Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática

https://doi.org/10.34179/revisem.v9i1.19491

NÚMEROS REPUNIDADES E A REPRESENTAÇÃO MATRICIAL

Eudes Antonio Costa
UFT, Arraias, Matemática
eudes@uft.edu.br
Douglas Catulio dos Santos
SEC, Secretaria de Educação do Estado da Bahia
Barreiras - BA
catuliodouglas4@gmail.com

Resumo

Neste trabalho, realizamos uma investigação acerca das matrizes geradoras da sequência repunidade. Apresentamos a Proposição 3.1, que descreve cada elemento da sequência R_n em termos das potências da matriz $\mathcal{R}$. Além disso, como resultado dessa investigação, demonstramos algumas identidades, destacando a Identidade de Cassini no Corolário 3.5. Enquanto isso, a Proposição 3.6 exibe a forma recursiva para a matriz $\mathcal{R}$. Por fim, fornecemos uma demonstração para a Proposição 4.3 que estabelece uma expressão para o determinante de uma matriz tridiagonal, desse modo o Corolário 4.4 e a Proposição 4.6 mostram que a forma recursiva da sequência repunidade surge como consequência no cálculo do determinante de uma matriz tridiagonal como proposto na Proposição 4.3.

Palavras-chave: Matrizes Tridiagonais; Números Repunidades; Matriz Repunidade; Sequências Lineares Recursivas.

Abstract

In this work, we conducted an investigation on the generating matrices of the repunity sequence. We presented Proposition 3.1, which describes the sequence of R_n in terms of powers of the matrix $\mathcal{R}$. Furthermore, as a result of this investigation, we demonstrated several identities, with a particular emphasis on the Cassini Identity discussed in Corollary 3.5. Meanwhile, Proposition 3.6 exhibits the recursive form for the matrix $\mathcal{R}$, similar to the relationship seen in Equation 1.3. Finally, we provided a proof for Proposition 4.3, establishing an expression for the determinant of a tridiagonal matrix. Consequently, Corollary 4.4 and Proposition 4.6 demonstrate that the recursive form of the repunity sequence arises as a consequence of calculating the determinant of a tridiagonal matrix, as proposed in Proposition 4.3.

Keywords: Recursive Linear Sequences; Repunit Matrix; Repunit Numbers; Tridiagonal Matrices.

1 Introdução

A sequência *repunidade* é formada pelos números, elementos da sequência, que são escritos no sistema decimal como a repetição da unidade, representada pelo conjunto $\mathbf{R_n} = \{1,\ 11,\ 111, \ldots,\ R_n, \ldots\}$, sequência $A002275$ em OEIS [20]. Alguns trabalhos exploram as conexões desta sequência com a clássica sequência de Lucas, entre os quais podemos destacar [6, 10]. As sequências de números inteiros que satisfazem a relação de recorrência

$$L_{n+1} = pL_n + qL_{n-1} \ , \forall\ n \geq 1\ . \tag{1.1}$$

em que p e q são fixos, L_1 e L_0 dados, são denominadas de *sequências de Lucas*. Assim a *sequência de Lucas*, dada na Equação (1.1), é uma equação de *recorrência* de ordem 2. Por exemplo, considerando $p = q = 1$, $L_0 = 1$ e $L_1 = 2$ obtemos a sequência de Lucas $1, 2, 1, -1, -2, \ldots$; enquanto para $p = 1$, $q = -1$, $L_0 = 2023$ e $L_1 = 2$ obtemos a sequência de Lucas $2023, 2025, 4048, \ldots$. Para obter mais detalhes, consulte as referências [5, 6, 17, 22].

No sistema decimal, de acordo com [1, 4, 7, 19, 21] a Equação (1.2) apresenta a fórmula de Binet para os números repunidades,

$$R_n = \frac{10^n - 1}{9}\ . \tag{1.2}$$

Na Proposição 3.7 exibimos uma justificativa matricial para a expressão dada em (1.2). Nesta notas abordamos algumas propriedades da sequência repunidade em termos matriciais, em destaque propriedades associadas ao determinantes das matrizes relacionadas a esta sequência.

