_k(t)) \varepsilon^k + g'_m(t) \varepsilon^{m+1} , \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde deve-se encontrar as funções  $g_k(t)$  que garantam as condições de existência de uma SAF, conforme a Definição 2.3.

Como  $g'_m(t) \in B_{1\varepsilon}$ , em particular tem-se que  $g'_m(t) \in B_{2\varepsilon}$ . Logo,  $g'_m(t)$  se mantém limitada em qualquer intervalo da forma  $[0, T]$ ,  $T > 0$ , portanto,  $\|g'_m(t)\|_{B_{2\varepsilon}} \leq A$ . Então, tem-se que  $g'_m(t) \varepsilon^{m+1} = \mathcal{O}(\varepsilon^{m+1})$ . Assim, para que  $L^\varepsilon u^{(m)} - f = \mathcal{O}(\varepsilon^N)$  com  $N = m + 1$ , é suficiente que as funções  $g_k(t)$  em (3.4) cumpram as condições

$$\varepsilon^0 : g_0(t) - e^t = 0, \quad \varepsilon^k : g'_{k-1}(t) + g_k(t) = 0, \quad k \in \{1, 2, \dots, m\} ,$$

ou seja, basta que todos os coeficientes até a ordem  $\varepsilon^m$  se anulem.

Assim, note que

$$g_k(t) = (-1)^k e^t, \quad k \in \{1, 2, \dots, m\} .$$

No entanto, a SAF para o problema em (3.1) teria a forma

$$u^{(\infty)}(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} (-\varepsilon)^k e^t . \quad (3.5)$$

Note que qualquer truncamento de (3.5) satisfaz a equação diferencial em (3.1) quando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . De fato,

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{du^{(m)}}{dt} + u^{(m)} &= \varepsilon \frac{d}{dt} \left[ \sum_{k=0}^m (-\varepsilon)^k e^t \right] + \sum_{k=0}^m (-\varepsilon)^k e^t \\ &= \varepsilon \sum_{k=0}^m (-\varepsilon)^k e^t + \sum_{k=0}^m (-\varepsilon)^k e^t = (1 + \varepsilon) \sum_{k=0}^m (-\varepsilon)^k e^t \\ &= (1 + \varepsilon) e^t + (1 + \varepsilon) \sum_{k=1}^m (-\varepsilon)^k e^t \rightarrow e^t , \end{aligned}$$

quando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . No entanto, observa-se que nenhum truncamento desta série satisfaz a condição inicial de (3.1), mesmo considerando  $\varepsilon$  suficientemente pequeno, já que

$$u^{(\infty)}(0, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k e^0 = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \rightarrow 1 , \quad (3.6)$$

quando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , o que mostra que a expressão em (3.5) não reproduz o comportamento da solução do problema (3.1). Na Figura 1 encontra-se a representação gráfica deste fato, para  $\varepsilon = 0,01$  e os truncamentos de ordem  $\varepsilon^0$  e  $\varepsilon^1$  da série em (3.5).

Portanto, percebe-se que a abordagem padrão via perturbação regular não fornece resultados satisfatórios, sendo assim, necessária uma outra abordagem.

### 3.3 Construção da SAF via expansão por série de Taylor

Fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , obtém-se da equação diferencial em (3.1) a seguinte equação funcional algébrica

$$u^0(t) = e^t, \quad (3.7)$$

a qual não satisfaz a condição inicial em (3.1). Isso decorre do fato de que o problema em (3.1) é um problema de perturbação singular. Note que (3.7) é o truncamento de ordem  $\varepsilon^0$  da SAF em (3.5), ou seja,  $u^{(0)}(t, \varepsilon) = u^0(t)$ .

