Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática

https://doi.org/10.34179/revisem.v6i1.19502

**FUNÇÃO DE PERRIN**

Renata Passos Machado Vieira
Doutoranda em Ensino da Rede Nordeste de Ensino (RENOEN-Polo UFC)
re.passosm@gmail.com
Francisco Regis Vieira Alves
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará
fregis@gmx.fr
Paula Maria Machado Cruz Catarino
Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro
pcatarino23@gmail.com

**Resumo**

O presente trabalho introduz o estudo da função de Perrin no conjunto dos números reais, $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $x \in \mathbb{R}$, $p(x+3) = p(x+1) + p(x)$. Assim, de posse da sua recorrência e definição, são trabalhados alguns teoremas e proposições matemáticas. Dessa forma, realiza-se uma evolução matemática em torno dos números dessa sequência, destacando o estudo da sua respectiva função de Perrin com o número plástico, assim como acontece na sequência de Padovan.

**Palavras-chave**: Evolução matemática; Função de Perrin; número plástico; sequência de Perrin.

**Abstract**

The present work introduces the study of Perrin's function in the set of real numbers, $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, such that $x \in \mathbb{R}, p(x+3) = p(x+1) + p(x)$. Thus, in possession of its recurrence and definition, some theorems and mathematical propositions are worked on. In this way, a mathematical evolution is carried out around the numbers of this sequence, highlighting the study of their respective Perrin function with the plastic number, just as it happens in the Padovan sequence.

**Keywords**: Mathematical evolution; Perrin function; plastic number; Perrin sequence.

# 1 Introdução

Inicialmente estudada e desenvolvida pelo engenheiro francês Olivier Raoul Perrin (1841-1910), a sequência de Perrin é uma sequência de terceira ordem com fórmula de recorrência $P_n = P_{n-2} + P_{n-3}, n \geq 3$ com os valores iniciais $P_0 = 3, P_1 = 0, P_2 = 2$. O seu polinômio característico é dado por $x^3 - x - 1 = 0$, apresentando o número plástico como solução real, cujo valor aproximado é 1,32 [1, 4, 5, 6, 7, 8, 9].

De fato, percebe-se um número cada vez maior de pesquisas referentes aos números de Perrin, dando ênfase ao seu processo de evolução matemática. Com isso, para este presente estudo, tem-se uma investigação da função de Perrin, baseada nos trabalhos [2, 3], em que tratam da função de Fibonacci.

Desse modo, é então considerada a função de Perrin definida no conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$), ou seja, função $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$p(x+3) = p(x+1) + p(x).$$

Além disso, mostra-se que se $p$ é uma função de Perrin, então

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{P_{n+1}}{P_n} = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} = \psi.$$

## 2 Função de Perrin

Doravante, é então definida a função de Perrin.

**Definição 2.1.** *A função $p$ definida nos números reais é considerada uma função Perrin se satisfaz a fórmula:*

$$p(x+3) = p(x+1) + p(x),$$

*para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Seja a função $p(x) := a^x$ uma função de Perrin em $\mathbb{R}$, onde $a > 0$. Dessa forma,

$$a^x a^3 = p(x+3) = p(x+1) + p(x) = a^x(a+1).$$

Assim, tem-se $a^3 = a + 1$ com $a = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} = \psi$. Logo,

$$p(x) = \left( \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} \right)^x = \psi^x$$

é a função de Perrin e única desse tipo em $\mathbb{R}$.

Para $\{u_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ e $\{v_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ sendo a sequência de Perrin. Definindo a função $p(x)$ para $p(x) := u_{[x]} + v_{[x]}t$, em que $t = x - [x] \in (0, 1)$. Então $p(x+3) = u_{[x+3]} + v_{[x+3]}t = u_{[x]+3} + v_{[x]+3}t = (u_{[x]+1} + u_{[x]+1}) + (v_{[x]+1} + v_{[x]+1})t = p(x+1) + p(x)$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Assim, conclui-se a demonstração de $p$ como sendo uma função de Perrin.

**Proposição 2.2.** *Dado* $p$ *é uma função de Perrin. Definimos* $g(x) := p(x+t)$*, em que* $t \in \mathbb{R}$*, para qualquer* $x \in \mathbb{R}$*. Então* $g$ *é uma função de Perrin.*

*Demonstração.* Dado $x \in \mathbb{R}$, tem-se que $g(x+3) = p(x+3+t) = p(x+t+1)+p(x+t) = g(x+1) + g(x)$, validando a proposição. □

Para exemplificar, temos que $p(x) = \psi^x$ é uma função de Perrin, então $g(x) = \psi^{x+t} = \psi^t p(x)$ é uma função de Perrin, para todo $t \in \mathbb{R}$.

