Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática

https://doi.org/10.34179/revisem.v9i1.19597

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES POLINOMIAIS VIA MATRIZES CIRCULANTES

Aliomar Santos Cavalcanti
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Departamento de Matemática
aliomarsantosc@yahoo.com.br

Barbara Costa da Silva
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Departamento de Matemática
barbara.costasilva@ufrpe.br

Thiago Yukio Tanaka
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Departamento de Matemática
thiago.tanaka@ufrpe.br

Resumo

Neste artigo apresentaremos um método unificado de solução para equações polinomiais com graus dois, três e quatro por meio de uma relação entre um dado polinômio e o polinômio característico de uma determinada Matriz Circulante. Mais precisamente, provaremos que dado um polinômio de grau menor do que cinco, é sempre possível obter uma matriz circulante por meio das igualdades polinomiais anteriormente citadas, e assim, utilizando resultados da Álgebra Linear e de Números Complexos, mostraremos como determinar as raízes do polinômio em questão.

Palavras-chave: Matrizes Circulantes, Polinômios, Raízes.

Abstract

In this article we will present a unified solution method for polynomial equations with degrees two, three and four through a relation between a given polynomial and the characteristic polynomial of a given Circulating Matrix. More precisely, we will prove that given a polynomial of degree less than five, it is always possible to obtain a circulating matrix through the previously mentioned polynomial equalities, and thus, using results from Linear Algebra and Complex Numbers, we will show how to determine the roots of the polynomial in question.

Keywords: Circulant Matrices, Polynomials, Roots.

1 Introdução

A busca por soluções para problemas envolvendo equações sempre foi central, sendo um dos grandes problemas da Matemática e tendo vário(a)s matemático(a)s como protagonistas na busca por essas respostas. Mais ainda, quando não era possível encontrar tais soluções, essas pessoas desenvolveram ferramentas e técnicas que auxiliaram o avanço de algum passo lógico para a obtenção da solução. Dessa maneira, grande parte dos caminhos que levaram ou não às soluções de equações acabaram se tornando métodos ou resultados de grande importância para o crescimento das áreas da Matemática que lidam diretamente com essa questão, como a Álgebra, a Análise e a Teoria dos Números.

É preciso lembrar que dentro do tema das equações há um universo de problemas relacionados, por exemplo, podemos destacar as equações diferenciais ordinárias (EDOs) ou parciais (EDPs)[1], que têm sido um forte objeto de estudo e pesquisa dos matemáticos (e pesquisadores de outras áreas também) nas últimas décadas.

O estudo de equações também existe em um contexto com menos estruturas (que derivadas ou integrais), como é o caso das equações que envolvem apenas polinômios, as *Equações Polinomiais*. Não as subestimemos, as equações polinomiais apesar de serem estruturalmente mais simples, ainda não são completamente entendíveis ou solucionáveis, mesmo com as técnicas que existem atualmente ou com auxílios computacionais. Destacamos as famosas equações Diofantinas[2], que apenas entendemos completamente a classe das equações Diofantinas lineares. Dentre as equações Diofantinas não lineares, uma em particular deixou a comunidade matemática ocupada por cerca de 358 anos, o problema conhecido como o *Último Teorema de Fermat* é extremamente simples de entender, consistia em provar que a equação

$$x^n + y^n = z^n, \tag{1.1}$$

não admitia como solução uma terna de números inteiros (x, y, z) quando n é um número maior do que dois, o que parece ser, a primeira vista, algo contraditório, pois no caso $n = 2$ a equação (1.1) torna-se um problema famoso e cuja solução é conhecida como Ternas Pitagóricas[3].

[1]Em linhas gerais, as Equações Diferenciais são aquelas que envolvem uma função e suas derivadas (derivada total no caso de EDOs e derivada parcial no caso das EDPs), e desejamos descobrir que função é solução para a equação ou quando isso não for possível, se ainda conseguimos obter propriedades para essas soluções como estabilidade, regularidade, limitação, crescimento rápido (*blow-up*), dentre tantos outros aspectos.

[2]Equações que admitem apenas números inteiros como solução para suas variáveis.

[3]As ternas (x, y, z) com $x = p^2 - q^2$, $y = 2pq$ e $z = p^2 + q^2$ são chamadas de *Ternas Pitagóricas*, e são soluções de (1.1) com $n = 2$ e $p, q \in \mathbb{N}$ com $p > q$.

As soluções para equações polinomiais a uma variável que conhecemos hoje, em termos dos coeficientes, têm forte contribuição de François Viète, que foi um matemático francês do século XV que criou a notação algébrica sistematizada para identificar variáveis em um problema de equações. Além disso, sabemos pelo Teorema de Abel-Rufinni que não há uma solução por meio de radicais para equações polinomiais completas de grau maior do que quatro. Uma solução por meio de radicais é aquela que é obtida apenas utilizando operações básicas de adição, subtração, divisão, multiplicação e também operação de extrair raízes de números.

O objetivo deste artigo é expor as técnicas utilizadas na resolução de equações polinomiais cujo grau é menor do que cinco por meio da teoria das matrizes circulantes, sendo este um elo entre a Álgebra Linear e as Equações Polinomiais.

Este trabalho teve por base os artigos [6] e [10], que tratam sobre resultados envolvendo matrizes circulantes e, em particular, aborda o seu uso na busca por soluções de equações polinomiais. Tivemos por base também a dissertação de mestrado [3] do Programa PROFMAT da UFRPE, cujo trabalho deu o título de mestre ao primeiro autor deste trabalho. Utilizamos ainda os materiais [6, 7] para melhorar alguns pontos que não foram considerados em [3]. Ainda que este tema tenha sido abordado por diversos autores, descreveremos precisamente todos os métodos envolvidos, expandindo os cálculos e fazendo detalhamentos teóricos de modo que a abordagem aqui seja inovadora. Em nossa análise serão necessários conhecimentos sobre Números Complexos, Matrizes, Sistemas e Determinantes os quais não desenvolveremos aqui mas que podem ser visto em detalhes [3].

O artigo está divido da seguinte maneira: Na Seção 2, trazemos os resultados sobre as Matrizes Circulantes, definições e resultados da Álgebra Linear associados. Na Seção 3, apresentamos como a teoria das matrizes circulantes nos dá uma maneira unificada para encontrar soluções para equações polinomiais de grau $n = 2$, $n = 3$ e $n = 4$, e comentários sobre casos de graus maiores do que 4. Finalmente, trazemos na última seção a conclusão do trabalho.

2 Matrizes Circulantes

Na primeira parte desta seção, apresentaremos definições e resultados básicos de Álgebra Linear relacionados às matrizes circulantes. Tais matrizes são casos particulares das matrizes de Toeplitz. Indicamos as referências [2] e [8] em caso de necessidade de revisão dos conceitos de Álgebra Linear.

