REVISEM
Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática
https://doi.org/10.34179/revisem.v9i1.19501

POLINÔMIOS DE PADOVAN GENERALIZADOS

Renata Passos Machado Vieira
Doutoranda em Ensino da Rede Nordeste de Ensino (RENOEN-Polo UFC)
re.passosm@gmail.com
Francisco Regis Vieira Alves
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará
fregis@gmx.fr
Paula Maria Machado Cruz Catarino
Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro
pcatarino23@gmail.com

Resumo

Este trabalho realiza um estudo referente ao novo tipo de polinômios de Padovan generalizados em torno da sua distância. Nesse sentido, realiza-se uma investigação matemática desses polinômios, com base em sua definição apresentada nesta pesquisa. Dessa forma, são discutidas as respectivas matrizes geradoras e a função geradora desses números .

Palavras-chave: Função geradora; matriz geradora; polinômios de Padovan generalizados.

Abstract

This work performs a study regarding the new type of generalized Padovan polynomials in the sense of their distance. In this sense, a mathematical investigation of these polynomials is carried out, based on their definition presented in this research. Thus, the respective generating matrices and the generating function of these numbers are discussed.

Keywords: Generating function; generating matrix; generalized Padovan polynomials.

1 Introdução

Muitos estudos de sequências numéricas são encontrados na literatura atualmente. Nesse sentido, tem-se trabalhos abordando as generalizações de sequências, aprofundando o estudo desses números [2, 3]. Com base nisso, tem-se o trabalho de Bednarz e Wolowiee-Musial [1], em que trata dos polinômios de Fibonacci generalizados no contexto da sua distância. Assim, são introduzidos nesta pesquisa os polinômios generalizados de Padovan, diante de suas respectivas distâncias.

Como forma de realizar uma generalização desses números, ressalta-se a sequência de Padovan (P), possuindo relação de recorrência dada por: $P_n = P_{n-2} + P_{n-3}, n \geqslant 3$. Os valores iniciais dessa sequência são dados por: $P_0 = P_1 = P_2 = 1$, e o $x^3 - x - 1 = 0$ sendo o seu polinômio característico [4, 5, 6].

Doravante, será realizada uma investigação matemática dessa sequência, permitindo introduzir os polinômios generalizados desses números em torno da sua distância.

2 Os polinômios de Padovan generalizados

Esta seção introduz os polinômios generalizados de Padovan, definindo suas recorrências, com o viés de discutir posteriormente algumas propriedades matemáticas. Desse modo, temos a definição referente à sequência Polinomial de Padovan e a definição da generalização dos polinômios de Padovan, de forma a introduzir ao leitor a noção dos polinômios de Padovan, para que possa ser estudada a definição dos polinômios de Padovan em função da distância.

Definição 2.1. *A sequência polinomial de Padovan $(P_n(x))$ é dada por:*

$$P_n(x) = xP_{n-2}(x) + P_{n-3}(x), n \geqslant 3, \tag{2.1}$$

com os valores iniciais $P_0(x) = P_1(x) = P_2(x) = 1$.

Definição 2.2. *A generalização dos polinômios de Padovan $(P_n(k,x))$, para inteiros com $n \geqslant 0, k \geqslant 3, x \geqslant 1, n \geqslant k$, é dada por:*

$$P_n(k,x) = xP_{n-2}(k,x) + P_{n-k}(k,x), \tag{2.2}$$

com $P_n(k,n) = n+1$, em que $n = 0, 1, 2, \ldots, k-1$.

Definição 2.3. *Os polinômios de Padovan $(p_n(k,x))$ em função da distância, para inteiros com $n \geqslant 0, k \geqslant 3, n \geqslant k$, é dada por:*

$$p_n(k,x) = xp_{n-2}(k,x) + p_{n-k}(k,x), \tag{2.3}$$

com $p_n(k,n) = P_n x^n$, em que $n = 0, 1, 2, \ldots, k-1$.