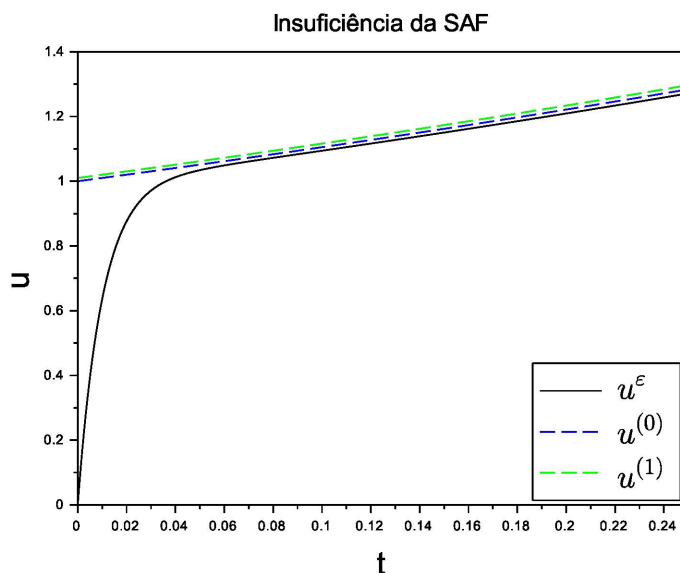


Figura 1: Gráficos para a solução exata  $u^\varepsilon$  e as SAF's  $u^{(0)}$  e  $u^{(1)}$ .

Temos que para  $t$  suficientemente grande, a expressão em (3.7) aproxima bem a solução exata em (3.2) para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno. De fato, quando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , tem-se de (3.2)

$$u^\varepsilon(t) = \frac{e^t - e^{-t/\varepsilon}}{1 + \varepsilon} \longrightarrow e^t.$$

Mas note que da Figura 1 e (3.6) tem-se que a expressão em (3.7) não aproxima bem a solução exata na vizinhança de  $t = 0$ . No entanto, deve-se encontrar uma SAF que aproxime bem tanto na vizinhança de  $t = 0$ , quando para  $t$  suficientemente grande. Para tentar encontrar tal SAF, considera-se uma transformação que dilata a variável  $t$  na vizinhança de  $t = 0$ . Assim, considera-se uma nova variável independente

$$\tau = \frac{t}{\varepsilon}. \tag{3.8}$$

Com essa mudança, introduz-se uma nova incógnita  $v^\varepsilon(\tau) = u^\varepsilon(\varepsilon\tau)$ . Assim, pela regra da cadeia tem-se

$$\frac{du^\varepsilon}{dt} = \frac{dv^\varepsilon}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{dv^\varepsilon}{d\tau},$$

e o problema em (3.1) transforma-se no seguinte problema de perturbação regular

$$\begin{cases} \frac{dv^\varepsilon}{d\tau} + v^\varepsilon = e^{\varepsilon\tau}, \tau \in \mathbb{R}_+^* \\ v^\varepsilon(0) = 0. \end{cases} \quad (3.9)$$

Procura-se uma SAF para o problema em (3.9) da forma (2.3), de acordo com (2.4) e (2.5), mas agora em relação à variável  $\tau$  e com coeficientes  $v_k(\tau)$ . Neste caso,  $B_{1\varepsilon} = C^1(\mathbb{R}_+^*)$ ,  $B_{2\varepsilon} = C(\mathbb{R}_+^*)$ ,  $f(\tau) = e^{\varepsilon\tau}$  e o operador é da forma

$$L = \frac{d}{d\tau} + 1. \quad (3.10)$$

Considera-se também a expansão pela série de Taylor com Resto Infinitesimal do termo à direita de (3.9), em torno do 0 e em relação a  $\varepsilon$ . Ou seja, escrevendo

$$e^{\varepsilon\tau} = \sum_{k=0}^m \frac{(\varepsilon\tau)^k}{k!} + \frac{1}{(m+1)!} \frac{\partial^{m+1}(e^{\varepsilon\tau})}{\partial \varepsilon^{m+1}} \Big|_{\varepsilon=\eta} \varepsilon^{m+1} = \sum_{k=0}^m \frac{(\varepsilon\tau)^k}{k!} + \tau^{m+1} e^{\tau\eta} \varepsilon^{m+1}, \eta \in (0, \varepsilon).$$