Definição 2.1 (Matriz de Toeplitz)**.** Uma matriz quadrada $T_n = (t_{ij})$ de ordem n é dita *Matriz de Toeplitz* quando $t_{ij} = t_{i-j}$, e nessa situação,

$$T_n = \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & \cdots & \cdots & t_{-(n-1)} \\ t_1 & t_0 & t_{-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ t_2 & t_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t_{-1} & t_{-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & t_1 & t_0 & t_{-1} \\ t_{n-1} & \cdots & \cdots & t_2 & t_1 & t_0 \end{bmatrix}.$$

As matrizes de Toeplitz tem sua aparição em diversos contextos da Matemática, como nas soluções de equações diferenciais ou integrais, e em funções *spline*[4]. Ela aparece também na Engenharia no estudo de processamento de sinais. Em geral, ela surge em diversos problemas e métodos da Física, da Matemática e da Estatística [7].

Um caso particular das matrizes de Toeplitz ocorre quando $t_k = t_{-(n-k)} = t_{k-n}$, com $k = 1, 2, \ldots, n-1$, o que junto com a Definição 2.1 se traduz da seguinte maneira: cada linha desta nova matriz é obtida por um deslocamento a direita (e cíclico) da linha imediatamente superior. Matrizes com essa propriedade são conhecidas como *Matrizes Circulantes*.

Definição 2.2 (Matriz Circulante)**.** Uma matriz quadrada C de ordem n é dita uma *Matriz Circulante* quando seus coeficientes são reais, e cada linha na posição i é formada por um deslocamento cíclico de $i-1$ posições, para a direita, das coordenadas do vetor $(c_0, c_1, c_2, ..., c_{n-1})$, e nessa situação,

$$C = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & \cdots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & c_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ c_{n-2} & c_{n-1} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & c_1 & c_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & c_{n-1} & c_0 & c_1 \\ c_1 & \cdots & \cdots & c_{n-2} & c_{n-1} & c_0 \end{bmatrix}.$$

Denotaremos a matriz circulante C por $C(c_0, c_1, ..., c_{n-1})$, sendo c_0, c_1, ..., c_{n-1} os elementos da primeira linha de C.

[4] *Splines* são funções definidas por partes, onde estas são funções polinomiais. *Splines* são usados no ajuste de curvas e Teoria da Aproximação.

Exemplo 2.3. Sejam a, b, c, d números reais. São exemplos de matrizes circulantes de ordem $n < 5$

$$C(a) = [a], \quad C(a,b) = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}, \quad C(a,b,c) = \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix}$$

$$\text{e} \quad C(a,b,c,d) = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{bmatrix}$$

Conforme a Definição 2.2, a expressão "circulante" se refere aos deslocamentos cíclicos ordenados das coordenadas do vetor $(c_0, ..., c_{n-1})$ dado, mais ainda, denotando $C = C(c_0, c_1, ..., c_{n-1}) = (C_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, então o termo C_{ij} que ocupa a i-ésima linha e j-ésima coluna é dado por

$$C_{ij} = c_{(j-i) \bmod n}.$$

Atribuindo cores a cada termo, temos uma rápida visualização de como os elementos c_k's estão distribuindo em uma matriz circulante

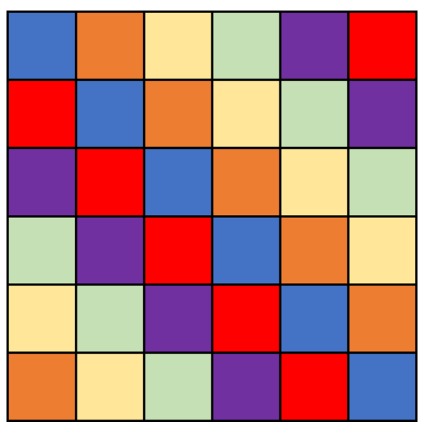

Figura 1: Visualização por cores de elementos em uma matriz circulante 6×6. Fonte: Autores.

Algumas das aplicações das Matrizes circulantes estão relacionadas com a transformada de Fourier discreta e no estudo de códigos cíclicos para correção de erros (ver [7]).

Denotaremos por C_n a matriz circulante $C_n = C(0, 1, 0, ..., 0)$, ou seja,

$$C_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Veremos que esta matriz tem um papel fundamental na escrita de matrizes circulantes no seguinte resultado.

Proposição 2.4. *Dada uma matriz circulante $C = C(a_0, a_1, ..., a_{n-1})$, então o polinômio $q(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... a_{n-1} x^{n-1}$ satisfaz*

$$C = q(C_n) = a_0 I + a_1 C_n + a_2 C_n^2 + \cdots + a_{n-1} C_n^{n-1}, \tag{2.1}$$

em que I denota a matriz identidade de ordem n e C_n^k é o produto de C_n por C_n uma quantidade k de vezes.

Demonstração. A demonstração consiste em calcular a expressão do lado direito da igualdade em (2.1) e verificar que obtemos exatamente a matriz circulante C. O trabalho então se resume a provar que C_n^k, com $k \in 0, ..., n-1$ é dado por

$$C_n^k = C(e_{k+1}), \tag{2.2}$$

em que e_k é o vetor da base canônica de $\mathbb{R}^n$ que possui 1 na k-ésima coordenada e zero em todas as outras. Faremos uma indução forte em k. Note que, pela definição de C_n, $C_n = C_n^1 = C(e_2)$.

Suponha então que vale a hipótese de indução $C_n^{i-1} = C_n(e_i)$, vamos então verificar se vale $C_n^i = C_n(e_{i+1})$. Realizando o produto das matrizes, e denotando por v^t o transposto do vetor v,

$$\begin{aligned} C_n^i &= C_n^{i-1}C_n = C_n(e_i)C_n \\ &= \begin{bmatrix} e_i \\ e_{i+1} \\ \vdots \\ e_n \\ e_1 \\ \vdots \\ e_{i-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e_i \\ e_{i+1} \\ \vdots \\ e_n \\ e_1 \\ \vdots \\ e_{i-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_n^t & e_1^t & e_2^t & \cdots & e_{n-1}^t \end{bmatrix} = C_n(e_{i+1}) \end{aligned}$$

pois note que o produto envolvendo elementos da linha da primeira matriz com colunas da segunda matriz só é não nulo quando ocorre um produto da forma e_k na linha por e_k na coluna. Assim, teremos um produto e_i da primeira linha com e_i na $(i+1)$-ésima coluna, logo a primeira linha é e_{i+1}. Já na segunda linha, representada por e_{i+1}, só terá elemento não nulo no produto quando a coluna for e_{i+1} que ocorre na $(i+2)$-ésima coluna, portanto a segunda linha será e_{i+2} e assim por diante. Assim, a propriedade vale para todo $i \in \mathbb{N}$.

Uma vez que provamos (2.2), provar a identidade (2.1) se resume a expansão do cálculo envolvendo soma das matrizes $a_kC_n^k = C(a_ke_{k+1})$, a qual omitiremos. □

A escrita acima nos permite relacionar os autovalores de uma matriz circulante C qualquer com os autovalores de C_n por meio do polinômio q associado a C. Este resultado é visto no seguinte teorema.