Podemos definir recursivamente a sequência *repunidade*, como *sequência de Lucas*, por:

$$p = 11,\ q = -10,\ R_0 = 0\ , R_1 = 1\ \text{ e } R_{n+1} = 11R_n - 10R_{n-1}\ . \tag{1.3}$$

em que R_n denota a $n-$ésima repunidade, dada na Equação (1.2), e por conveniência usamos $R_0 = 0$. Jaroma [10] demonstrou que em qualquer sistema posicional com base base $b > 1$ os números *repunidades* formam uma sequência recorrente de Lucas de ordem 2. Em Costa e Santos [6], considera-se a sequência formada pelos números *repunidades* R_n, e algumas identidades que se aplicam a essa sequência numérica.

Na literatura, encontramos vários trabalhos que relacionam diferentes tipos de sequências numéricas e matrizes, dos quais podemos citar [5, 8, 11, 12, 13, 14, 15]. No entanto, não encontramos nenhuma sobre essa interessante classe de números, as *repunidades*, e sua representação matricial. Em consoância com as ideias de Jaroma [10] na Seção 3 apresentamos uma representação da sequência *repunidade* em termos matriciais, destacando em especial a Proposição 3.1 que fornece o termo sucessor R_{n+1} da sequência repunidade em linguagem matricial.

Nessas notas apresentamos nosso estudo associados os números *repunidades* em notação matricial. Além da exibição em forma matricial, nosso objetivo é mostrar alguns resultados que obtivemos, aqueles sem indicação de referência. Na Seção 2 revisitamos a definição de determinante de uma matriz e alguns conceitos e resultados auxiliares que usaremos no restante do texto. Como dito, na Seção 3 descrevemos a sequência *repunidade* e alguns resultados em termos matriciais. Por fim, agora inspirados em Falcon [8], na Seção 4 apresentamos outra representação da sequência *repunidade* pelas matrizes tridiagonais.

2 Determinante de uma Matriz

Ressaltamos que durante o texto faremos uso recorrente de propriedades e conceitos referentes a matrizes e determinantes, polinômio característico de uma matriz, autovalores e autovetores associados ao polinômio característico, conteúdos de um curso elementar de álgebra linear na graduação. Diante disso, seria interessante que o leitor possua alguma familiaridade com tais conceitos, caso precise consultar recomendamos [9, 16]. Para que o texto fique o mais autocontido possível, enumeramos dois resultados relevantes no desenvolvimento deste e apresentamos exemplos, para um leitor mais experiente é possível suprimir a leitura desta seção.

O determinante de uma matriz é uma função que associa a cada matriz quadrada um escalar (número real). O determinante de uma matriz A é denotado por $\det A$ ou ainda por $|A|$. Dado uma matriz M_n de ordem n, considere M_{n-1}^{ij} a matriz obtida de uma matriz M_n suprimindo (eliminando) a linha i e a coluna j de M_n. Para as matrizes de ordem 1, o valor do determinante é o próprio elemento, ou seja, $|\left(a_{11}\right)| = a_{11}$.

De modo geral, para uma matriz de ordem $n \geq 2$, cálculo do determinante de uma matriz pode-se utilizar o processo conhecido como expansão de Laplace (Lema 2.1), e nos será útil adiante.

Lema 2.1. *[9, 16] Seja M_n uma matriz de ordem n e $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Então*

$$\det M_n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det M_{n-1}^{ij} \ .$$

Segue do Lema 2.1, que no caso de matrizes de ordem 2, obtemos a multiplicação dos elementos da diagonal principal e diminui-se do resultado a multiplicação dos elementos da diagonal secundária, ou seja, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$. Para matrizes de ordem 3, obtemos que:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (aei + bfg + cdh) - (afh + bdi + ceg) \ .$$

No Lema 2.1 escrevemos a expansão de Laplace em termos da coluna j, ressaltamos que a expansão para uma linha i qualquer também é valida, e será usada sem distinção.

O próximo resultado auxiliar exibe um resultado interessante acerca do determinante de uma matriz.

