REVISEM
Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática
https://doi.org/10.34179/revisem.v9i4.19819

O QUE SABEM LICENCIANDOS E PROFESSORES BRASILEIROS SOBRE O CONCEITO DE VOLUME?

WHAT DO BRAZILIAN PRE-SERVICE AND IN-SERVICE TEACHERS KNOW ABOUT VOLUME CONCEPT?

Maria Alice Veiga Ferreira de Souza
Instituto Federal do Espírito Santo – Ifes
alicevfs@gmail.com

Roberta D'Angela Menduni-Bortoloti
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – Uesb
robertamenduni@uesb.edu.br

Resumo
Pesquisas revelam que alunos não compreendem o conteúdo de volume e que o ensino vem tendo ênfase na conversão de unidades e fórmulas matemáticas. Pesquisadores relatam que o ensino da grandeza volume deva ser estudado pela distinção e articulação em relação aos domínios geométrico e de número, em três diferentes dimensões: comparação, medição e produção, nessa ordem. Desejamos conhecer a amplitude e profundidade do conceito de volume de nove professores e 61 licenciandos em Matemática de duas diferentes regiões geográficas brasileiras, à luz da literatura da comunidade de investigadores da Educação Matemática. Os professores participantes foram submetidos a problemas com situações de volume nas três dimensões indicadas e a uma entrevista semiestruturada. A pesquisa empírica revelou que os participantes demonstraram conhecimento sobre comparação e medição de volumes, com e sem uso de fórmulas, apesar de frequentemente subsidiarem, equivocadamente, suas decisões no domínio geométrico e de apoiarem seus raciocínios, prioritariamente em cálculos com números. Na dimensão de produção, revelaram desconhecimento sobre relações entre massa, densidade e volume, além de não distinguirem os significados de volume e capacidade.
Palavras-chave: Conceito. Volume. Capacidade. Formação de Professores de matemática. Ensino.

Abstract
Research reveals that students do not understand the volume content and that teaching has been emphasizing the conversion of units and mathematical formulas. Researchers report that the teaching of volume greatness should be studied by the distinction and articulation in relation to the geometric and number domains, in three different dimensions: comparison, measurement and production, in that order. We want to know the breadth and depth of the concept of volume, in the light of the literature of the community of researchers in Mathematics Education, of nine teachers and 61 graduates in Mathematics from two different Brazilian regions. Participants were subjected to situations of volume in the three dimensions indicated and to a semi structured interview. Empirical research revealed that participants, in general, demonstrated knowledge about comparison and measurement of volumes, with and without the use of formulas, although they frequently mistakenly subsidize their decisions in the geometric domain and support their reasoning, primarily in calculations with numbers. In the production dimension, they revealed ignorance about relations between mass, density and volume, in addition to not distinguishing the meanings of

volume and capacity.
Keywords: Concept. Volume. Capacity. Mathematics teachers training. Teaching.

INTRODUÇÃO

Grandezas e medidas estão presentes em diferentes atividades cotidianas e possuem estreitas conexões com outros conceitos da Matemática – *e.g.*[1] compreensão de espaço e formas, significado dos números, operações e proporcionalidade – e outras áreas do conhecimento – *e.g.* relações métricas, densidade demográfica, escalas de mapas, energia elétrica – atribuindo-lhes, assim, relevância social e científica. Essa unidade temática – Grandezas e Medidas – envolve o estudo de volume, cujo ensino é indicado por pesquisadores da Educação Matemática ocorrer em três dimensões – comparação, medição e produção, nessa ordem (Morais; Bellemain, 2010; Lima; Bellemain, 2010; Figueiredo, 2013), como etapas iniciais para construção desse pensamento matemático, pela interiorização de modelos mentais que são incorporados à estrutura cognitiva por camadas (Serra, 2010).

Pesquisas científicas (Figueiredo, 2013; Lima; Bellemain, 2002, 2010), informam que alunos do ensino básico brasileiro não compreendem os conteúdos relacionados às grandezas e medidas com a amplitude e profundidade que o tema requer. Mais abrangentemente, esses autores assinalam que o conteúdo de volume vem sendo abordado nos livros didáticos brasileiros com excessiva ênfase à conversão de unidades de medida e atenção precoce e prioritária dada às fórmulas de cálculo de volume, caracterizando-se como um ensino mais procedimental em detrimento de compreensões conceituais iniciais.

Tendo em conta que os livros didáticos são o principal recurso que os professores usam para planejar e ministrar suas aulas (Beaton *et al*., 1996; Escolano; Gairín, 2005; Alajmi, 2009, 2012), e a dependência deles por professores é "talvez mais característica do ensino de matemática do que de qualquer outra disciplina". (Robitaille; Travers, 1992, p. 706), temos a hipótese de que professores (e futuros professores) brasileiros que ensinam matemática podem não ter o conceito de volume construído com a extensão e complexidade que produzam reflexos sobre a aprendizagem dos alunos.