Teorema 2.5 (Teorema da Aplicação Espectral)**.** *Dada uma matriz circulante $C = C(a_0, a_1, ..., a_{n-1})$. Então todos os autovalores de C são da forma $q(\lambda)$ em que λ é autovalor de C_n e $q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{n-1}x^{n-1}$. Em símbolos,*

$$\text{Spec}\left(C = \sum_{k=0}^{n-1} a_kC_n^k\right) = \left\{\sum_{k=0}^{n-1} a_k\lambda^k \,:\, \lambda \in \text{Spec}(\mathrm{C_n})\right\}.$$

Demonstração. Seja λ um autovalor de C_n e $v = v(\lambda)$ um autovetor associado, ou seja, $C_n v = \lambda v$ e $C_n^k v = \lambda^k v$. Pela Proposição 2.4, $C = q(C_n)$. Mostraremos que $q(\lambda)$ é um autovalor de C com autovetor v. De fato,

$$\begin{aligned}
(q(\lambda)I - C)v &= q(\lambda)v - Cv = q(\lambda)v - q(C_n)v \\
&= q(\lambda)v - [a_0 I + a_1 C_n + ... + a_{n-1}C_n^{n-1}]v \\
&= q(\lambda)v - [a_0 v + a_1 C_n(v) + ... + a_{n-1}C_n^{n-1}(v)] \\
&= q(\lambda)v - [a_0 v + a_1(\lambda v) + ... + a_{n-1}(\lambda^{n-1}v)] \\
&= q(\lambda)v - [a_0 + a_1\lambda + ... + a_{n-1}\lambda^{n-1}]v \\
&= q(\lambda)v - q(\lambda)v = 0.
\end{aligned}$$

Mostraremos agora que dado um autovalor σ de C, então existe um autovalor λ de C_n tal que $\sigma = q(\lambda)$. Considere o polinômio

$$r(x) = q(x) - \sigma, \tag{2.3}$$

que possui grau $n-1$. Pelo Teorema Fundamental da Álgebra (ver [1]), $r(x)$ é completamente fatorável em $\mathbb{C}[x]$, dessa forma podemos escrever

$$r(x) = a_{n-1}\prod_{i=1}^{n-1}(x - \mu_i), \tag{2.4}$$

em que μ_i são as raízes complexas de $r(x)$. Seja $w = w(\sigma)$ um autovetor de C associado a σ. Segue por definição que

$$Cw = \sigma w \quad \Leftrightarrow \quad (C - \sigma I)w = 0,$$

e como $w \neq 0$, pois é um autovetor, isso nos diz que a matriz $C - \sigma I$ não é invertível. Combinando as expressões para $r(x)$ dadas em (2.3) e (2.4), segue que

$$C - \sigma I = a_{n-1}\prod_{i=1}^{n}(C_n - \mu_i I). \tag{2.5}$$

Como $C - \sigma I$ é uma matriz não invertível, então para algum $k \in \{1, ..., n-1\}$, a expressão (2.5) nos garante que $C_n - \mu_k I$ não é invertível, ou seja, μ_k é autovalor de C_n. Mais ainda, como μ_k é raiz de $r(x)$, então

$$0 = r(\mu_k) = q(\mu_k) - \sigma \quad \Rightarrow \quad \sigma = q(\mu_k),$$

isso finaliza a demonstração. □

Proposição 2.6. *Os autovalores de C_n, λ_n, são exatamente as n raízes da unidade do polinômio $y = x^n$, ou seja $\lambda_k = \exp(i2k\pi/n)$, $k = 0, 1, \ldots n-1$.*

É possível demonstrar este fato por meio do Princípio da Indução Finita sobre n, considerando o determinante da matriz $\lambda I - C_n$.

Como veremos na próxima seção, as matrizes circulantes que utilizaremos serão da forma $C(0, b, c, d, \ldots)$ com traço igual a zero. Isto ocorrerá devido a mudança de variável $y = x + \frac{a_{n-1}}{na_n}$, assim temos o seguinte corolário.

Corolário 2.7. *Dada uma matriz circulante da forma $C(0, b, c, d, ...)$, então*

$$Spec\,(C(0, b, c, d, \ldots)) = \left\{b\lambda_k + c\lambda_k^2 + d\lambda_k^3 \ldots \,:\, k = 0, 1, \ldots n\right\},$$

onde $\lambda_k = \exp(i2k\pi/n)$.

3 Matrizes Circulantes e Equações Polinomiais

Mostraremos nesta seção como resolver equações polinomiais envolvendo um polinômio de grau $n < 5$ utilizando matrizes circulantes e os resultados vistos na seção anterior. Provaremos que o problema de encontrar raízes de polinômios de grau $n < 5$ é equivalente a resolver um sistema de equações. Com efeito, dado tal polinômio, podemos supor que este é igual ao polinômio característico de uma matriz circulante de ordem n. Fazemos isso pelo fato de sabermos todas as raízes do polinômio característico de qualquer matriz circulante, daí o sistema é obtido por meio da igualdade de polinômios.

Mais precisamente, o procedimento pode ser sistematizado em passos: Seja $\tilde{p}(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ um polinômio de grau $n < 5$ no qual desejamos encontrar suas raízes, então:

1º Passo: Eliminação do coeficiente de grau $n-1$ e simplificação. Faremos a mudança de variável considerando $x = y + \alpha$, escolhendo um valor apropriado para α de modo que em $\tilde{p}(y)$ o coeficiente de y^{n-1} seja zero. Note que

$$\begin{aligned}
\tilde{p}(y) &= a_n(y+\alpha)^n + a_{n-1}(y+\alpha)^{n-1} + ... + a_1(y+\alpha) + a_0 \\
&= a_n\left(y^n + ny^{n-1}\alpha + ... + ny\alpha^{n-1} + \alpha^n\right) \\
&\quad + a_{n-1}\left(y^{n-1} + (n-1)y^{n-2}\alpha + ... + (n-1)y\alpha^{n-2} + \alpha^{n-1}\right) \\
&\quad + ... + a_1(y+\alpha) + a_0 \\
&= a_n y^n + \left(a_n n\alpha + a_{n-1}\right) y^{n-1} + ... + \left(a_n n\alpha^{n-1} + a_{n-1}(n-1)\alpha^{n-2} + ... + a_1\right) y \\
&\quad + \left(a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + ... + a_1\alpha + a_0\right).
\end{aligned}$$

Como queremos que o coeficiente do termo y^{n-1} seja nulo, então forçamos a condição

$$a_n n\alpha + a_{n-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\frac{a_{n-1}}{na_n}.$$

Dessa maneira, pondo

$$x = y - \frac{a_{n-1}}{na_n}, \tag{3.1}$$

obtemos

$$\tilde{p}(y) = a_n y^n + b_{n-2}y^{n-2} + ... + b_1 y + b_0.$$

Observe que o polinômio $\tilde{p}(x)$ não tem as mesmas raízes que $\tilde{p}(y)$, mas existe uma bijeção entre as raízes destes polinômios, a saber $x \mapsto x + \frac{a_n}{na_{n-1}}$.