Fazendo  $Lu^{(m)} - f$ , obtém-se

$$\begin{aligned} Lu^{(m)} - f &= \frac{d}{d\tau} \left[ \sum_{k=0}^m \varepsilon^k v_k(\tau) \right] + \sum_{k=0}^m \varepsilon^k v_k(\tau) - \sum_{k=0}^m \frac{(\varepsilon\tau)^k}{k!} - \tau^{m+1} e^{\tau\eta} \varepsilon^{m+1} \\ &= \sum_{k=0}^m \left( v'_k(\tau) + v_k(\tau) - \frac{\tau^k}{k!} \right) \varepsilon^k - \tau^{m+1} e^{\tau\eta} \varepsilon^{m+1}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Como  $\tau^{m+1} e^{\tau\eta} \in B_{2\varepsilon}$ , para todo intervalo da forma  $[0, \xi]$ , com  $\xi > 0$  tem-se que  $\|\tau^{m+1} e^{\tau\eta}\|_{B_{2\varepsilon}} \leq A$ , para algum  $A \in \mathbb{R}_+^*$ .

Portanto,  $\tau^{m+1} e^{\tau\eta} \varepsilon^{m+1} = \mathcal{O}(\varepsilon^{m+1})$ . Assim, para que  $L^\varepsilon u^{(m)} - f = \mathcal{O}(\varepsilon^N)$  com  $N = m + 1$ , é suficiente que as funções  $v_k(\tau)$  em (3.11) cumpram as condições

$$\varepsilon^k : v'_k(\tau) + v_k(\tau) = \frac{\tau^k}{k!}, \quad k \in \{0, 1, 2, \dots, m\}. \quad (3.12)$$

Para finalizar a construção da SAF, deve-se considerar a condição inicial em (3.9), da seguinte forma

$$v^{(m)}(0, \varepsilon) = \sum_{k=0}^m \varepsilon^k v_k(0) = v_0(0) + \sum_{k=1}^m \varepsilon^k v_k(0) = 0 + \sum_{k=1}^m \varepsilon^k \cdot 0, \quad (3.13)$$



fornecendo as condições iniciais  $v_k(0) = 0$  para  $k \in \{0, 1, \dots, m\}$ , onde juntamente com as equações em (3.12), definem a sequência recorrente de problemas de valores iniciais para os coeficientes  $v_k$  das potências de  $\varepsilon$  da SAF do problema (3.9)

$$\varepsilon^k : \begin{cases} v'_k(\tau) + v_k(\tau) = \frac{\tau^k}{k!} , k \in \{0, 1, 2, \dots, m\} . \\ v_k(0) = 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

Assim, de (3.14) segue que

$$v_0(\tau) = 1 - e^{-\tau} , \quad v_k(\tau) = \sum_{n=0}^k (-1)^{k-n} \frac{\tau^n}{n!} . \quad (3.15)$$

A obtenção de (3.15) encontra-se no Apêndice.

Portanto, obtém-se a seguinte expressão para a SAF do problema (3.9)

$$v^{(\infty)}(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(\tau) = 1 - e^{-\tau} + \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{n=0}^k (-1)^{k-n} \frac{\tau^n}{n!} \right) \varepsilon^k . \quad (3.16)$$

Finalmente, voltando para a variável original, de acordo com (3.8), encontra-se a seguinte expressão para a SAF do problema em (3.1)

$$u_1^{(\infty)}(t, \varepsilon) = 1 - e^{-t/\varepsilon} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^k \frac{(-\varepsilon)^{k-n} t^n}{n!} , \quad (3.17)$$

em que o subíndice 1 foi utilizado para diferenciar da SAF em (3.5) obtida via perturbação regular na subseção anterior.