---

[1] *e.g.* é abreviação de *exempli gratia*, uma expressão latina que significa “por exemplo”, ou “para fins de exemplo”.

Na perspectiva dessa hipótese e tendo em vista que: (1) o ensino de volume deve contemplar três diferentes dimensões; (2) alunos do ensino básico brasileiro vêm apresentando pouca compreensão sobre grandezas e medidas e; (3) professores são a principal fonte de apreensão de conteúdos escolares, apresentamos resultados de uma investigação voltada para uma agenda acadêmico-científica orientada pela questão de pesquisa sobre o conceito de volume que professores e futuros professores demonstram nas dimensões defendidas e indicadas por investigadores da Educação Matemática, cuja estrutura conceitual e teórica inauguram o próximo tópico.

VOLUME: LITERATURA RELEVANTE E FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Douady e Perrin-Glorian (1989) propuseram que o estudo de área deveria ser compreendido em meio a três domínios: geométrico, grandeza e número. Mais tarde, outros pesquisadores entenderam que esse modelo atenderia à demanda do estudo de volume, testando-o com sucesso nesse novo contexto (Lima; Bellemain, 2010; Battista, 2003; Hiebert; Grouws, 2007). A ideia é a de levar alunos à percepção da grandeza volume pela sua distinção e articulação em relação aos domínios geométrico e numérico. O domínio **geométrico** é constituído por sólidos de objetos do mundo físico. O **numérico** consiste das medidas de volume dos sólidos, pertencentes ao conjunto dos números reais não negativos. O domínio das **grandezas** é constituído por classes de equivalência de figuras de mesmo volume (Lima; Bellemain, 2010).

Como ilustração em relação ao contexto de volume em diferentes dimensões, apresentamos a relação de equivalência entre objetos diferentes com o mesmo volume – *e.g.*, um paralelepípedo e um cubo de mesmo volume –, indicando que a grandeza não se encerra no objeto geométrico e, podemos ter volumes iguais representados por diferentes unidades – *e.g.*, um cubo de 1cm^3 ou 1.000mm^3 – sugerindo que essa grandeza não está vinculada a um número.

Esses são exemplos de situações que devem anteceder ao mero e singular uso de fórmulas e devem ser oferecidos em tarefas que realcem as dimensões de comparação, medição e produção. Tarefas que acentuem a dimensão de **comparação** consistem em determinar se sólidos possuem ou não mesmo volume, ordenando-os, e sendo oferecidos com ênfase em estratégias visuais ou perceptivas, de decomposição-recomposição, de imersão e de comparação das massas. Ao compararmos dois volumes, somos levados a decidir se pertencem ou não a uma mesma classe de equivalência. A dimensão de **medição** (por falta de denominação melhor) permite a articulação entre os domínios numérico e geométrico. As estratégias utilizadas são: contagem de unidades, uso de fórmulas matemáticas, princípio de Cavalieri, imersão, preenchimento e transvasamento. Por fim, a dimensão de **produção** é caracterizada pela construção de um sólido com volume menor, maior ou igual a um volume (v) dado e deve considerar a ideia de densidade (d) e massa (m): $d=m\div v$.

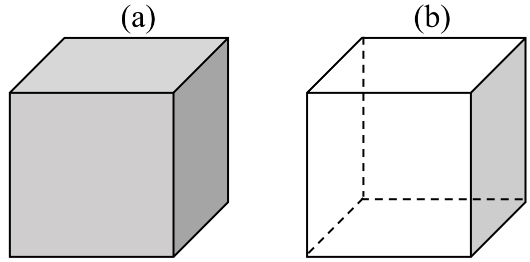
Importante esclarecermos a inexistência de limites bem definidos entre as três dimensões. Em atividades que promovam comparação, por exemplo, também encontramos intrinsecamente algum tipo de medição. A ideia na comparação é a de desenvolver uma atmosfera mais intuitiva baseada em estratégias que não estejam apoiadas em números ou na construção de figuras, por exemplo. Dito de outro modo, as atividades voltadas para comparação podem envolver algum número, assim como a medição pode envolver comparação, por exemplo, com a unidade de medida escolhida. O que difere uma atividade da outra é o enfoque que se quer dar.

Outra discussão se faz importante dentro do domínio das grandezas – a noção de capacidade. A capacidade é o volume da parte interna de um recipiente. Lima e Bellemain (2010) explicam que

> quando o objeto considerado é um recipiente – objeto com espaço interno disponível – surge o conceito de capacidade, que nada mais é do que o volume da parte interna de tal objeto. Assim, volume e capacidade são a mesma grandeza, em contextos diferentes (Lima; Bellemain, 2010, p. 192).