**Teorema 2.3.** *Seja* $p(x)$ *função de Perrin e* $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *a sequência de Perrin com* $P_0 = 3, P_1 = 0, P_2 = 2$*. Então* $p(x+n) = P_{n-1}p(x+1) + P_{n-2}p(x)$ *para qualquer* $x \in \mathbb{R}$ *e* $n \geqslant 3$ *e inteiro.*

*Demonstração.* Se $n = 3$, então $p(x+3) = p(x+1) + p(x) = P_2 p(x+1) + P_1 p(x)$.

Se $n = 4$, então

$$\begin{aligned} p(x+4) &= p(x+2) + p(x+1) \\ &= P_1 p(x+1) + P_0 p(x) + P_0 p(x+1) + P_{-1} p(x) \\ &= (P_1 + P_0) p(x+1) + (P_0 + P_{-1}) p(x) \\ &= P_3 p(x+1) + P_2 p(x). \end{aligned}$$

Supondo que $n = k, k \in \mathbb{Z}$, tem-se

$$p(x+k) = P_{k-1} p(x+1) + P_{k-2} p(x).$$

Supondo que $n = k+1, k \in \mathbb{Z}$, tem-se

$$\begin{aligned} p(x+k+3) &= p(x+k+1) + p(x+k) \\ &= P_k p(x+1) + P_{k-1} p(x) + P_{k-1} p(x+1) + P_{k-2} p(x) \\ &= (P_k + P_{k-1}) p(x+1) + (P_{k-1} + P_{k-2}) p(x) \\ &= P_{k+2} p(x+1) + P_{k+1} p(x). \end{aligned}$$

□

**Corolário 2.4.** *Se* $\{P_n\}$ *é um número da sequência de Perrin com valores inciais* $P_0 = 3, P_1 = 0, P_2 = 2$*, então tem-se que*

$$\psi^n = P_{n-1}\psi + P_{n-2}$$

*Demonstração.* Se $p(x) = \psi^x$ é uma função de Perrin, com $a := \sqrt[3]{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} = \psi$, pode-se aplicar no Teorema 2.3, resultando em $a^{x+n} = p(x+n) = P_{n-1}p(x+1) + P_{n-2}p(x) = P_{n-2}a^{x+1} + P_{n-2}a^x$. Por fim, tem-se: $a^n = P_{n-1}a + P_{n-2}$ □

**Teorema 2.5.** *Se $\{u_n\}$ é um número da sequência de Perrin, então $u_{[x+n]} = P_{n-1}u_{[x]+1} + P_{n-2}u_{[x]}$ e $u_{[x+n]-1} = P_{n-1}u_{[x]} + P_{n-2}u_{[x]-1}$.*

*Demonstração.* Aplicando o Teorema 2.3, tem-se que

$$\begin{aligned}
u_{[x+n]} + u_{[x+n]-1}t &= p(x+n)\\
&= P_{n-1}p(x+1) + P_{n-2}p(x)\\
&= P_{n-1}[u_{[x+1]} + u_{[x+1]-1}t] + P_{n-2}[u_{[x]} + u_{[x]-1}t]\\
&= P_{n-1}[u_{[x]+1} + u_{[x]}t] + P_{n-2}[u_{[x]} + u_{[x]-1}t]\\
&= [P_{n-1}u_{[x]+1} + P_{n-1}u_{[x]}] + [P_{n-2}u_{[x]} + P_{n-2}u_{[x]-1}]t
\end{aligned}$$

□

# 3 Quocientes da função de Perrin

Nesta seção, são discutidos os limites do quociente de função de Perrin.

**Teorema 3.1.** *Se $p(x)$ é a função de Perrin, então o limite do quociente $\frac{p(x+1)}{p(x)}$ existe.*

*Demonstração.* Considerando o quociente $\frac{p(x+1)}{p(x)}$ da função de Perrin $p(x)$, tem-se quatro casos:

i $p(x) > 0, p(x+1) > 0$;

ii $p(x) < 0, p(x+1) < 0$;

iii $p(x) > 0, p(x+1) < 0$;

iv $p(x) < 0, p(x+1) < 0$.