Lema 2.2 ([9, 16])**.** *Dadas as matrizes A e B de ordem n, tem-se que* $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

Exemplo 2.3. Dada a matriz $\begin{bmatrix} 11 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Temos que $\begin{vmatrix} 11 & -10 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 10$. Agora fazendo uso do Lema 2.2, temos que $\begin{vmatrix} 11 & -10 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}^n = 10^n$.

Dada uma matriz quadrada A de ordem n, lembramos que o polinômio de grau n dado por $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ é denominado polinômio característico da matriz A, em que I é a matriz identidade de ordem n. As raízes do polinômio característico, se existirem, satisfazem a relação $AX = \lambda X$, sendo X um vetor não nulo. Neste caso, o escalar λ é denominado um autovalor e o vetor $X \neq 0$ de autovetor; detalhes adicionais podem ser consultados em [9, 16].

No próximo exemplo determinamos os autovalores e autovetores da matriz $\begin{bmatrix} 11 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, e nos será útil adiante.

Exemplo 2.4. Os autovalores associados à matriz $\begin{bmatrix} 11 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 10$, enquanto os autovetores são $v_1 = (1, 1)$ e $v_2 = (10, 1)$. De fato, o polinômio característico associado uma matriz é dado por

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 11 - \lambda & -10 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 11\lambda + 10 \ .$$

Disto obtemos: $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 10$. Agora, vamos determinar os autovetores associados a estes autovalores. Considerando $\lambda_1 = 1$, temos que

$$\begin{bmatrix} 11 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \ .$$

Donde obtemos, $v_1 = (y, y) = y(1, 1)$, fazendo $y = 1$ tem-se $v_1 = (1, 1)$. Procedendo de modo análogo, encontra-se $v_2 = (10, 1)$, finalizando o cálculo. Agora, fazendo $\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 11 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e usando outros resultados vistos em um curso de álgebra linear. E a matriz $\mathcal{R}$ é diagonalizável, pois seus autovetores são linearmente independentes; e mais, temos a matriz dos autovetores $P = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e sua inversa $P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{10}{9} \end{bmatrix}$; e além disso, a matriz dos autovalores é $D = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Por fim, sabemos que $\mathcal{R} = P \cdot D \cdot P^{-1}$, e disto segue que $\mathcal{R}^n = (P \cdot D \cdot P^{-1})^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$.

3 Matriz Repunidade

Uma abordagem clássica para o estudo das sequências recorrentes é a utilização de uma matriz geradora, ou seja, alguns pesquisadores utilizam a representação matricial, e suas potências, para descrever o comportamento de algumas sequências recorrentes de números inteiros; veja [3, 5, 8, 11, 12, 13].

Para um número natural n, $\{L_n\}$ é a sequência de *Lucas* definida pela relação de recorrência de segunda ordem, em que p e q são números inteiros fixados, tais que

$$L_{n+1} = pL_n + qL_{n-1},\ n \geq 1\ .$$

Agora considere a matriz de ordem 2, da forma $\mathcal{L} = \begin{bmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, associada a *sequência de Lucas*.

Vimos na Equação (1.3), que fazendo $L_n = R_n$ e tomando $p = 11$, $q = -10$, $R_0 = 0$ e $R_1 = 1$ obtemos a recorrência $R_{n+1} = 11R_n - 10R_{n-1}$. Portanto, quando temos a sequência *repunidade*, obtemos a matriz $\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 11 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Observe que ao fazermos $\mathcal{R}^2$ temos:

$$\begin{bmatrix} 11 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 11 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 11 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 111 & -110 \\ 11 & -10 \end{bmatrix}\ . \tag{3.1}$$

Observamos que a posição a_{11} da matriz $\mathcal{R}^2$, mostrada na Equação (3.1), é igual ao termo sucessor da recorrência. Mostraremos que, de forma geral, a potência n da matriz $\mathcal{R}$, a posição a_{11} determina o termo R_{n+1} da sequência repunidade.

Proposição 3.1. *Dada a matriz* $\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 11 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ *. Para todo natural* $n \geq 1$*, tem-se*

$$\mathcal{R}^n = \begin{bmatrix} R_{n+1} & -10R_n \\ R_n & -10R_{n-1} \end{bmatrix} .$$

Demonstração. Aplicaremos a indução sobre n. Para $n = 1$ temos que

$$\begin{bmatrix} 11 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_2 & -10R_1 \\ R_1 & -10R_0 \end{bmatrix} ,$$

o que atesta a validade da sentença para $n = 1$.