Agora, como o intuito é resolver a equação $\tilde{p}(y) = 0$, podemos considerar um polinômio p obtido a partir de $\tilde{p}$, mas cujo coeficiente do termo maior grau é igual a um, basta dividir a expressão por a_n (que é diferente de zero por hipótese). Podemos então trabalhar com o polinômio da forma

$$p(y) = y^n + c_{n-2}y^{n-2} + ... + c_1 y + c_0,$$

em que $c_i = \frac{b_i}{a_n}$, $i = 0, ..., n-2$.

2º Passo: Tradução matricial e cálculo do polinômio característico. Consideramos um vetor desconhecido v cuja primeira coordenada é nula, e associado a este vetor, tomamos uma matriz circulante $C = C(v)$ e calculamos o polinômio característico $p_C(y) = \det(yI - C)$.

3º Passo: Igualdade de polinômios. Impomos a condição de igualdade $p_C(y) = p(y)$, que resulta em um sistema de equações cujas incógnitas são os coeficientes a serem encontrados da matriz circulante C (coordenadas do vetor v). Assim, ao fim deste passo, encontramos os coeficientes do polinômio q associado com a matriz circulante C em questão. O intuito por trás dos três primeiros passos é que, por meio da igualdade $p_C(y) = p(y)$, encontraremos as raízes de $p(y)$ por meio dos resultados para matrizes circulantes $p_C(y)$.

Observação 3.1. Na resolução dos sistemas, vamos encontrar vários valores para esses coeficientes da matriz circulante que tem o polinômio característico igual ao polinômio de y. Para a solução dos exemplos, faremos uma escolha particular desses coeficientes, o que não tira a generalidade do resultado, uma vez que outra escolha ocasionará apenas uma permutação entre as soluções.

4º Passo: Encontrando as raízes de $p(y)$. Pelo Teorema 2.5, todos os autovalores da matriz circulante C (raízes do polinômio característico $p_C(y)$) são os valores de $q(\lambda)$, em que λ são os autovalores da matriz circulante C_n, com n o grau de p, e q é o polinômio associado a $C(v)$. Da igualdade, encontramos as raízes de $p(y)$.

5º Passo: Encontrando as raízes de $p(x)$. Uma vez encontradas as raízes de $p(y)$, substituímos essas raízes na expressão (3.1) da mudança de variável e obtemos as raízes de $p(x)$.

3.1 Equações polinomiais de grau $n = 2$ (quadráticas).

Utilizando o procedimento descrito no começo da seção, procuraremos por soluções de equações polinomiais quadráticas.

1º Passo. Considere um polinômio do segundo grau $\tilde{p}(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$. Como, por definição, $a_2 \neq 0$, então podemos escrever

$$\tilde{p}(x) = a_2\left(x^2 + \frac{a_1}{a_2}x + \frac{a_0}{a_2}\right) = a_2p(x),$$

Portanto, encontrar as raízes de $\tilde{p}$ é equivalente a encontrar as raízes de p. Fazendo $\alpha = \frac{a_1}{a_2}$ e $\beta = \frac{a_0}{a_2}$, então podemos escrever

$$p(x) = x^2 + \alpha x + \beta,$$

mais ainda, fazendo a mudança de variável $x = y - \frac{\alpha}{2}$, obtemos

$$\begin{aligned} p(y) &= \left(y - \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \alpha\left(y - \frac{\alpha}{2}\right) + \beta \\ &= y^2 - \alpha y + \frac{\alpha^2}{4} + \alpha y - \frac{\alpha^2}{2} + \beta \\ &= y^2 + \frac{4\beta - \alpha^2}{4}. \end{aligned}$$

2º Passo. Consideremos agora a matriz circulante $C = C(0, b)$ e o polinômio característico de C,

$$p_C(y) = \det(yI - C) = \det\begin{pmatrix} y & -b \\ -b & y \end{pmatrix} = y^2 - b^2.$$

3º Passo. Fazendo $p_C(y) = p(y)$, obtemos

$$y^2 - b^2 = y^2 + \frac{4\beta - \alpha^2}{4} \quad \Rightarrow \quad -b^2 = \frac{4\beta - \alpha^2}{4} \quad \Rightarrow \quad b = \pm\sqrt{\frac{\alpha^2 - 4\beta}{4}}.$$

Sem perda de generalidade, adotaremos $b = \frac{\sqrt{\alpha^2-4\beta}}{2}$. Uma vez encontrado o valor de b, determinamos completamente a matriz circulante $C = C(0, b) = C\left(0, \frac{\sqrt{\alpha^2-4\beta}}{2}\right)$, cujo polinômio característico $p_C(y)$ é igual a $p(y)$.

4º Passo. Associado a C, podemos considerar o polinômio $q(y) = by = \frac{\sqrt{\alpha^2-4\beta}}{2}y$. Pelo Teorema 2.5, os autovalores de C (raízes de $p_C(y)$) são os valores $q(\lambda)$, em que λ são os autovalores da matriz circulante $C_2 = C(0, 1)$. Perceba que

$$\det(\lambda I - C(0, 1)) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1,$$

ou seja, os autovalores são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 1$. Assim os autovalores de C são dados por

$$q(-1) = -\frac{\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2} = y_1 \quad \text{e} \quad q(1) = \frac{\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2} = y_2.$$

5º Passo. Segue pela mudança de variável que $x = y - \frac{\alpha}{2}$, assim

$$x_1 = \frac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2}.$$

□

Observação 3.2. Perceba que se tivéssemos optado pela escolha $b = -\frac{\sqrt{\alpha^2-4\beta}}{2}$, teríamos obtido as mesmas soluções, porém com índices trocados. Isso reforça a observação 3.1.

Não abordaremos exemplos de equações quadráticas por serem usualmente abordadas desde o Ensino Básico.

3.2 Equações polinomiais de grau $n = 3$ (cúbicas).

No que segue, faremos uma abordagem análoga ao tratamento do caso $n = 2$.