Por vez, essas recorrências pode ser escrita no formato:

$$p_{k+i}(k,x) = x^{k+i} + (i+1)x^i, \tag{2.4}$$

com $i = 0, 1, 2, \ldots, k-3$.

Assim, temos na Tabela 1, alguns valores calculados de k e n para a sequência, com base na Definição 2.3, para uma melhor compreensão do leitor.

Tabela 1: Polinômios de Padovan em função da distância.
Fonte: Elaborado pelos autores

n	0	1	2	3	4	5	6
$p_n(3,x)$	1	x	x^2	x^2+1	x^3+x	x^3+x^2+x	x^4+2x^2+1
$p_n(4,x)$	1	x	x^2	$2x^3$	x^3+1	$2x^4+x$	x^4+x^2+x
$p_n(5,x)$	1	x	x^2	$2x^3$	$2x^4$	$2x^4+x$	$2x^5+x$
$p_n(6,x)$	1	x	x^2	$2x^3$	$2x^4$	$3x^5$	$2x^5+1$

3 Alguns resultados

Nesta seção, abordaremos propriedades matemáticas que se originam das definições apresentadas anteriormente. A compreensão dessas propriedades é fundamental para uma análise mais profunda da sequência de Padovan e suas aplicações. A seguir, destacamos algumas propriedades que podem ser discutidas.

Proposição 3.1. *A função geradora dos polinômios de Padovan em função da distância é dada por:*

$$g(t) = \frac{1 + xt + t^2(x^2 - x)}{1 - xt^2 - t^k} \tag{3.1}$$

Demonstração. Com base na sequência $g(t) = p_0(k,x) + p_1(k,x)t + p_2(k,x)t^2 + \ldots$, tem-se:

$$xt^2g(t) = p_0(k,x)xt^2 + p_1(k,x)xt^3 + p_2(k,x)xt^4 + \ldots + p_k(k,x)xt^{k+2} \tag{3.2}$$

$$t^kg(t) = p_0(k,x)t^k + p_1(k,x)t^{k+1} + p_2(k,x)t^{k+2} + \ldots + p_k(k,x)t^{2k}. \tag{3.3}$$

Dessa forma, realizando $g(t) - xt^2g(t) - t^kg(t)$, tem-se:

$$\begin{aligned}
g(t) - xt^2g(t) - t^kg(t) &= p_0(k,x) + p_1(k,x)t + \ldots + p_k(k,x)t^k & (3.4)\\
&- [p_0(k,x)xt^2 + p_1(k,x)xt^3 + \ldots + p_k(k,x)xt^{k+2}] & (3.5)\\
&- [p_0(k,x)t^k + p_1(k,x)t^{k+1} + \ldots + p_k(k,x)t^{2k}] & (3.6)\\
g(t)[1 - xt^2 - t^k] &= p_0(k,x) + p_1(k,x)t + p_2(k,x)t^2 - p_0(k,x)xt^2 & (3.7)\\
g(t)[1 - xt^2 - t^k] &= 1 + xt + x^2t^2 - xt^2 & (3.8)\\
g(t)[1 - xt^2 - t^k] &= 1 + xt + t^2(x^2 - x) & (3.9)\\
g(t) &= \frac{1 + xt + t^2(x^2 - x)}{1 - xt^2 - t^k}. & (3.10)
\end{aligned}$$

□

Iniciando os estudos referentes as matrizes dessas sequências, tem-se a matriz geradora dos polinômios de Padovan em função da distância. A forma matricial é obtida com base na recorrência da Definição 2.3. Com isso, a primeira coluna da matriz representa os coeficientes da fórmula de recorrência e as colunas seguintes são preenchidas com uma matriz identidade. Por fim, a última linha é completada com zeros.

Assim, para $k = 3$ a matriz é dada por:

$$QP(3,x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

Dessa forma, ao ser elevada a n-ésima potência, tem-se o elemento a_{11} da matriz retornando o valor $p_n(k,x)$, para $n \geqslant 2$.

A matriz geradora dos polinômios de Padovan em função da distância, para $k = 4$, é dada por:

$$QP(4,x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

A matriz geradora desses números para $k = 5$, é dada por:

$$QP(5,x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

Diante disso, a Tabela 2 apresenta alguns resultados dos polinômios de Padovan em função da distância, para determinados valores de k.