Frequentemente, os conceitos de volume e capacidade são concebidos como iguais. Na verdade, existe uma correspondência entre esses conceitos. Volume é a medida do espaço ocupado pelo recipiente ou objeto. Capacidade é o volume interno desse recipiente ou objeto. Podemos ter volumes iguais e capacidades diferentes: *e.g.* considere dois cubos com arestas de mesmo comprimento – um maciço (Figura 1a) e o outro oco (Figura 1b) – o cubo maciço terá capacidade zero, o cubo oco terá capacidade diferente de zero.

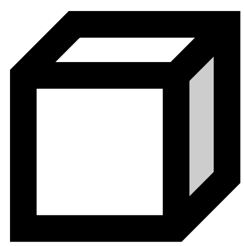
Figura 1: Capacidade em cubo maciço e cubo oco



Fonte: Elaborado pelas autoras.

Mais amplamente, textos matemáticos (*e.g.*, Giovanni Júnior; Castrucci, 2018, p. 243) costumam declarar corretamente que $1dm^3$ equivale a 1L, mas essa afirmação deve ser examinada levando-se em conta a espessura das paredes do recipiente porque, a depender, pode apresentar outra relação entre a unidade cúbica e a de capacidade (Figura 2).

Figura 2: Consideração da espessura das paredes de um cubo e a relação cúbica e de capacidade



Fonte: Elaborado pelas autoras.

Experimente, o leitor, "engrossar" as paredes do cubo e verifique as novas relações de medida do volume e de capacidade. A relação de $1dm^3$ e 1L são corretas quando desprezamos esse pormenor. A ausência desse tipo de discussão pode levar os alunos a crerem na verdade absoluta de $1dm^3$ ser igual a 1L. Esse desconhecimento pode causar alguma estranheza em estudos futuros sobre vazão, por exemplo (fluxo de líquido em tubulações, fluxo de sangue pelas artérias etc.).

MÉTODO

Este artigo apresenta uma investigação de natureza qualitativa, assente no paradigma interpretativo e descritivo (Bogdan; Biklen, 1994) de um estudo empírico desenvolvido em uma formação com nove professores do Instituto Federal do Espírito

Santo, com 210 horas em 2019, e em uma disciplina da licenciatura de Matemática, cuja parte se destinou a discussão de volume com 16 horas na Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, em 2020 e 2023, conduzido pelas autoras deste artigo, com a participação de 61 licenciandos em Matemática. Por questões éticas, ao longo da apresentação de resultados e nas análises de protocolos orais e escritos, utilizaremos as iniciais de seus nomes para nos referirmos aos participantes.

Os participantes foram submetidos a dois instrumentos de pesquisa. O primeiro foi um teste escrito de compreensão sobre volume com 15 situações na forma de questões de múltipla escolha respondidas individualmente e com tempo livre para esse fim – dessas 15, cinco referentes a situações de comparação, cinco envolvendo situações de medida e outras cinco relacionadas a situações de produção, reunidas de livros didáticos de Matemática e de pesquisas científicas sobre esse tema, com adaptações. (Figueiredo, 2013).

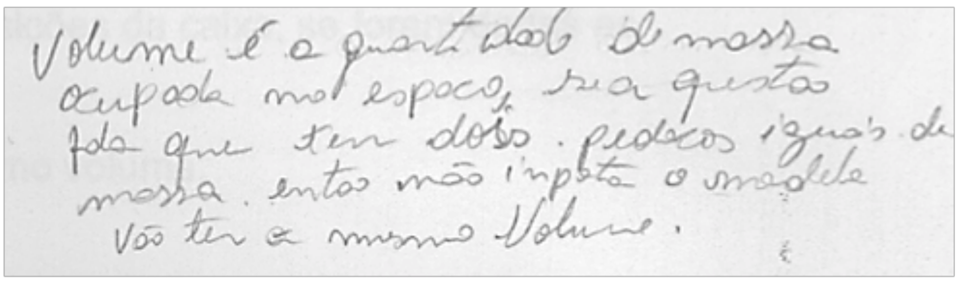
As situações do primeiro instrumento foram revisadas e validadas por dois professores-pesquisadores da área de Educação Matemática sobre a adequação, pertinência e especificidade de cada dimensão conceitual sob investigação. Esses profissionais já haviam desenvolvido pesquisas científicas (Wanderley, 2019; Mello, 2018) sobre área e volume com uso do modelo indicado por Douady e Perrin-Glorian (1989).