Note que a SAF em (3.17) não cumpre a condição inicial em (3.1) de forma exata, senão assintoticamente quando  $\varepsilon$  decresce para 0. Com efeito,

$$u_1^{(\infty)}(0, \varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} (-\varepsilon)^k \rightarrow 0 . \quad (3.18)$$

Então a SAF em (3.17) é uma boa aproximação da solução exata em (3.2) na vizinhança de  $t = 0$  apenas para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno.

Por outro lado, note que novamente para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno

$$u_1^{(\infty)}(t, 0^+) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = e^t , \quad (3.19)$$

ou seja, a SAF em (3.17) reproduz o comportamento da solução exata em (3.2) apenas para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno.

Assim, a SAF construída para o problema (3.1) aproxima bem a solução exata em todo domínio de  $t$  para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno. De fato, utilizando (3.2) e (3.19) tem-se que

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} |u^\varepsilon(t) - u_1^{(\infty)}(t, \varepsilon)| &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left| \frac{e^t - e^{-t/\varepsilon}}{1 + \varepsilon} - 1 + e^{-t/\varepsilon} - \sum_{k=1}^{\infty} \left( \sum_{n=0}^k \frac{(-\varepsilon)^{k-n} t^n}{n!} \right) \right| \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + \varepsilon} \left| e^t - e^{-t/\varepsilon} + (1 + \varepsilon) \left[ -1 + e^{-t/\varepsilon} - \sum_{k=1}^{\infty} \left( \sum_{n=0}^k \frac{(-\varepsilon)^{k-n} t^n}{n!} \right) \right] \right| \\ &= \left| e^t - 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \right| = |e^t - e^t| = 0. \end{aligned}$$

Tomando as SAF's  $u_1^{(1)}$ ,  $u_1^{(2)}$ ,  $u_1^{(3)}$  e  $u_1^{(4)}$  em (3.17), tem-se as seguintes expressões

$$\begin{aligned} u_1^{(1)} &= 1 - e^{-t/\varepsilon} + t - \varepsilon \\ u_1^{(2)} &= -e^{-t/\varepsilon} + \varepsilon^2 + (1 - \varepsilon)(1 + t) + \frac{t^2}{2!} \\ u_1^{(3)} &= -e^{-t/\varepsilon} + \varepsilon^2(1 + t) - \varepsilon^3 + \left( 1 + t + \frac{t^2}{2!} \right) (1 - \varepsilon) + \frac{t^3}{3!} \\ u_1^{(4)} &= -e^{-t/\varepsilon} + \varepsilon^4 + \left( 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} \right) (1 - \varepsilon) + \varepsilon^2 \left( 1 + t + \frac{t^2}{2!} \right) - \varepsilon^3(1 + t) + \varepsilon^4 + \frac{t^4}{4!} \end{aligned}$$

Segue na Figura 2 a representação gráfica destas SAF's, juntamente com a solução exata. Note que para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno, a aproximação tende a melhorar com o aumento da quantidade de termos no truncamento, mas mesmo para  $\varepsilon$  muito pequeno a aproximação só é boa para valores pequenos de  $t$ .

### 3.4 Construção da SAF via emparelhamento assintótico

Embora obteve-se uma aproximação da solução exata, dada por (3.17), esta requer uma grande quantidade de termos no truncamento e que  $\varepsilon$  seja muito pequeno, o que, em termos práticos e computacionais, não é muito eficiente. Assim, deve-se encontrar uma outra SAF do problema (3.1) que aproxime bem a solução exata em (3.2), mas que em questão de praticidade, seja melhor que a expressão em (3.17). Para isso, utiliza-se o método das expansões emparelhadas.