Considere (iii). Se tem-se $\alpha := p(x) > 0$, $\beta := p(x+1) < 0$, então:

$$\begin{aligned} p(x+3) &= 3\alpha, \\ p(x+4) &= -2\beta, \\ p(x+5) &= 2\alpha - 3\beta, \\ p(x+6) &= 3\alpha - 2\beta, \\ p(x+7) &= 2\alpha - 5\beta, \\ &\dots \\ p(x+n) &= P_{n-3}\alpha - P_{n-2}\beta. \end{aligned}$$

Dado $x' \in \mathbb{R}$, existe $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{Z}$, tal que $x' = x + n$. Então:

$$\begin{aligned} \frac{p(x'+1)}{p(x')} &= \frac{p(x+n+1)}{p(x+n)} \\ &= \frac{P_{n-2}\alpha - P_{n-1}\beta}{P_{n-3}\alpha - P_{n-2}\beta} \\ &= \frac{\frac{P_{n-2}}{P_{n-2}}\alpha - \frac{P_{n-1}}{P_{n-2}}\beta}{\frac{P_{n-3}}{P_{n-2}}\alpha - \frac{P_{n-2}}{P_{n-2}}\beta} \\ &= \frac{\alpha - \psi\beta}{\frac{1}{\psi}\alpha - \beta} \\ &= \psi, \end{aligned}$$

onde $\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{P_{n+1}}{P_n} = \psi$. Assim, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{p(x+1)}{p(x)} = \psi$. A demonstração do caso (ii) é similar a demonstração do caso (iii).

Analisando o caso (ii): $p(x) > 0, p(x+1) > 0$. Desse modo, realizando a multiplicação de três termos consecutivos da função $p(x)$, tem-se que:

$$\begin{aligned} p(x+2)p(x+1)p(x) &= \frac{p(x+3)}{p(x+2)}\frac{p(x+2)}{p(x+1)}\frac{p(x+1)}{p(x)} \\ &= \frac{p(x+3)}{p(x)}. \end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{p(x+1)}{p(x)} = \psi$. Assim:

$$\psi^3 = \frac{p(x+3)}{p(x)} \implies \psi = \sqrt[3]{\frac{p(x+3)}{p(x)}}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\psi &= \sqrt[3]{\frac{p(x+3)}{p(x)}} = \sqrt[3]{\frac{p(x+1)+p(x)}{p(x)}} \\ &= \sqrt[3]{1+\frac{P_{n+1}}{P_n}} \\ &= \sqrt[3]{1+\psi} = \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\dots}}} \\ &> 1.\end{aligned}$$

Com isso, pode-se mostrar que a parte do numerador do quociente é positivo.

□

# 4 Conclusão

O estudo definiu a função de Perrin, realizando uma investigação dos seus respectivos teoremas e proposições matemáticas. Com isso, pode-se perceber uma contribuição para o estudo investigativo e aprofundado dessa sequência de Perrin. Não obstante, foi possível trabalhar os quocientes da função de Perrin, observando os limites do quociente da função desses números.

Por fim, para pesquisas futuras, busca-se uma integração dessa pesquisa com outras áreas, aprimorando assim o processo de investigação e evolução matemática em torno da sequência da Perrin.

# Agradecimentos

A parte de desenvolvimento de pesquisas no Brasil contou com o apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq e da Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico (Funcap).

A vertente de desenvolvimento da investigação em Portugal é financiada por Fundos Nacionais através da FCT - Fundação para a Ciência e Tecnologia. I. P, no âmbito do projeto UID / CED / 00194/2020.

## Referências

[1] Alves, F. R. V.; Catarino, P. M. M. C.; Vieira, R. P. M.; Mangueira, M. dos S. Teaching Recurrent Sequences in Brazil using Historical facts and graphical illustrations, *Acta Didactica Napocensia,*, vol. 13, n. 1, p. 87-104, 2020.

[2] Elmore, M. Fibonacci functions. *arxiv*, p. 371-382, 1967.

[3] Han, J. S, Kim, H. S., Neggers, J. On Fibonacci functions with Fibonacci numbers. *Advances in Difference Equations*, p. 1-7, 2012.

[4] Knuth, D. E. *The Art of Computer Programming*. Addison-Wesley, Reading, MA, v.3, 2nd edition, 417, 1998.

[5] Spinadel, V. M. W. de; Buitrago, A. R. Towards van der laan´s plastic number in the plane. *Journal for Geometry and Graphics*, vol. 13, n. 2, p. 163-175, 2009.

[6] Vieira, R. P. M. *Engenharia Didática (ED): o caso da Generalização e Complexificação da Sequência de Padovan ou Cordonnier*. 266f. Dissertação de Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará, 2020.

[7] Vieira, R. P. M.; Alves, F. R. V; Catarino, P. M. C. A historic alanalys is of the padovan sequence. *International Journal of Trends in Mathematics Education Research*, vol. 3, n. 1, p. 8-12, 2020.

[8] Vieira, R. P. M.; Alves, F. R. V. Explorando a sequência de Padovan através de investigação histórica e abordagem epistemológica. *Boletim GEPEM*, vol. 74, p. 161-169, 2019.

[9] Sugumaran, A.; Rajesh, K. Os números duais de Padovan. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. 114, n. 6, p. 131-137, 2017.

**Recebido em 04 de Agosto de 2023.**
**Aceito em 05 de Fevereiro de 2024.**