Logo de início, o teste escrito solicitava que os participantes deixassem por escrito todos os cálculos, esquemas, raciocínios e observações na própria folha do teste, apesar de se constituírem em questões de múltipla escolha. Essa escrita se estabeleceu como ingrediente e fomento importantes para as entrevistas individuais que se consolidaram como segundo instrumento. As entrevistas foram do tipo semiestruturada sobre as justificativas e explicações para as respostas e as observações dadas no teste de compreensão pelos participantes.

RESULTADOS E ANÁLISES

De modo geral, três das cinco situações que investigaram **comparações** de modo intuitivo foram compreendidas e corretamente respondidas pelos participantes. Duas outras revelaram limitações na amplitude e profundidade em seus conceitos. Uma dessas situações solicitava que os respondentes informassem se uma esfera ou uma pizza teriam volumes iguais, maior ou menor relativamente. O texto da situação era: "Imagine que você esteja com dois pedaços iguais de massa de modelar. Em sua mente, forme com um deles uma esfera e com o outro uma pizza". Dez participantes disseram que a esfera possuía volume maior, seis informaram que a pizza possuía volume maior, e oito não souberam responder. Essas respostas nos remeteram à confusão entre o conceito de volume e o domínio geométrico por parte de alguns participantes (cf. Lima; Bellemain, 2010; Douady; Perrin-Glorian, 1989). Para eles, as formas imaginadas interferiram em suas avaliações sobre o volume. Diferentemente do que ocorreu com uma licencianda (RR) que percebeu que, independentemente do formato (modelo), o volume seria o mesmo (Figura 3).

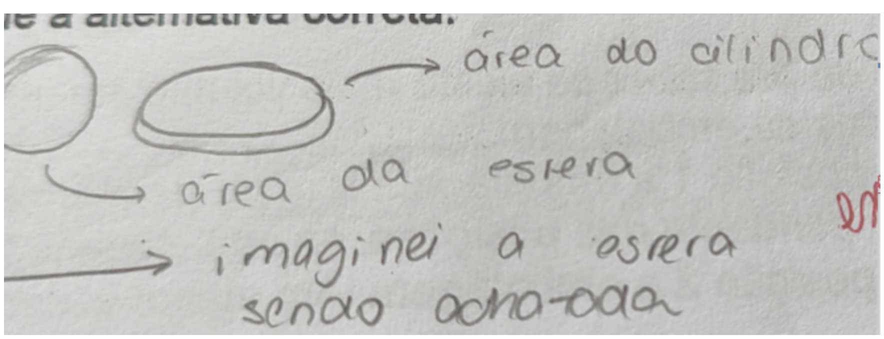
Figura 3: Licencianda RR



Fonte: Arquivo das autoras.

Outra resposta que chamou nossa atenção foi da licencianda MC que registrou como pensou para dar sua resposta (Figura 4).

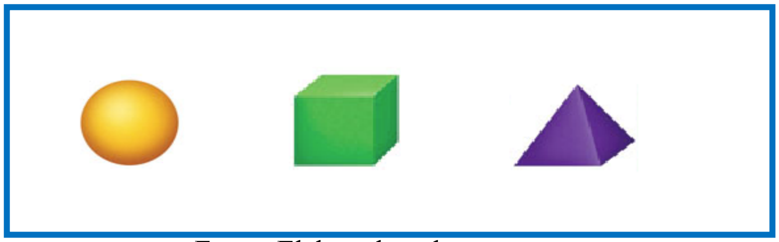
Figura 4: Licencianda MC



Fonte: Arquivo das autoras.

A segunda situação que nos chamou atenção investigava para a dimensão de comparação solicitando que ordenassem sólidos em ordem crescente de volume nos seguintes termos: “Imagine uma esfera, um cubo e uma pirâmide de base quadrada como as das figuras abaixo. O diâmetro da esfera, as arestas do cubo, a aresta da base e altura da pirâmide possuem todos o mesmo comprimento”. (Figura 5).

Figura 5: Sólidos com diâmetro, arestas e altura com mesmo comprimento



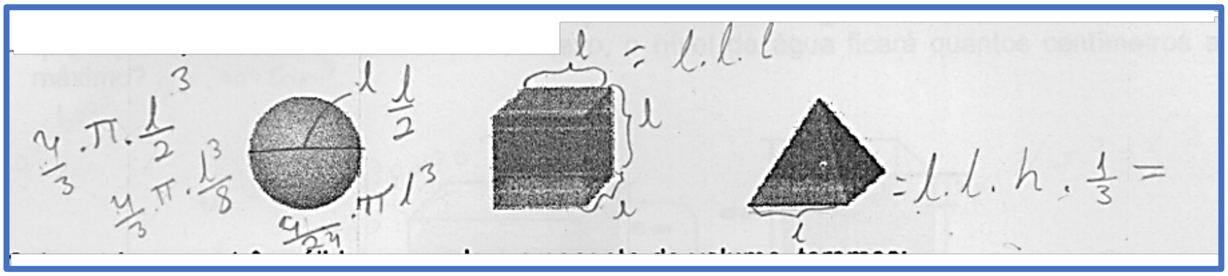
Fonte: Elaborado pelas autoras.