Tabela 2: Alguns resultados dos Polinômios de Padovan em função da distância.
Fonte: Elaborado pelos autores

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$QP(3,1)$	1	0	1	0	2	0	3	0	5	0	8
$QP(3,2)$	1	0	2	0	5	0	12	0	29	0	70
$QP(4,1)$	1	0	1	0	1	1	1	2	1	3	2
$QP(4,2)$	1	0	2	0	4	1	8	4	16	12	33
$QP(5,1)$	1	0	1	0	1	0	2	0	3	0	4
$QP(5,2)$	1	0	2	0	4	0	9	0	20	0	44

Generalizando a forma matricial dos polinômios de Padovan em função da distância, temos:

$$QP(k,x) = \begin{bmatrix} 0 & I^k \\ x & \\ 0^{k-2} & \\ 1 & 0^k \end{bmatrix}, \tag{3.14}$$

em que I é a matriz identidade de tamanho k e 0^k é uma matriz linha com todas as entradas nulas.

Assim, concluímos a exploração dos polinômios generalizados de Padovan nesta pesquisa. Este estudo fornece uma visão aprofundada das propriedades desses polinômios na teoria dos números e na matemática em geral. Eles desempenham um papel significativo na compreensão das relações matemáticas subjacentes à sequência de Padovan e têm implicações em uma variedade de contextos matemáticos. Este conhecimento contribui para um entendimento mais completo e apreciação das estruturas matemáticas recorrentes, enriquecendo o campo da matemática e suas aplicações. A pesquisa e exploração contínuas desses polinômios têm o potencial de levar a descobertas matemáticas adicionais e aplicações práticas em diversos campos. Portanto, a investigação sobre os polinômios generalizados de Padovan permanece um tópico relevante e promissor no campo da matemática.

4 Conclusão

Com base nos polinômios de distância de Fibonacci, foi possível realizar um estudo dos polinômios generalizados da sequência de Padovan em torno da sua distância. Assim, definiu-se as suas respectivas recorrências, visando obter propriedades matemáticas inerentes à esses números.

Por fim, foram discutidas as matrizes geradoras e a função geradora desses números, permitindo a realização de uma investigação matemática da sequência primitiva de Padovan. Para trabalhos futuros, busca-se a visualização e aplicação desses polinômios, aprimorando o estudo de sequências.

Agradecimentos

A parte de desenvolvimento de pesquisas no Brasil contou com o apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq e da Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico (Funcap).

A vertente de desenvolvimento da investigação em Portugal é financiada por Fundos Nacionais através da FCT - Fundação para a Ciência e Tecnologia. I. P, no âmbito do projeto UID / CED / 00194/2020.

Referências

[1] Bednarz, U. and Wolowiec-Musial, M. Distance Fibonacci Polynomials, *Symmetry*, vol. 12, p. 1-14, 2020.

[2] Falcon, S. and Plaza, A. On the Fibonacci k-numbers. *Chaos Solitons Fractals*, vol. 32, p. 1615?1624, 2007.

[3] Koshy, T. *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*. John Wiley and Sons: New York, NY, USA, 2001.

[4] Vieira, R. P. M.; Alves, F. R. V. Os números duais de Padovan. *Revista de Matemática da UFOP*, vol. 2, p. 52-61, 2019.

[5] Vieira, R. P. M.; Alves, F. R. V; Catarino, P. M. C. A historic alanalys is of the padovan sequence. *International Journal of Trends in Mathematics Education Research*, vol. 3, n. 1, p. 8-12, 2020.

[6] Vieira, R. P. M. *Engenharia Didática (ED): o caso da Generalização e Complexificação da Sequência de Padovan ou Cordonnier*. 266f. Dissertação de Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará, 2020.

Recebido em 04 de Agosto de 2023.
1ª revisão em 16 de Outubro de 2023.
Aceito em 15 de Fevereiro de 2024.