1º Passo. Seja $\tilde{p}(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, um polinômio de grau 3 qualquer. Como $a_3 \neq 0$, por definição, então podemos escrever $\tilde{p}(x) = a_3p(x)$, em que $p(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, com

$$\alpha = \frac{a_2}{a_3}, \quad \beta = \frac{a_1}{a_3} \quad \text{e} \quad \gamma = \frac{a_0}{a_3},$$

de maneira que, encontrar as raízes de $\tilde{p}(x)$ equivale a encontrar as raízes de $p(x)$. Mais ainda, fazendo a mudança de variável $x = y - \frac{\alpha}{3}$, obtemos:

$$\begin{aligned} p(y) &= \left(y - \frac{\alpha}{3}\right)^3 + \alpha\left(y - \frac{\alpha}{3}\right)^2 + \beta\left(y - \frac{\alpha}{3}\right) + \gamma \\ &= y^3 - 3y^2\left(\frac{\alpha}{3}\right) + 3y\left(\frac{\alpha}{3}\right)^2 - \left(\frac{\alpha}{3}\right)^3 + \alpha\left[y^2 - \frac{2y\alpha}{3} + \frac{\alpha^2}{9}\right] + \beta y - \frac{\alpha\beta}{3} + \gamma \\ &= y^3 + \left(\frac{\alpha^2}{3} - \frac{2\alpha^2}{3} + \beta\right)y + \left(-\frac{\alpha^3}{27} + \frac{\alpha^3}{9} - \frac{\alpha\beta}{3} + \gamma\right) \\ &= y^3 + \frac{3\beta - \alpha^2}{3}y + \frac{27\gamma - 9\alpha\beta + 2\alpha^3}{27} \\ &= y^3 + \tilde{\beta}y + \tilde{\gamma}, \end{aligned}$$

com $\tilde{\beta} = \frac{3\beta - \alpha^2}{3}$ e $\tilde{\gamma} = \frac{27\gamma - 9\alpha\beta + 2\alpha^3}{27}$.

2º Passo. Vamos associar a $p(y)$ uma matriz circulante $C = C(0, b, c)$ e $q(y) = by + cy^2$ o polinômio associado a C. Calculando o polinômio característico de C na variável y, obtemos

$$p_C(y) = \det(yI - C) = \det\begin{pmatrix} y & -b & -c \\ -c & y & -b \\ -b & -c & y \end{pmatrix} = y^3 - (3bc)y - b^3 - c^3.$$

3º Passo. A partir da igualdade $p_C(y) = p(y)$, obtemos

$$\begin{cases} -3bc = \tilde{\beta} \\ -b^3 - c^3 = \tilde{\gamma} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} bc = -\frac{\tilde{\beta}}{3} \\ b^3 + c^3 = -\tilde{\gamma} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^3c^3 = -\frac{\tilde{\beta}^3}{27} \\ b^3 + c^3 = -\tilde{\gamma} \end{cases}.$$

Utilizando as Relações de Girard, que nos dão informações sobre as raízes de um polinômio por meio de relações entre os seus coeficientes, observando a última relação, temos que b^3 e c^3 são raízes da equação polinomial de grau dois na variável t,

$$t^2 + \tilde{\gamma}t - \frac{\tilde{\beta}^3}{27} = 0,$$

assim, é possível resolver essa equação acima e obter as soluções

$$t_1 = b^3 = \frac{-\tilde{\gamma} + \sqrt{\tilde{\gamma}^2 + \frac{4\tilde{\beta}^3}{27}}}{2}$$

e, sem perda de generalidade, tomaremos

$$b = \sqrt[3]{\frac{-\tilde{\gamma} + \sqrt{\tilde{\gamma}^2 + \frac{4\tilde{\beta}^3}{27}}}{2}}.$$

Usando que $bc = -\tilde{\beta}/3$, obtemos

$$c = \sqrt[3]{\frac{-\tilde{\gamma} - \sqrt{\tilde{\gamma}^2 + \frac{4\tilde{\beta}^3}{27}}}{2}}.$$

Encontrados os valores de b e c, podemos determinar o polinômio q associado a matriz C,

$$q(y) = \left(\sqrt[3]{\frac{-\tilde{\gamma} + \sqrt{\tilde{\gamma}^2 + \frac{4\tilde{\beta}^3}{27}}}{2}}\right) y + \left(\sqrt[3]{\frac{-\tilde{\gamma} - \sqrt{\tilde{\gamma}^2 + \frac{4\tilde{\beta}^3}{27}}}{2}}\right) y^2.$$

4º Passo. Pelo Teorema 2.5, os autovalores de C (raízes de $p_C(y)$) são os valores de $q(\lambda)$, em que λ são os autovalores da matriz circulante $C_3 = C(0,0,1)$, ou seja, as raízes cúbicas da unidade, portanto $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\lambda_3 = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\text{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Assim,

$$y_1 = q(1) = \sqrt[3]{\frac{-\tilde{\gamma} + \sqrt{\tilde{\gamma}^2 + \frac{4\tilde{\beta}^3}{27}}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-\tilde{\gamma} - \sqrt{\tilde{\gamma}^2 + \frac{4\tilde{\beta}^3}{27}}}{2}},$$

$$\begin{aligned} y_2 &= q\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \sqrt[3]{\frac{-\tilde{\gamma} + \sqrt{\tilde{\gamma}^2 + \frac{4\tilde{\beta}^3}{27}}}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \sqrt[3]{\frac{-\tilde{\gamma} - \sqrt{\tilde{\gamma}^2 + \frac{4\tilde{\beta}^3}{27}}}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
y_3 &= q\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\
&= \sqrt[3]{\frac{-\tilde{\gamma}+\sqrt{\tilde{\gamma}^2+\frac{4\tilde{\beta}^3}{27}}}{2}}\cdot\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\sqrt[3]{\frac{-\tilde{\gamma}-\sqrt{\tilde{\gamma}^2+\frac{4\tilde{\beta}^3}{27}}}{2}}\cdot\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2.
\end{aligned}
$$

5º Passo. Para obter as soluções na variável x, consideramos a mudança de variável $x = y - \frac{\alpha}{3}$ donde $x_i = y_i - \frac{\alpha}{3}$ para $i = 1, 2, 3$.

□

Veremos o procedimento aplicado no seguinte exemplo:

Exemplo 3.3. Determine as raízes de $p(x) = x^3 - 3x^2 - 3x - 1$.

Solução. Primeiramente, note que utilizando a relação de Girard, o produto das raízes é igual a 1, portanto, as possibilidades para raízes inteiras seriam $x = 1$ ou $x = -1$, mas nenhum desses valores é um zero para $p(x)$. Além disso, não existe, como veremos, uma raiz de fácil expressão a ser deduzida, e portanto não conseguimos fatorar o polinômio como produto de polinômios de graus menores. Seguiremos então o roteiro dado pelo algoritmo anterior.

Fazendo a mudança de variável $x = y - \frac{(-3)}{3} = y + 1$, obtemos

$$p(y) = (y+1)^3 - 3(y+1)^2 - 3(y+1) - 1 = y^3 - 6y - 6.$$

Vamos associar a $p(y)$ a matriz circulante $C = C(0, b, c)$ e seja $q(y) = by + cy^2$ o polinômio associado a C.