Treze participantes concluíram que o cubo possuía menor volume, vinte optaram pela esfera e um não soube julgar. Os outros participantes, majoritariamente, aplicaram fórmulas atribuindo valores numéricos para subsidiar suas tomadas de decisão, apesar de não ter sido esse o caso. Novamente, o domínio geométrico parece ter levado participantes a decidirem pelo volume a partir de suas formas (cf. Douady; Perrin-Glorian, 1989; Lima; Bellemain, 2010; Battista, 2003; Hiebert; Grouws, 2007).

Tendo em vista as condições da situação – os sólidos têm diâmetro, arestas e altura de mesmo comprimento – é certo que a pirâmide possui um terço do volume do cubo e a esfera "perde" algum volume em relação ao cubo por não contar com as "quinas" dessa figura. Logo, a ordem crescente de volume seria: pirâmide, esfera e cubo. Quando um dos licenciandos foi questionado a justificar a alternativa “cubo, pirâmide e esfera”, ele percebeu que tinha optado por uma alternativa equivocada e explicou: “se o cubo e o diâmetro da esfera é o mesmo da aresta do cubo, significa que a esfera cabe dentro do cubo, porque a esfera não tem as ‘pontinhas’, esqueci o nome, ela seria menor, então ela caberia dentro do cubo. E assim a pirâmide caberia dentro da esfera” (MM). Apesar de ele não ter explicado o porquê de a pirâmide caber dentro da esfera, podemos inferir que isso se deu por causa da aplicação de fórmulas, como, por exemplo, que o volume da pirâmide é 1/3 do volume do cubo. Esse fato tem a ver com a dimensão de medição preconizada pelos autores da Literatura Relevante. Se a esfera coube dentro do cubo, e a pirâmide é 1/3 do volume do cubo, logo a pirâmide caberia dentro da esfera.

A licencianda RR recorreu a fórmulas para responder ao quarto questionamento (Figura 6), entretanto, esse recurso não foi suficiente para subsidiar a resposta correta.

Figura 6: Rascunho da resolução da licencianda RR

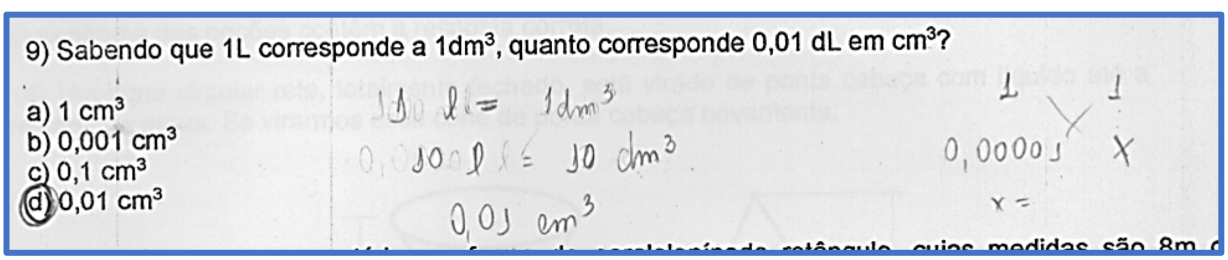


Fonte: Arquivo das autoras.

A necessidade de apoio às fórmulas nos remeteu à essa ênfase dada pelos livros didáticos, e consequentemente dos professores, sobre compreensões e usos mais procedimentais do que conceituais quando o assunto é volume. Em outras palavras, parece haver uma tendência à singularidade ou à preferência pela dimensão de medição em detrimento da comparação e produção. Esse fato pode remeter ao prejuízo de uma compreensão mais ampla e profunda do tema e, portanto, as três devem ser exploradas, conforme recomendado pelos autores da literatura relevante.

No que diz respeito à dimensão de **medição** (por falta de um nome melhor, pois ocorrem medições de modo *lato* nas outras dimensões), três situações revelaram limitações com conversões de unidades e uso de fórmulas. A conversão de unidades cúbicas para litros, e vice-versa, era desconhecida ou foi esquecida por 45 dos 70 participantes. Um exemplo que ilustra o desconhecimento pode ser visto na Figura 7 pelo licenciando AS.