Considere que para algum $n \geq 1$ a sentença $\mathcal{R}^n = \begin{bmatrix} R_{n+1} & -10R_n \\ R_n & -10R_{n-1} \end{bmatrix}$ seja válida. Vamos mostrar a validade para todo $n + 1$. Vejamos:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{n+1} &= \mathcal{R}^n \times \mathcal{R} \\ &= \begin{bmatrix} 11 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \times \begin{bmatrix} 11 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} R_{n+1} & -10R_n \\ R_n & -10R_{n-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 11 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} . \\ &= \begin{bmatrix} 11R_{n+1} - 10R_n & -10R_{n+1} \\ R_{n+1} & -10R_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} R_{n+2} & -10R_{n+1} \\ R_{n+1} & -10R_n \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

Isto garante a validade da sentença para todo $n + 1$. □

Além disso, da matriz repunidade $\mathcal{R}$, como na Proposição 3.1, podemos permutar as linhas ou colunas, produzindo novas matrizes com propriedades análogas à anterior, por exemplo:

Proposição 3.2. *Para todo* $n \geq 1$*, seja* $\tilde{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & 11 \end{bmatrix}$*, então*

$$\tilde{\mathcal{R}}^n = \begin{bmatrix} -10R_{n-1} & R_n \\ -10R_n & R_{n+1} \end{bmatrix} .$$

Demonstração. Aplicar indução em n, como na Proposição 3.1. □

Os próximos resultados, Proposição 3.3 a 3.5, seguem como consequência das propriedades inerentes a $\mathcal{R}$.

Proposição 3.3. *Para quaisquer m, n naturais, temos $R_{m+n} = R_m R_{n+1} - 10R_{m-1}R_n$.*

Demonstração. Aplicando a Proposição 3.1 em $\mathcal{R}^{m+n}$ obtemos que

$$\mathcal{R}^{m+n} = \begin{bmatrix} R_{m+n+1} & -10R_{m+n} \\ R_{m+n} & -10R_{m+n-1} \end{bmatrix} .$$

Por outro lado, utilizando as propriedades da multiplicação de matrizes, temos que $\mathcal{R}^{m+n} = \mathcal{R}^m \times \mathcal{R}^n$, ou seja

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^m \times \mathcal{R}^n &= \begin{bmatrix} R_{m+1} & -10R_m \\ R_m & -10R_{m-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} R_{n+1} & -10R_n \\ R_n & -10R_{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} R_{m+1}R_{n+1} - 10R_mR_n & -10R_{m+1}R_n - 10R_mR_{n-1} \\ R_mR_{n+1} - 10R_{m-1}R_n & -10R_mR_n + 10R_{m-1}R_{n-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

O resultado segue da igualdade entre matrizes. □

Em termos do determinante da matriz $\mathcal{R}$, exibimos que:

Proposição 3.4. *Seja m, n naturais com $m \geq 1$, tem-se $R^2_{m+n} - R_{m+n+1}R_{m+n-1} = 10^{m+n-1}$.*

Demonstração. Aplicando a Proposição 3.1 em $\mathcal{R}^{m+n}$ obtemos que

$$\begin{bmatrix} 11 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{m+n} = \begin{bmatrix} R_{m+n+1} & -10R_{m+n} \\ R_{m+n} & -10R_{m+n-1} \end{bmatrix} .$$

Calculando o determinante em ambos os lados, do lado esquerdo usamos o Lema 2.3, e do lado direito o Lema 2.1, e obtemos que

$$\begin{aligned} 10^{m+n} &= 10R^2_{m+n} - 10R_{m+n+1}R_{m+n-1} \\ &= 10(R^2_{m+n} - R_{m+n+1}R_{m+n-1}) , \end{aligned}$$

donde o resultado segue. □

De acordo com Noronha e Alves [18], para uma sequência numérica S_n as identidades $S^2_m - S_{m-n}S_{m+n} = X$ e $S^2_m - S_{m-1}S_{m+1} = Y$ são conhecidas, respectivamente, por Identidade de Catalan e Identidade de Cassini, em que X e Y são números inteiros. Costa e Santos [6] mostraram que quando S_n é a sequência repunidade tem-se $X = \dfrac{10^{m+n} + 10^{m-n} - 2 \cdot 10^m}{81}$ e $Y = 10^{m-1}$.