Determinando o polinômio característico de C, temos

$$p_C(y) = \det(yI - C) = \det\begin{pmatrix} y & -b & -c \\ -c & y & -b \\ -b & -c & y \end{pmatrix} = y^3 - (3bc)y - b^3 - c^3.$$

Forçando a condição $p(y) = p_C(y)$, temos o sistema

$$\begin{cases} -3bc = -6 \\ -b^3 - c^3 = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} bc = 2 \\ b^3 + c^3 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^3c^3 = 8 \\ b^3 + c^3 = 6 \end{cases}.$$

Note que b^3 e c^3 são raízes da equação polinomial, $t^2 - 6t + 8 = 0$. Então $t_1 = 2$ e $t_2 = 4$. Podemos então considerar $t_1 = b^3$ o que nos dá $b = \sqrt[3]{2}$, e pela relação $bc = 2$, temos que $c = \sqrt[3]{4}$. Portanto $q(y) = by + cy^2 = \sqrt[3]{2}y + \sqrt[3]{4}y^2$. Sabemos que as raízes cúbicas da unidade são da forma

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2},$$

portanto segue que $q(\lambda_1)$, $q(\lambda_2)$ e $q(\lambda_3)$ são as raízes de $p_C(y) = p(y)$, donde

$$\begin{aligned}
y_1 &= q(\lambda_1) = \sqrt[3]{2}(1) + \sqrt[3]{4}(1)^2 = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}, \\
y_2 &= q(\lambda_2) = \sqrt[3]{2}\left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right) + \sqrt[3]{4}\left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(-\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}\right) + i\sqrt{3}\left(\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{4}\right)\right], \\
y_3 &= q(\lambda_3) = \sqrt[3]{2}\left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right) + \sqrt[3]{4}\left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(-\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}\right) - i\sqrt{3}\left(\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{4}\right)\right].
\end{aligned}$$

Pela mudança $x = y + 1$, as raízes de $p(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 1$ são

$$\begin{aligned}
x_1 &= y_1 + 1 = 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}, \\
x_2 &= y_2 + 1 = \frac{1}{2}\left[\left(2 - \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}\right) + i\sqrt{3}\left(\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{4}\right)\right], \\
x_3 &= y_3 + 1 = \frac{1}{2}\left[\left(2 - \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}\right) - i\sqrt{3}\left(\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{4}\right)\right].
\end{aligned}$$

■

3.3 Equações polinomiais de grau $n = 4$ (quártica).

Finalmente, consideraremos o caso $n = 4$. Nesse ponto, já sabemos que, ao procurar por raízes de polinômios, podemos sempre dividir pelo coeficiente do maior grau para sempre trabalhar com o polinômio cujo coeficiente do termo de maior grau é igual a um. Ou seja, podemos trabalhar com o polinômio da forma $p(x) = x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$. Apesar do detalhamento abaixo ser feito em mais etapas, segue de maneira análoga ao que fizemos nos casos anteriores.

1º Passo. Fazendo a mudança de variável $x = y - \frac{\alpha}{4}$, obtemos o polinômio

$$\begin{aligned}
p(y) &= \left(y-\frac{\alpha}{4}\right)^4 + \alpha\left(y-\frac{\alpha}{4}\right)^3 + \beta\left(y-\frac{\alpha}{4}\right)^2 + \gamma\left(y-\frac{\alpha}{4}\right) + \delta \\
&= y^4 - 4y^3\left(\frac{\alpha}{4}\right) + 6y^2\left(\frac{\alpha}{4}\right)^2 - 4y\left(\frac{\alpha}{4}\right)^3 + \left(\frac{\alpha}{4}\right)^4 \\
&\quad +\alpha\left[y^3 - 3y^2\left(\frac{\alpha}{4}\right) + 3y\left(\frac{\alpha}{4}\right)^2 - \left(\frac{\alpha}{4}\right)^3\right] + \beta\left[y^2 - 2y\left(\frac{\alpha}{4}\right) + \left(\frac{\alpha}{4}\right)^2\right] \\
&\quad +\gamma\left(y-\frac{\alpha}{4}\right) + \delta \\
&= y^4 + \left[\beta - \frac{3\alpha^2}{8}\right]y^2 + \left[\frac{\alpha^3}{8} - \frac{\alpha\beta}{2} + \gamma\right]y + \left[-\frac{3\alpha^4}{256} + \frac{\alpha^2\beta}{16} - \frac{\alpha\gamma}{4} + \delta\right] \\
&= y^4 + \left[\frac{8\beta - 3\alpha^2}{8}\right]y^2 + \left[\frac{\alpha^3 - 4\alpha\beta + 8\gamma}{8}\right]y + \left[\frac{-3\alpha^4 + 16\alpha^2\beta - 64\alpha\gamma + 256\delta}{256}\right] \\
&= y^4 + \tilde{\beta}y^2 + \tilde{\gamma}y + \tilde{\delta},
\end{aligned}$$

em que

$$\tilde{\beta} = \frac{8\beta - 3\alpha^2}{8}, \quad \tilde{\gamma} = \frac{\alpha^3 - 4\alpha\beta + 8\gamma}{8} \quad \text{e} \quad \tilde{\delta} = \frac{-3\alpha^4 + 16\alpha^2\beta - 64\alpha\gamma + 256\delta}{256}.$$

Assumiremos que $\tilde{\beta}, \tilde{\gamma}$ e $\tilde{\delta}$ não sejam todos nulos, de modo a não considerar o caso trivial $p(y) = y^4$.

2º Passo. Como nos casos anteriores, iremos associar $p(y)$ a uma matriz circulante $C = C(0, b, c, d)$ e a $q(y) = by + cy^2 + dy^3$, o polinômio associado a C. O polinômio característico de C é dado por

$$\begin{aligned}
p_C(y) = \det(yI - C) &= \det\begin{pmatrix} y & -b & -c & -d \\ -d & y & -b & -c \\ -c & -d & y & -b \\ -b & -c & -d & y \end{pmatrix} \\
&= y^4 - (4bd + 2c^2)y^2 - 4c(b^2 + d^2)y + (c^4 - b^4 - d^4 - 4bc^2d + 2b^2d^2).
\end{aligned} \tag{3.2}$$

3º Passo. Igualando os polinômios $p(y)$ e $p_C(y)$, obtemos o seguinte sistema

$$\left\{\begin{array}{l} 4bd + 2c^2 = -\tilde{\beta} \\ 4c(b^2 + d^2) = -\tilde{\gamma} \\ c^4 - b^4 - d^4 - 4bc^2d + 2b^2d^2 = \tilde{\delta} \end{array}\right. . \tag{3.3}$$

Perceba que se $c = 0$, então $\tilde{\gamma} = 0$, e assim, $p(y) = y^4 + \tilde{\beta} y^2 + \tilde{\delta}$, que é uma equação biquadrada e poderia ser reduzida a uma equação quadrática por meio de uma mudança de variável $z = y^2$, e resolvida pelo método para grau 2.