Figura 7: Cálculo realizado pelo licenciando AS


9) Sabendo que 1L corresponde a $1dm^3$, quanto corresponde 0,01 dL em cm^3?

a) $1 cm^3$
b) $0,001 cm^3$
c) $0,1 cm^3$
d) $0,01 cm^3$

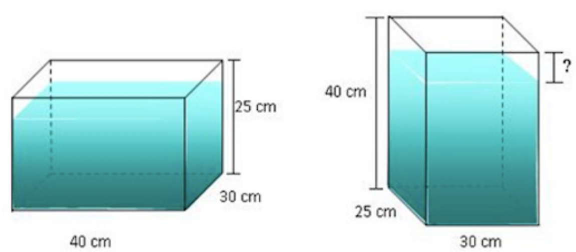
Fonte: Arquivo das autoras.

É importante dizer que esta questão relacionou sistemas de medidas diferentes. É preciso reconhecer a possibilidade de estabelecimento de igualdade entre medida de capacidade (litro) com medida de volume (metro cúbico) ao nos referirmos a 1 litro de água correspondendo a 1 decímetro cúbico e, como consequência, que 1000 cm^3 equivalem a 1 litro, vez que 1 litro corresponde a 1 dm^3. Vale considerar que ao nos referirmos à parte cúbica, estamos nos referindo a 3 dimensões e não apenas a uma. Entretanto, ao transformar litro (L) para decilitro (dl), utilizamos apenas um zero, ou a multiplicação por 10. Esse fato pode ser utilizado para responder a questão, pela correspondência de 0,001 litro a 1 cm^3 e que a conversão de litro para decilitro implica multiplicarmos por 10. Resumidamente, 0,01 dl é o mesmo que 0,01 cm^3.

Uma das situações que requeria uso da fórmula matemática foi a de cálculo do volume de um paralelepípedo (Figura 8) que é uma das regras mais básicas quando do estudo inicial de volume (Volume do paralelepípedo – V_p – é igual ao produto do comprimento da base – b – com a altura – a – e a profundidade – p: $V_p = b \times a \times p$).

Figura 8: Situação de Medição

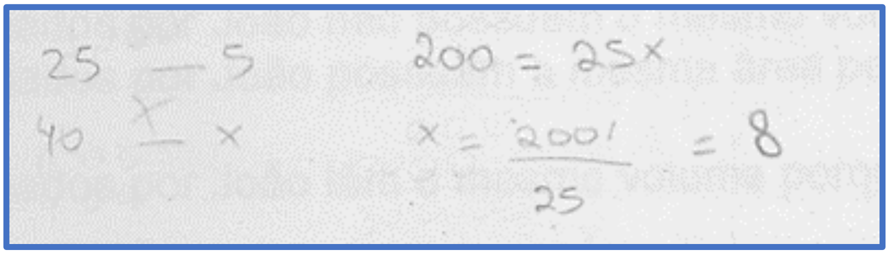
Imagine uma caixa de vidro inteiramente fechada e quase cheia de água, como mostra a figura. Observe que o nível da água está a 5cm abaixo do máximo. Agora, vamos colocar a caixa em pé, para que fique com 40cm de altura. Nesse caso, o nível da água ficará quantos centímetros abaixo do máximo?



Fonte: Arquivo das autoras.

Identificamos diferentes formas de compreender e resolver a questão entre os participantes, desde o uso da regra de três ou de um sistema de equações até a compreensão parcial ou equivocada da questão. A Figura 9 ilustra a aplicação da regra de três por um dos participantes.

Figura 9: Resolução usando regra de três



Fonte: Arquivo das autoras.

Embora seja uma resolução rápida e com resultado correto, só se pode aplicar tal regra quando os “valores” são proporcionais. Nem sempre os estudantes (e os professores) estão atentos a essa condição. Para muitos deles basta identificar 3 valores para descobrir o quarto, que já se utilizam da proporcionalidade sem se perguntarem se essa regra se aplica à situação (Menduni-Bortoloti; Barbosa, 2017). É relevante que as formações de professores desenvolvam um trabalho de compreensão entre as relações estabelecidas entre os dados do problema e não a mera aplicação indiscriminada de fórmulas, como foi com o caso desse uso da regra de três.