A seguir apresentamos uma demostração para a Identidade de Cassini, como um caso particular da Proposição 3.4.

Corolário 3.5 (Identidade de Cassini)**.** *Para todo $m \geq 1$, tem-se $R_m^2 - R_{m+1}R_{m-1} = 10^{m-1}$.*

Demonstração. Basta fazer $n = 0$ na Proposição 3.4 . □

Ainda sobre o sequência *repunidade* em linguagem matricial temos que:

Proposição 3.6. *Para todo n natural, tem-se $\mathcal{R}^{n+2} = 11\mathcal{R}^{n+1} - 10\mathcal{R}^n$.*

Demonstração. Aplicando a Proposição 3.1, a Equação 1.3 e as propriedades operatórias das matrizes:

$$\begin{aligned}
11\mathcal{R}^{n+1} - 10\mathcal{R}^n &= \begin{bmatrix} 11R_{n+2} & -110R_{n+1} \\ 11R_{n+1} & -110R_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10R_{n+1} & -100R_n \\ 10R_n & -100R_{n-1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 11R_{n+2} - 10R_{n+1} & -10(11R_{n+1} - 10R_n) \\ 11R_{n+1} - 10R_n & -10(11R_n - 10R_{n-1}) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} R_{n+3} & -10R_{n+2} \\ R_{n+2} & -10R_{n+1} \end{bmatrix} \\
&= \mathcal{R}^{n+2} \ .
\end{aligned}$$

E obtemos o resultado. □

Para finalizar a seção, vamos mostrar, em linguagem matricial, a Fórmula de Binet das repunidades, vista na Equação (1.2), por meio do processo de diagonalização de matrizes.

Proposição 3.7 ([1, 19, 21])**.** *Para todo $n \geq 0$, então $R_n = \dfrac{10^n - 1}{9}$.*

Demonstração. Segue da Equação (1.3) que $R_{n+1} = 11R_n - 10R_{n-1}$, e pela Proposição 3.1 temos a matriz $\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 11 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Considere a matriz coluna $V_n = \begin{bmatrix} R_{n+1} \\ R_n \end{bmatrix}$, note que

$$\begin{aligned}
V_{n+1} = \begin{bmatrix} R_{n+2} \\ R_{n+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 11R_{n+1} - 10R_n \\ R_{n+1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 11 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{n+1} \\ R_n \end{bmatrix} = \mathcal{R} \cdot V_n \ .
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$V_n = \mathcal{R} \cdot V_{n-1} = \mathcal{R}^2 \cdot V_{n-2} \ = \ \cdots \ = \ \mathcal{R}^n \cdot V_0 \ .$$

Agora, como no Exemplo 2.4, temos que

$$\begin{aligned} V_n =& \mathcal{R}^n \cdot V_0 = P \cdot D^n \cdot P^{-1} \cdot V_0 \\ =& \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10^n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{10}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ =& \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 10^{n+1} & 1 \\ 10^n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ =& \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 10^{n+1} & 1 \\ 10^n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ =& \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 10^{n+1} - 1 \\ 10^n - 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Donde o resultado segue. □

4 Matriz Tridiagonal

Nesta seção utilizaremos as matrizes tridiagonais, definidas por Cahill e outros [2] e Falcon [8] , como todas as matrizes quadradas em que os elementos não nulos aparecerem apenas na diagonal principal, na superdiagonal ou na subdiagonal, ou seja, são aqueles localizados apenas na diagonal principal e os que estão acima e abaixo dela. Especificamente, consideramos uma matriz M_n quadrada de ordem $n \geq 1$ definida por:

$$M_n = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ c & d & e & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & d & e & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c & d & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c & d \end{bmatrix}, \tag{4.1}$$

em que $a,\ b,\ c,\ d$ e e são contantes reais não nulas.