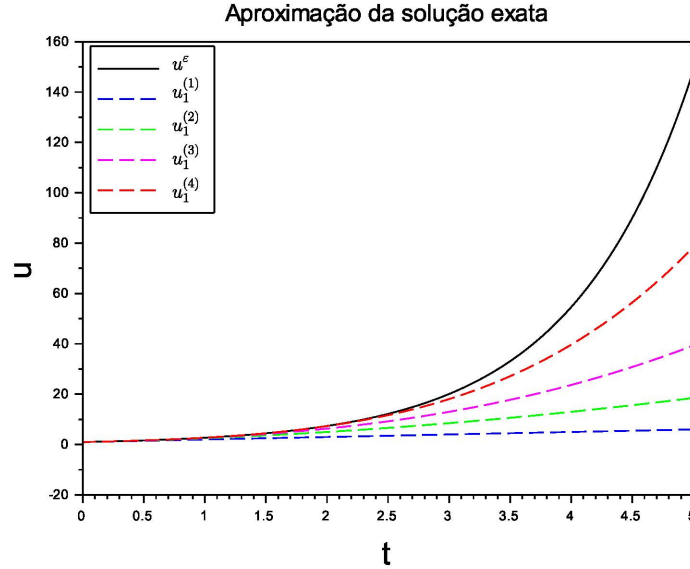


Figura 2: Gráficos para os truncamentos de  $u_1^{(\infty)}$  com  $\varepsilon = 10^{-4}$ .

Já mostrou-se que a expressão em (3.7) aproxima bem a solução exata para  $t$  suficientemente grande, mas não é uma boa aproximação na vizinhança de  $t = 0$ . Assim, (3.7) é chamada de expansão exterior e a denota-se por  $u_0(t)$ .

O método das expansões emparelhadas propõe o emparelhamento com outra expansão, chamada expansão interior, que seja boa na vizinhança de  $t = 0$ . Para isso, considera-se a mesma transformação na variável independente feita em (3.8), obtendo-se novamente, o problema em (3.9).

Considera-se os mesmos espaços  $B_{1\varepsilon}$  e  $B_{2\varepsilon}$  para obter a SAF de (3.9) pela expansão em Taylor,  $f(\tau) = e^{\varepsilon\tau}$  e o operador dado em (3.10). No entanto para esta SAF não utiliza-se a representação em Taylor da função  $f$ .

Procedendo de forma análoga à feita anteriormente, obtém-se a seguinte expressão

$$Lu^{(m)} - f = (v'_0(\tau) + v_0(\tau) - e^{\varepsilon\tau}) \varepsilon^0 + \sum_{k=1}^{m-1} (v'_k(\tau) + v_k(\tau)) \varepsilon^k + (v'_m(\tau) + v_m(\tau)) \varepsilon^m ,$$

onde para garantir a existência da SAF conforme (2.4) e que os truncamentos satisfaçam a condição inicial em (3.9), obtém-se fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , as seguintes condições para os

coeficientes da SAF

$$\varepsilon^0 : \begin{cases} v_0'(\tau) + v_0(\tau) = 1 \\ v_0(0) = 0 \end{cases}, \quad \varepsilon^k : \begin{cases} v_k'(\tau) + v_k(\tau) = 0 \\ v_k(0) = 0 \end{cases}, k \in \{1, \dots, m-1\}. \quad (3.20)$$

Note que para os coeficientes  $v_k$ ,  $k > 0$ , tem-se uma equação homogênea com condições iniciais também homogêneas. Assim,  $v_k \equiv 0$ , para  $k > 0$ . Portanto, para esta SAF do problema em (3.9), tem-se apenas o termo  $v_0$ , cuja expressão, com base em (3.20), será dada por

$$v_0(\tau) = 1 - e^{-\tau},$$

a partir do qual, voltando para a variável original obtém-se

$$v_0^\varepsilon(t) \equiv v_0\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) = 1 - e^{-t/\varepsilon}. \quad (3.21)$$

Note que a expressão em (3.21) satisfaz a condição inicial em (3.1)  $v_0^\varepsilon(0) = 0$ , para todo  $\varepsilon$ . Assim, a expressão em (3.21) é chamada expansão interior.