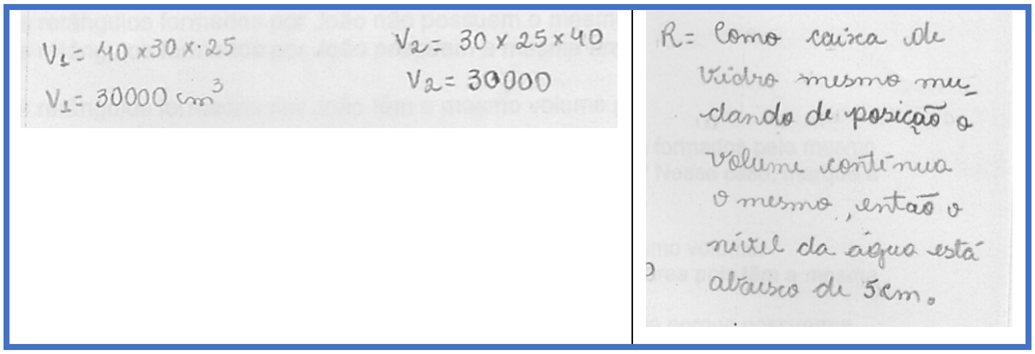
Outra resolução que chamou a atenção pelo caráter singular no grupo de participantes foi o uso de um sistema para declarar a resposta correta (Figura 10).

Figura 10: Resolução da licencianda NB

Fonte: Arquivo das autoras.

Já resoluções com encaminhamentos corretos – Figura 11 – podem ser dados como exemplo. A licencianda TB realizou o cálculo de cada caixa e observou que o volume é o mesmo, mas não constatou que a capacidade em cada uma delas é diferente, conforme a disposição da caixa. Esse episódio nos sugeriu desconhecimento entre volume e capacidade, pois TB afirmou: “mesmo mudando de posição, o volume continua o mesmo...”. O volume sim, mas a capacidade, não.

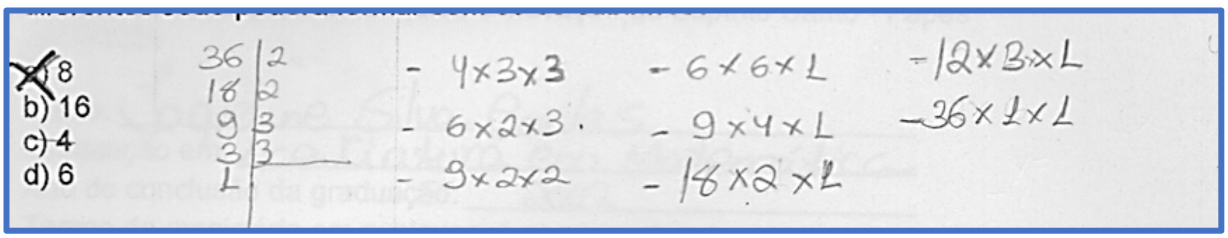
Figura 11: Resolução da licencianda TB



Fonte: Arquivo das autoras.

Não foram identificados constrangimentos (limitações) no que diz respeito ao uso do domínio numérico para fundamentar a grandeza volume. Para ilustrar essa afirmação, analisemos a questão: "João possui 36 cubinhos iguais com 1 cm de aresta e formados pelo mesmo material. Ele quer organizá-los de modo a formar um paralelepípedo retângulo. Quantos paralelepípedos retângulos João poderá formar com os 36 cubinhos?". A Figura 12 apresenta solução da professora JC.

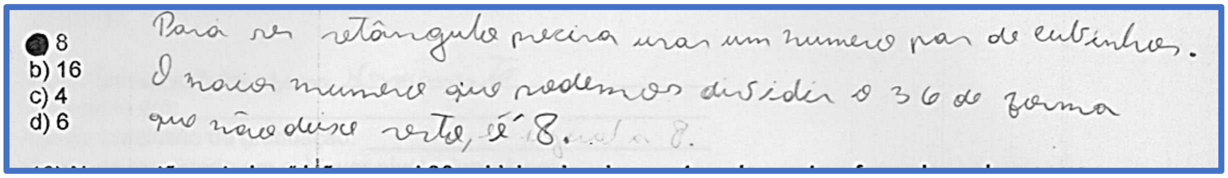
Figura 12: Resolução da professora JC



Fonte: Arquivo das autoras.

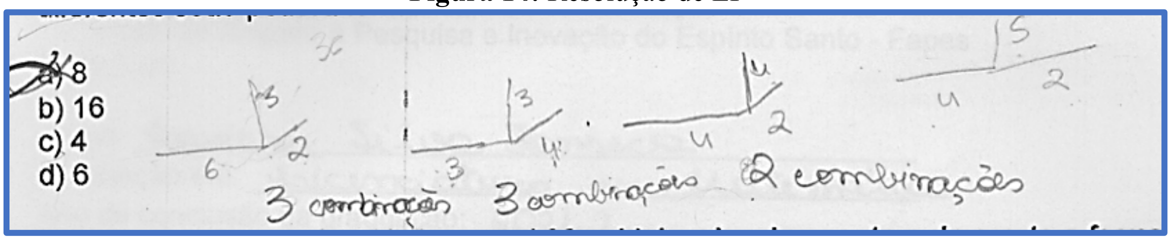
Na Figura 12, JC encontrou os divisores de 36 e com eles e entre eles desenvolveu multiplicações encontrando 8 formas diferentes de construir um paralelepípedo retângulo com 36 cubinhos. JN (Figura 13) também utilizou a ideia de divisores, mas sem a escrita das 8 combinações, como procedeu JC. As resoluções de JC e JN estão respaldadas no domínio numérico. Já a resolução de LF (Figura 14) foi apoiada nas visões geométrica e numérica.