Exemplo 4.1. Para $a = 1,\ b = 2,\ c = 3,\ d = 4,\ e = 5$ e $n = 4$, a Matriz M_n, fornecida na Equação (4.1), é igual a

$$M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix},$$

que é um exemplo de matriz tridiagonal de ordem 4. Enquanto que a matriz

$$M_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} ,$$

é uma matriz tridiagonal de ordem 5.

No próximo exemplo, e no restante do texto, dado uma matriz quadrada M_n de ordem n, indicaremos por $|M_n|$, ou equivalentemente por $\det M_n$, o determinante da matriz M_n.

Exemplo 4.2. Fazendo uso da definição de determinante e do Lema 2.1, temos que:

$$\begin{aligned} |M_1| &:= a \ ; \\ |M_2| &= \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \overset{\text{coluna } 2}{=} d|M_1| - bc \ ; \\ |M_3| &= \det \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & e \\ 0 & c & d \end{bmatrix} \overset{\text{coluna } 3}{=} d|M_2| - e \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} = d|M_2| - ec|M_1| \ ; \end{aligned}$$

De uma forma geral temos que

Proposição 4.3 ([8]). *Seja a matriz M_n tridiagonal e para todo $n \geq 2$ temos:*

$$|M_{n+1}| = d|M_n| - ce|M_{n-1}| \ .$$

Demonstração. Aplicaremos a indução em n. Para $n = 2$, veja Exemplo 4.2. Admita que o resultado é válido para algum $n \geq 2$. Assim

$$|M_{n+1}| \ = \ \det \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & d & e & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & d & e & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c & d & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c & d & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & c & d \end{bmatrix} .$$

Então,

$$
\begin{aligned}
|M_{n+1}| \quad &\overset{\text{coluna } n+1}{=} \quad d \cdot \det \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ c & d & e & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & d & e & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c & d & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c & d \end{bmatrix} \\
& \qquad -e \cdot \det \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ c & d & e & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & d & e & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c & d & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & c \end{bmatrix} \\
&= \quad d|M_n| \overset{\text{linha } n}{-} e \cdot c \cdot \det \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c & d & e & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c & d & e & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c & d \end{bmatrix} \\
&= \quad d|M_n| - ec|M_{n-1}| \ .
\end{aligned}
$$

Temos o resultado. □

O resultado na forma da Proposição 4.3 é apenas enunciad~~a~~ o em [8]. Aqui exibimos a demonstração, a qual vimos que é uma consequência direta da definição de determinante de uma matriz, aplicando a expansão de Laplace (Lema 2.1).

Indicamos por $\mathcal{M}_n$ a matriz *tridiagonal* ao especificarmos $a = 11,\ b = -1,\ c = -10,\ d = 11$ e $e = -1$ na matriz M_n dada na Equação (4.1):

$$
\mathcal{M}_n = \begin{bmatrix} 11 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -10 & 11 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 11 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -10 & 11 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -10 & 11 \end{bmatrix} . \tag{4.2}
$$

Para $n \geq 1$ vale o seguinte resultado envolvendo os números repunidades de ordem n em termos do determinante da matriz *tridiagonal* $\mathcal{M}_n$.

Corolário 4.4. *Considere a matriz a tridiagonal $\mathcal{M}_n$ dada na Equação (4.2). Para todo $n \geq 0$, temos que $|\mathcal{M}_{n+1}| = R_{n+2}$.*

Demonstração. Para $n = 0, 1$ ou 2, um cálculo direto mostra que

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}_1| =& 11 = R_2, \\
|\mathcal{M}_2| =& 11|\mathcal{M}_1| - (-10) \cdot (-1) = 11R_2 - 10 = R_3, \\
|\mathcal{M}_3| =& 11|\mathcal{M}_2| - (-10) \cdot (-1)|\mathcal{M}_1| = 11R_3 - 10 \cdot R_2 = R_4.
\end{aligned}$$

Para $n \geq 2$, basta aplicar a Proposição 4.3, e obtemos que:

$$|\mathcal{M}_{n+1}| = 11|\mathcal{M}_n| - (-10) \cdot (-1)|\mathcal{M}_{n-1}| \ .$$