Supondo agora $c \neq 0$, perceba que podemos reescrever as duas primeiras linhas de (3.3) pondo bd e $b^2 + d^2$ em função de c,

$$bd = \frac{-\tilde{\beta} - 2c^2}{4},$$

e

$$b^2 + d^2 = \frac{-\tilde{\gamma}}{4c},$$

e então reescrever a terceira linha em função de c da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\tilde{\delta} &= c^4 - b^4 - d^4 - 4bc^2d + 2b^2d^2 = c^4 - (b^4 + d^4) - 4bc^2d + 2b^2d^2 \\
&= c^4 - [(b^2 + d^2)^2 - 2b^2d^2] - 4(bd)c^2 + 2b^2d^2 \\
&= c^4 - (b^2 + d^2)^2 - 4(bd)c^2 + 4(bd)^2 \\
&= c^4 - \left(\frac{-\tilde{\gamma}}{4c}\right)^2 - 4\left(\frac{-\tilde{\beta} - 2c^2}{4}\right)c^2 + 4\left(\frac{-\tilde{\beta} - 2c^2}{4}\right)^2 \\
&= c^4 - \frac{\tilde{\gamma}^2}{16c^2} + \left(\tilde{\beta} + 2c^2\right)c^2 + \left(\frac{\tilde{\beta}^2 + 4\tilde{\beta}c^2 + 4c^4}{4}\right) \\
&= c^4 - \frac{\tilde{\gamma}^2}{16c^2} + \tilde{\beta}c^2 + 2c^4 + \frac{\tilde{\beta}^2}{4} + \tilde{\beta}c^2 + c^4 \\
&= 4c^4 - \frac{\tilde{\gamma}^2}{16c^2} + 2\tilde{\beta}c^2 + \frac{\tilde{\beta}^2}{4}.
\end{aligned}$$

Multiplicando ambos os lados da primeira e última igualdade da expressão anterior por $\frac{c^2}{4}$, obtemos

$$\frac{\delta c^2}{4} = c^6 - \frac{\tilde{\gamma}^2}{64} + \frac{\tilde{\beta}c^4}{2} + \frac{\tilde{\beta}^2c^2}{16} \quad \Rightarrow \quad c^6 + \frac{\tilde{\beta}c^4}{2} + \left(\frac{\tilde{\beta}^2 - 4\delta}{16}\right)c^2 - \frac{\tilde{\gamma}^2}{64} = 0.$$

Fazendo a mudança de variável $t = c^2$, obtemos a seguinte equação cúbica em t,

$$t^3 + \frac{\tilde{\beta}}{2}t^2 + \left(\frac{\tilde{\beta}^2 - 4\delta}{16}\right)t - \frac{\tilde{\gamma}^2}{64} = 0.$$

Portanto, o sistema (3.3) é equivalente ao seguinte sistema

$$\begin{cases} bd = \dfrac{-\tilde{\beta} - 2c^2}{4} \\ b^2 + d^2 = -\dfrac{\tilde{\gamma}}{4c} \\ t = c^2 \\ t^3 + \dfrac{\tilde{\beta}}{2}t^2 + \left(\dfrac{\tilde{\beta}^2 - 4\delta}{16}\right)t - \dfrac{\tilde{\gamma}^2}{64} = 0 \end{cases}. \tag{3.4}$$

Ao resolvermos a última linha deste sistema, obteremos um valor para t e, consequentemente para c. Substituindo este valor na primeira e segunda linha, obtemos os valores de bd (e consequentemente o valor de b^2d^2) e $b^2 + d^2$. Podemos então resolver a equação $s^2 - (b^2+d^2)s + (b^2d^2) = 0$ e descobrir os valores de b^2 e d^2, e consequentemente de b e d. Uma vez que temos os valores de b, c e d, então $q(y) = by + cy^2 + dy^3$ está determinado.

4º Passo. Pelo Teorema 2.5, os autovalores de C (raízes de $p_C(y)$) são os valores de $q(\lambda)$, em que λ são os autovalores da matriz circulante $C_4 = C(0,0,0,1)$, ou seja, as raízes quartas da unidade. Portanto $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = i$, $\lambda_3 = -1$ e $\lambda_4 = -i$. Assim, substituindo esses valores em $q(y)$, encontraremos as raízes de $p(y)$. Dessa forma,

$$\begin{cases} q(1) &= b + c + d = y_1 \\ q(-1) &= -b + c - d = y_2 \\ q(i) &= bi - c - di = i(b-d) - c = y_3 \\ q(-i) &= -bi - c + di = i(d-b) - c = y_4 \end{cases}. \tag{3.5}$$

5º Passo. Considerando a mudança $x_i = y_i - \frac{\alpha}{4}$, $i = 1,2,3,4$, encontraremos as raízes de $p(x)$, finalizando assim o resultado.

□

Veremos como aplicar o método no seguinte exemplo

Exemplo 3.4. Determine as raízes de $p(x) = x^4 - 12x^3 + 62x^2 - 140x + 125$.

Solução. Note que, pelas relações de Girard, as possibilidades de raízes inteiras seriam os divisores de 125, mas nenhum desses valores é raiz de $p(x)$, portanto não há raízes inteiras para $p(x)$. Como veremos, todas as raízes serão complexas. Fazendo a mudança de variável $x = y - \frac{(-12)}{4} = y + 3$, obtemos

$$p(y) = (y+3)^4 - 12(y+3)^3 + 62(y+3)^2 - 140(y+3) + 125 = y^4 + 8y^2 + 16y + 20.$$

Vamos agora impor a condição de que este polinômio seja igual ao polinômio característico da matriz $C = C(0,b,c,d)$. Determinando o polinômio característico de C, temos

$$p_C(y) = \det(yI - C) = \det \begin{pmatrix} y & -b & -c & -d \\ -d & y & -b & -c \\ -c & -d & y & -b \\ -b & -c & -d & y \end{pmatrix} \tag{3.6}$$
$$= y^4 - (4bd + 2c^2)y^2 - 4c(b^2 + d^2)y + (c^4 - b^4 - d^4 - 4bc^2d + 2b^2d^2).$$

Assim, da igualdade $p_C(y) = p(y)$, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 4bd + 2c^2 = -8 \\ 4c(b^2 + d^2) = -16 \\ c^4 - b^4 - d^4 - 4bc^2d + 2b^2d^2 = 20 \end{cases}. \tag{3.7}$$

Organizando as duas primeiras linhas, temos $bd = \frac{-8-2c^2}{4}$ e $b^2 + d^2 = -\frac{4}{c}$. Substituindo essas duas últimas equações na terceira linha,

$$\begin{aligned} 20 &= c^4 - b^4 - d^4 - 4bc^2d + 2b^2d^2 \\ &= c^4 - (b^2 + d^2)^2 - 4bc^2d + 4b^2d^2 \\ &= c^4 - \left(-\frac{4}{c}\right)^2 - 4\left(\frac{-8 - 2c^2}{4}\right)c^2 + 4\left(\frac{-8 - 2c^2}{4}\right)^2, \end{aligned}$$

multiplicando o lado esquerdo e o último termo do lado direito da igualdade por c^2, vamos obter a seguinte equação na variável c

$$c^6 + 4c^4 - c^2 - 4 = 0.$$

Fazendo $t = c^2$, ficamos com a equação cúbica

$$t^3 + 4t^2 - t - 4 = 0.$$

Chegando nesse ponto, podemos novamente utilizar o método para equações cúbicas e obter as soluções da equação na variável t. Perceba, porém, que a soma dos coeficientes é igual a zero, portanto $t = 1$ é uma solução desta equação. Note agora que

$$t^3 + 4t^2 - t - 4 = (t - 1)(t^2 + 5t + 4),$$

portanto, observando o polinômio quadrático em t, as outras raízes são $t = -4$ e $t = -1$. Escolhendo, sem perda de generalidade, $t = 1$, obtemos duas possibilidades $c = 1$ ou $c = -1$. Escolheremos $c = -1$ e substituindo este valor de c, obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} 4bd + 2 = -8 \\ -4(b^2 + d^2) = -16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} bd = \dfrac{-8-2}{4} = \dfrac{-10}{4} \\ b^2 + d^2 = \dfrac{16}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2d^2 = \dfrac{25}{4} \\ b^2 + d^2 = 4 \end{cases}.$$