Com a expansão exterior dada em (3.7) que aproxima bem a solução exata para  $t$  suficientemente grande e a expansão interior dada em (3.21) que aproxima bem a solução exata na vizinhança de  $t = 0$ , propõe-se uma expansão composta  $u_c^\varepsilon(t)$  formada pela superposição de ambas as expansões corrigida pelo emparelhamento delas

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u_0(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} v_0^\varepsilon(t) = 1,$$

isto é

$$u_c^\varepsilon(t) = u_0(t) + v_0^\varepsilon(t) - \lim_{t \rightarrow 0^+} u_0(t) = u_0(t) + v_0^\varepsilon(t) - \lim_{t \rightarrow +\infty} v_0^\varepsilon(t).$$

Portanto

$$u_c^\varepsilon(t) = e^t - e^{-t/\varepsilon}. \quad (3.22)$$

Note que a expressão em (3.22) satisfaz a condição inicial em (3.1) e aproxima bem a solução exata em todo o domínio para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno, conforme mostra a Figura 3.

A partir da Figura 3 pode-se observar que de fato a expansão composta aproxima melhor a solução exata na medida que  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . Mas, pode-se mostrar analiticamente que isso de fato ocorre, já que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} |u^\varepsilon(t) - u_c^\varepsilon(t)| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left| \frac{e^t - e^{-t/\varepsilon}}{1 + \varepsilon} - e^t + e^{-t/\varepsilon} \right| = 0. \quad (3.23)$$