Agora usando indução em n, têm-se $|\mathcal{M}_{n+1}| = R_{n+2}$. □

Considere a matriz *tridiagonal* M'_n dada por

$$M'_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -10 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 11 & -10 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 11 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 11 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 11 \end{bmatrix} . \tag{4.3}$$

Exemplo 4.5. O cálculo direto do determinante da matriz *tridiagonal* M'_n para $n = 0$ e $n = 1$ é

$$|M'_0| = 0 = R_0 \text{ e } |M'_1| = 0. \cdot 0 - (-1) \cdot 1 = 1 = R_1 \ .$$

Faremos também para $n = 2$ e $n = 3$, será o mesmo procedimento adotado para qualquer $n > 3$ na Proposição 4.6 à seguir, vejamos:

$$|M'_2| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -10 \\ 0 & -1 & 11 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & -10 \\ 0 & 11 \end{vmatrix} = 11 = R_2,$$

$$\begin{aligned}
|M'_3| =& \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & -1 & 11 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & 11 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & -10 & 0 \\ 0 & 11 & -10 \\ 0 & -1 & 11 \end{vmatrix} \\
=& - (-1) \begin{vmatrix} 11 & -10 \\ -1 & 11 \end{vmatrix} = |\mathcal{M}_2| = R_3 \ .
\end{aligned}$$

A verificação do caso geral seguirá com auxílio da expansão de Laplace, como no Exemplo 4.5 .

Proposição 4.6. *Considere a matriz tridiagonal M'_n de ordem $n+1$ dada na Equação* (4.3)*. Para todo $n \geq 0$ o n-ésimo número repunidade é dado por $R_n = |M'_n|$.*

Demonstração. No Exemplo 4.5 temos o cálculo até $n = 3$. Para $n \geq 4$, façamos o determinante da matriz *tridiagonal* M'_{n+1}, ou seja,

$$
\begin{aligned}
|M'_{n+1}| &= \begin{vmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & -10 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 11 & -10 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 11 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 11 & -10 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 11 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 11
\end{vmatrix} \\
&= -\begin{vmatrix}
-1 & -10 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 11 & -10 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 11 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 11 & -10 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 11 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 11
\end{vmatrix} \\
&= -(-1)\begin{vmatrix}
11 & -10 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \\
-1 & 11 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 11 & -10 & 0 & \\
0 & 0 & \cdots & -1 & 11 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 11 &
\end{vmatrix} = |\mathcal{M}_{n+1}| \; .
\end{aligned}
$$

Agora segue do Corolário 4.4 que

$$M'_{n+1} = |\mathcal{M}_n| = R_{n+1} \; .$$

□

Vale ressaltar que em [3], Catarino e colaboradores, abordam propriedades análogas para a sequência de Mersenne, apresentando alguns casos particulares. Revisando a literatura, encontramos outros autores que estudaram relações entre determinantes de certas matrizes tridiagonais em termos de sequências recursivas, como pode ser consultado em Kiliç e Ömür em [13], Kiliç e Taşci em [14], Kiliç e Stanica em [15], entre outros pesquisadores.

5 Considerações finais

Neste discutimos alguns resultados acerca da sequência repunidade, um caso particular da sequência de Lucas, com vistas as propriedades associadas a uma matriz de ordem 2, nesse sentido, exibimos uma matriz geradora da sequência repunidade, como pode ser visto nas Proposições 3.1 e 3.6; e como consequência obtemos a Identidade de Cassini como caso particular da Proposição 3.4. Para além disso, exploramos alguns resultados em termos das matrizes tridiagonais, em especial destacamos a Proposição 4.3 que exibe uma demonstração para o resultado proposto por Falcon [8], a partir desta verificação propomos alguns resultados que relacionam as matrizes tridiagonais com os números repunidades. Com este trabalho esperamos fomentar mais estudos referentes a esta classe de números, fornecendo novas abordagens para o estudo das sequências do tipo Lucas e suas diversas formas de representação.

Agradecimentos

Este trabalho foi parcialmente suportado pela PROPESQ-UFT.

Referências

[1] Beiler, Albert H.: *Recreations in the Theory of Numbers: The Queen of Mathematics Entertains*. 2. ed. Dover. 1966.