Portanto b^2 e d^2 são soluções da equação quadrática

$$s^2 - 4s + \frac{25}{4} = 0.$$

As soluções desta última equação são

$$s_1 = \frac{4-3i}{2} \quad \text{e} \quad s_2 = \frac{4+3i}{2}.$$

Portanto, $b^2 = s_1$ e $d^2 = s_2$, donde $b = \pm\sqrt{s_1} = \pm\left(\frac{3-i}{2}\right)$ e $d = \pm\sqrt{s_2} = \pm\left(\frac{3+i}{2}\right)$. Como b e d devem satisfazer o sistema (3.7), então uma possível solução é $b = \frac{3-i}{2}$ e $d = -\frac{3+i}{2}$.

Encontrados os coeficientes b, c e d, determinamos completamente o polinômio $q(y)$. Para obter as soluções de $p(y)$, basta considerarmos:

$$\begin{cases} y_1 = q(1) = b + c + d = \left(\dfrac{3-i}{2}\right) + (-1) + \left(-\dfrac{3+i}{2}\right) = -1 - i \\ y_2 = q(-1) = -b + c - d = -\left(\dfrac{3-i}{2}\right) + (-1) - \left(-\dfrac{3+i}{2}\right) = -1 + i \\ y_3 = q(i) = bi - c - di = i(b-d) - c = i\left(\dfrac{3-i}{2} + \dfrac{3+i}{2}\right) - (-1) = 1 + 3i \\ y_4 = q(-i) = -bi - c + di = i(d-b) - c = i\left(-\dfrac{3+i}{2} - \dfrac{3-i}{2}\right) - (-1) = 1 - 3i \end{cases}. \tag{3.8}$$

Para obter as soluções para na variável x, basta utilizar a mudança de variável $x_j = y_j + 3$.

■

Em [3] há outros exemplos considerando polinômios com graus 2, 3 e 4.

3.4 Equações polinomiais de grau $n > 4$.

Descoberta a fórmula para equação quártica, muitos matemáticos achava que só seria uma questão de tempo para encontrar a resposta da equação de quinto grau aplicando a técninca de redução de grau, pois ao considerarmos a mudança de variável $x = y - \frac{a_{n-1}}{na_n}$, podemos converter a equação

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0,$$

em um equação de grau n na variável y sem o termo de grau $n-1$.

Matemáticos como Euler, Lagrange, Bezout e muitos outros se propuseram a encontrar fórmulas para obtenção de soluções para equações com graus maiores. Um médico chamado Paolo Ruffini (1765 - 1822), deu uma prova em 1799, sem o devido rigor matemático, de ser impossível a solução por radicais para equações com grau maiores ou iguais a cinco. Niels Henrik Abel (1802 - 1829), tendo verificado este trabalho de Ruffini, conseguiu provar por meio da álgebra clássica a insolubilidade dessas equações por radicais. Em 1832, Evariste Galois (1811 - 1832) provou a impossibilidade para equações de grau maior ou igual a cinco por meio de radicais.

4 Conclusão

Neste trabalho, apresentamos um método unificado de solução de equações polinomiais quando o grau é menor do que cinco, por meio de uma reformulação que utiliza resultados de Álgebra Linear, Números Complexos e Matrizes Circulantes. Para isso, desenvolvemos grande parte da teoria básica acerca das matrizes circulantes que são necessárias para a aplicação direcionada, e fizemos alguns exemplos de como aplicar a teoria. Acreditamos que este método nos dá uma perspectiva construtiva e dedutiva, chegando aos mesmos resultados para as conhecidas fórmulas para resolução de equações polinomiais com graus 2, 3 e 4, além de proporcionar um elo entre os temas das equações advindas da Álgebra Abstrata, a tradução matricial e resultados da Álgebra Linear e dos Números Complexos.

Agradecimentos

Agradecemos ao Programa de Pós-Graduação de Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE) por todo o apoio e suporte. Agradecemos também aos comentários e sugestões dos revisores, cujas visões e impressões melhoraram bastante a versão final deste trabalho.

Referências

[1] Artin, M., *Algebra*, Addison Wesley Longman; 2$^{\text{nd}}$ ed., 2010

[2] Boldrini, J. L., Costa, S. I. R., Figueiredo, V. L., Wetzle, H. G., *Álgebra Linear.* 3rd ed. São Paulo: Harper Row do Brasil, 1980.

[3] Cavalncanti, A. S.; Silva, B. C. *Matrizes Circulantes: Aplicação na Resolução de Equações Polinomiais.* Dissertação de PROFMAT, Universidade Federal Rural de Pernambuco, 2016.

[4] de Melo, R. O. L. V., *O método de circulantes, as fórmulas de Cardano e o teorema de Fermat para* $n = 3$. Dissertação de PROFMAT, Universidade Federal da Paraíba, 2017.

[5] dos Anjos, C. N., *Sobre Matrizes Circulantes.* Dissertação de PROFMAT, Universidade Federal da Paraíba, 2015.

[6] Geller, D., KRA, I., Popescu, S., Simanca, S. (2004). On Circulant Matrices. Notices of the American Mathematical Society, v.59, n.3, March, 2012. Disponível em http://www.ams.org/notices/201203/rtx120300368p.pdf. Acesso em 18 nov. 2015.

[7] Gray, R. M. *Toeplitz and circulant matrices: A review*, 2006. Disponível em https://ee.stanford.edu/~gray/toeplitz.pdf.

[8] Hefez, A., Fernandez, C. S. *Introdução à Álgebra Linear.* 1st ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[9] Júnior, P. J. S. de O., *Equações Polinomiais e Matrizes Circulantes.* Dissertação de PROFMAT, Universidade Federal da Paraíba, 2015.

[10] Kalman, D., White, J. E. Polynomial Equations and Circulant Matrices. American Mathematical Monthly, 108, p. 821-840, 2001.

Recebido em 30 de Agosto de 2023.
1ª Revisão em 07 de Novembro de 2023.
Aceito em 25 de Janeiro de 2024.