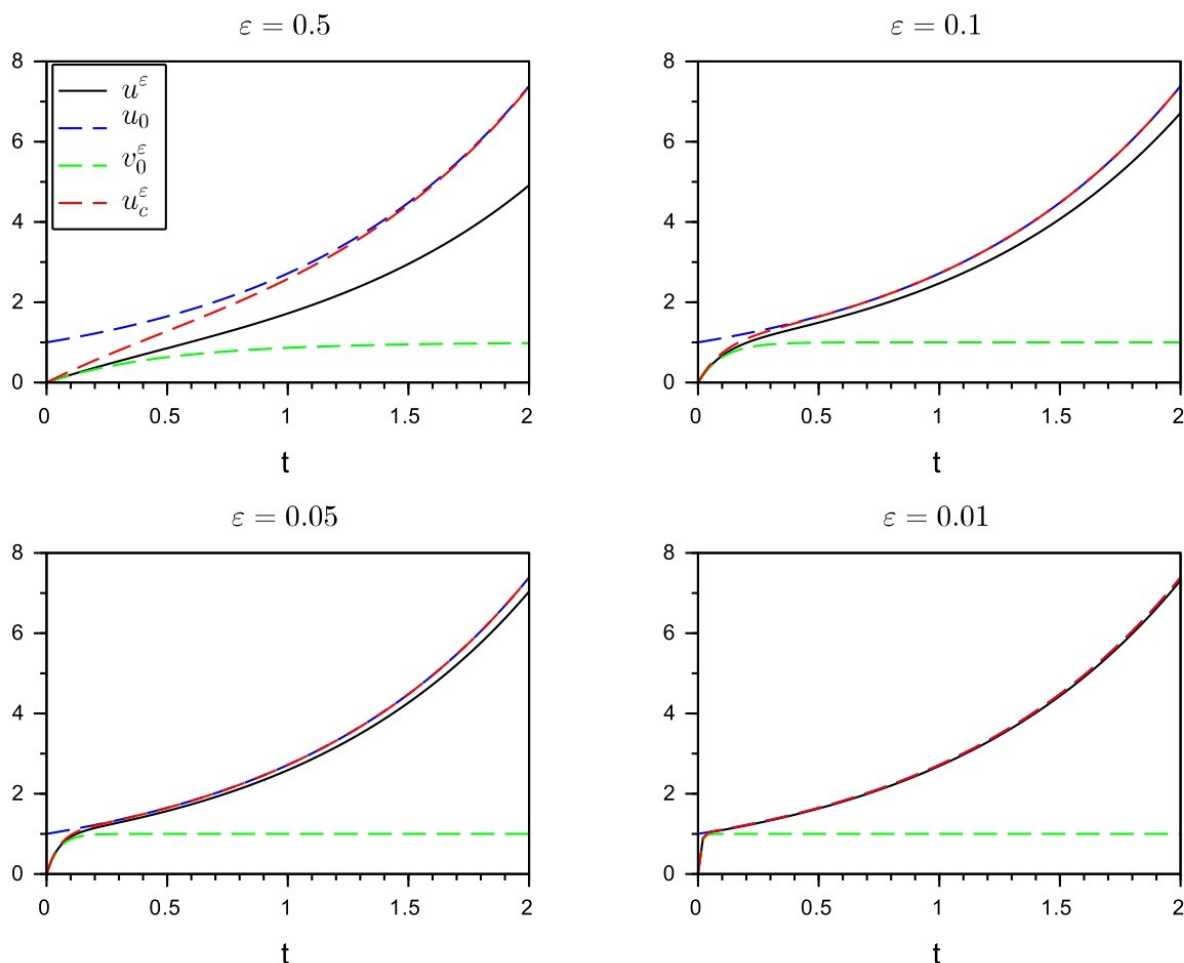


Figura 3: Comparação dos comportamentos da expansão interior  $v_0^\epsilon(t)$ , a expansão exterior  $u_0(t)$  e a solução exata  $u^\epsilon(t)$  para valores decrescentes de  $\epsilon$ .

Assim, foi obtido uma aproximação da solução exata do problema, que é boa tanto na vizinhança de  $t = 0$ , quanto para  $t$  suficientemente grande. Mas isso não é por acaso, já que os operadores em (3.3) e (3.10) são operadores lineares. Logo, como cada expansão (exterior e interior) foi obtida a partir de um destes operadores, segue da Proposição 2.4 que para cada região onde determinada expansão aproxima bem a solução exata, esta é um truncamento de uma EA da solução exata do problema em (3.1). E portanto, o emparelhamento destas expansões é também um truncamento de uma EA da solução exata.

## 4 Conclusões

Note que foi obtido duas boas aproximações para a solução exata do problema, a saber, as SAFs construídas via série de Taylor (3.17) e emparelhamento assintótico (3.22), respectivamente, as quais ao contrário da SAF construída via perturbação regular (3.5) cumprem a condição inicial do problema original. Em relação a SAF em (3.22), tem-se que esta aproxima muito bem a solução exata e sua expressão é muito mais simples. No entanto, obter tal aproximação requer a construção de duas SAFs e o emparelhamento de soluções que sejam boas em determinada parte do domínio.

Em relação a SAF em (3.17), temos que seu método de obtenção é mais simples, dado o fato de que só é preciso encontrar uma SAF, dilatando a variável temporal. No entanto, diferentemente da SAF em (3.22), esta requer uma grande quantidade de termos no truncamento para fornecer uma boa aproximação, o que segue de (3.19). Vale ressaltar que na prática, utilizando a SAF em (3.17), a função  $e^t$  é aproximada por seus polinômios de Taylor.

Portanto, ilustrou-se o fato de que o método das expansões emparelhadas é de grande utilidade para problemas que envolvem perturbações singulares, visto que frente ao método de Taylor, este se mostrou com uma expressão analítica muito mais simples e com uma convergência na norma do espaço das funções contínuas da solução exata muito mais rápida, na medida que o parâmetro pequeno  $\varepsilon$  decresce.