[2] Cahill, Nathan D.; D'enrico, John R.; Narayan, Darren A.; Narayan, Jack Y.: Fibonacci Determinants. The College Mathematics Journal, **33** (2002), no. 3, p.221-225.

[3] Catarino, Paula Maria M. C.; Campos, Helena; Vasco, Paulo: On the Mersenne sequence. Annales Mathematicae et Informaticae, **46** (2016), 37–53.

[4] Costa, Eudes A.; Santos, Douglas C.: Algumas propriedades dos números Monodígitos e Repunidades. Revista de Matemática da UFOP, **2** (2022), 47-58.

[5] Costa, Eudes A.; Santos, Douglas C.: Algumas propriedades da sequência de Pell. C.Q.D.– Revista eletrônica Paulista de Matemática, **22** (2022), no. 3. 25-37.

[6] Costa, Eudes A.; Santos, Douglas C.: Um passeio pela sequência repunidade. C.Q.D.– Revista eletrônica Paulista de Matemática, **23** (2023), no. 1. 241–254.

[7] Costa, Eudes A.; Santos, Douglas C.; Bezerra, Cesar S.: Algumas propriedades aritméticas das repunidades generalizadas. Revista de Matemática da UFOP, **2** (2023), 37-47.

[8] Falcon, Sergio: On the generating matrices of the k-Fibonacci numbers. Proyecciones, **32** (2013), no. 4, 347-357.

[9] Hoffmann, Kenneth; Kunze, Ray Alden: *Algebra Linear*, 2a. edição. Livros Técnicos e Cientıficos Editora, Rio de Janeiro, 1979.

[10] Jaroma, John H.: Factoring Generalized Repunits. Bulletin of the Irish Mathematical Society, **59** (2007), p. 29-35

[11] Kalman, Dan: Generalized Fibonacci numbers by matrix methods. Fibonacci Quartely,Vol. **20** (1982), no. 1 , 73-76.

[12] Kiliç, Emrah: The generalized order-k Fibonacci-Pell sequence by matrix methods. Journal of Computational and Applied Mathematics, **209** (2007), no. 2, 133-145.

[13] Kiliç, Emrah; Ömür, Neşe; Ulutas, Yucel T.: Matrix representation of the second order recurrence $\{u_{kn}\}$. Ars Combinatoria, **93** (2009), no. 1, 180-190.

[14] Kiliç , Emrah, Taşci, Dursun, Haukkanem, Pentti. On the generalized Lucas sequences by Hessenberg matrices. Ars Combinatoria, **95** (2010), 383-395.

[15] Kiliç, Emrah; Stanica, Pantelimon: A matrix approach for general higher order linear recurrences. Bulletin of The Malaysian Mathematical Sciences Society, **34** (2011), no. 1, 51-67.

[16] Lax, Peter D.: *Linear algebra and its applications.* John Wiley & Sons, New York, 2007.

[17] Magalhães, Cícero T. B.: Sequência de Fibonacci. Revista Eureka, **21** (2005), 38-42.

[18] Noronha, Wedson F. R.; Alves, Francisco R. V.: Sequências de Pell: propriedades e considerações epistemológicas. C.Q.D.– Revista Eletrônica Paulista de Matemática, **13** (2018), 1-30.

[19] Ribenboim , Paulo: *The Little Book of Bigger Primes.* 2. ed. Springer, New York, 2004.

[20] Sloane, Neil J. A. e outros: *The on-line encyclopedia of integer sequences*, http://oeis.org/A002275.

[21] Tarasov, Boris V.: The concrete theory of numbers: initial numbers and wonderful properties of numbers repunit. Arxiv.org [math.GM], Cornell University. **15** (2007), 1-8.

[22] Vorobiov, Nikolai N.: *Numeros de Fibonacci. Lecciones populares de matemáticas*: Editorial MIR, Moscú, Rússia, 1974.

[23] Yates, Samuel: *Repunits and repetends.* Star Publishing Co., Inc. Boynton Beach, Florida, 1992.

Recebido em 31 de Julho de 2023.
1ª Revisão em 18 de Janeiro de 2024.
Aceito em 32 de Fevereiro de 2024.