## Apêndice

Aqui será apresentada, de forma detalhada a obtenção dos coeficientes encontrados em (3.15) para  $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ . De (3.14) segue que a solução geral para os coeficientes  $v_k$  será dada por

$$v_k(\tau) = \frac{e^{-\tau}}{k!} \int e^{\tau} \tau^k d\tau + C .$$

Será mostrado por indução matemática que

$$\int e^{\tau} \tau^k d\tau = e^{\tau} \left[ \sum_{n=0}^k (-1)^{k-n} \frac{k!}{n!} \tau^n \right] + C .$$

Para  $k = 1$ , tem-se que

$$\begin{aligned}\int e^\tau \tau d\tau &= \tau e^\tau - \int e^\tau d\tau + C \\ &= (\tau - 1)e^\tau + C \\ &= e^\tau(-1 + \tau) + C \\ &= e^\tau \left[ \sum_{n=0}^1 (-1)^{1-n} \frac{1}{n!} \tau^n \right] + C .\end{aligned}$$

Assim, supõe-se que a afirmação é válida para  $k = m$ . Logo, para  $m + 1$

$$\begin{aligned}\int e^\tau \tau^{m+1} d\tau &= e^\tau \tau^{m+1} - (m + 1) \int e^\tau \tau^m d\tau \\ &= e^\tau \tau^{m+1} - (m + 1) \left( e^\tau \left[ \sum_{n=0}^m (-1)^{m-n} \frac{m!}{n!} \tau^n \right] + C \right) \\ &= e^\tau \tau^{m+1} + e^\tau \left[ \sum_{n=0}^m (-1)^{m+1-n} \frac{(m + 1)!}{n!} \tau^n \right] + C_1 \\ &= e^\tau \left[ \sum_{n=0}^m (-1)^{m+1-n} \frac{(m + 1)!}{n!} \tau^n + (-1)^{m+1-(m+1)} \frac{(m + 1)!}{(m + 1)!} \tau^{m+1} \right] + C_1 \\ &= e^\tau \left[ \sum_{n=0}^{m+1} (-1)^{m+1-n} \frac{(m + 1)!}{n!} \tau^n \right] + C_1 .\end{aligned}$$

Portanto, a afirmação vale para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Assim, a solução geral para os coeficientes  $v_k$  será dada por

$$v_k(\tau) = \sum_{n=0}^k (-1)^{k-n} \frac{\tau^n}{n!} + \frac{e^{-\tau} C_1}{k!} ,$$

onde da condição inicial em (3.14), obtém-se a expressão em (3.15).

## Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio financeiro da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de financiamento 001 (DMS), e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq via Projeto Universal N<sup>o</sup> 402857/2021-6 (LDPF, JBC). Os autores agradecem também os comentários e sugestões dos revisores.

## Referências

- [1] Nayfeh, Ali H. *Introduction to Perturbation Techniques*. 1.ed. New York: Wiley, 1993.
- [2] Bakhvalov, Nikolai S.; Panasenko, Grigori P. *Homogenization: Averaging Processes in Periodic Media*. 1.ed. Dordrecht: Kluwer, 1989.
- [3] Rocha, Fabio C. Introdução à Técnica de Camada Limite. *Cad. Eng. Estrut.* **12** (2010), no. 55, 37-50.
- [4] Lagerstrom, Paco A. *Matched Asymptotic Expansions: Ideas and Techniques*. 1.ed. New York: Springer-Verlag, 1988.
- [5] Sanchez-Hubert, Jacqueline; Sanchez-Palencia, Évariste. *Introduction aux Méthodes Asymptotiques et à l'Homogénéisation: Application à la Mécanique des Milieux Continus*. 1.ed. Paris: Masson, 1992.
- [6] Bender, Carl M; Orszag, Steven A. *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers I : Asymptotic Methods and Perturbation Theory*. 10.ed. New York: Springer, 1999.
- [7] Holmes, Mark H. *Introduction to Perturbation Methods*. 2.ed. New York: Springer, 2013
- [8] O'Malley, Robert E. *The Method of Matched Asymptotic Expansions and Its Generalizations*. 1.ed. Cham: Springer, 2014.

**Recebido em 28 de Julho de 2023.**  
**1<sup>a</sup> Revisão em 15 de Setembro de 2023.**  
**Aceito em 15 de Dezembro de 2023.**