Figura 13: Resolução de JN



Fonte: Arquivo das autoras.

Figura 14: Resolução de LF



Fonte: Arquivo das autoras.

Os resultados acerca da dimensão de **produção** concentraram a maior parte de desconhecimentos pelos participantes. Em geral, nas cinco situações propostas houve evidências que nos permitem afirmar que a maioria dos participantes desconsidera as relações entre massa, densidade e volume. Mais ainda, não compreendem os significados de volume e de capacidade acreditando serem idênticos.

Especificamente, a Figura 15 apresenta uma das situações na qual os participantes deveriam ter em conta que independente da configuração em paralelepípedos retângulos, o volume estaria conservado por possuírem a mesma massa e densidade. Mais uma vez, o apoio no domínio geométrico e numérico levou quarenta participantes responderem equivocadamente que as figuras não teriam o mesmo volume ou que teriam a mesma área por haver a mesma quantidade de cubinhos. Outros tantos não souberam responder.

Figura 15: Primeira situação de produção proposta aos participantes

João possui 36 cubinhos iguais com 1cm de aresta e formados pelo mesmo material. Ele quer organizá-los de modo a formar um paralelepípedo retângulo. Nesse caso, marque a única opção correta:

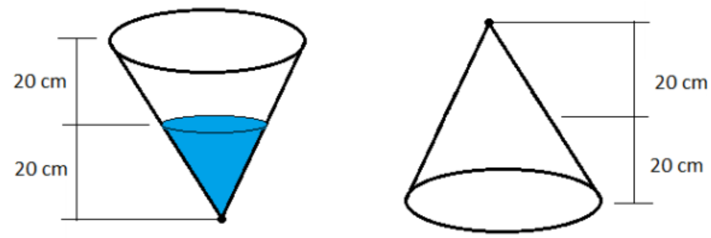
a) Todos os paralelepípedos retângulos formados por João não possuem o mesmo volume.
b) Todos os paralelepípedos retângulos formados por João possuem a mesma área pois têm a mesma quantidade de cubinhos.
c) Todos os paralelepípedos retângulos formados por João têm o mesmo volume porque possuem a mesma massa e mesma densidade.
d) nenhuma das opções contêm a resposta correta.

Fonte: Acervo das autoras.

Esse resultado foi confirmado nas outras quatro situações propostas, uma das quais é apresentada na Figura 16.

Figura 16: Segunda situação de produção proposta aos participantes

Um cone circular reto, totalmente fechado, está virado de ponta cabeça com líquido até a metade da altura. Se virarmos esse cone de ponta cabeça novamente:



a) O nível do líquido estará exatamente em 20cm.
b) O espaço não ocupado pelo líquido terá menor volume.
c) O volume ocupado pelo líquido não será o mesmo.
d) nenhuma das opções contêm a resposta correta.

Fonte: Acervo das autoras.

As justificativas dadas para as opções "a", "b" e "c" (Figura 16) reforçam o apoio no domínio geométrico. Particularmente, participantes que escolheram as opções "b" e "c" sustentaram suas concepções na diminuição do espaço ocupado pelo líquido. Observe o leitor a explicação dada pela licencianda MQ (Figura 17).

Figura 17: Resolução de MQ

o líquido marcará um
espaço menor pois, a outra
parte é maior (espaço)

Fonte: Acervo das autoras.

Essa explicação denuncia falha na compreensão do que seja capacidade. Por fim, outra situação sobre a dimensão de produção permitiu a inferência sobre o desconhecimento das relações entre densidade, volume e massa (Figura 18).

Figura 18: Situação de produção sobre relações entre densidade, volume e massa

Um professor apresentou aos seus alunos três pedras, de um mesmo material, conforme figura. Depois, perguntou:

— Como podemos determinar qual delas tem maior volume?

Um dos alunos respondeu:

— Basta pesar as pedras. A mais "pesada" é a que tem maior volume.

Marque a única opção correta.

a) O aluno está errado, pois não existe relação entre o volume e a massa das pedras.
b) O aluno está correto, pois sendo do mesmo material, o volume é proporcional à massa.
c) O aluno está errado, pois a densidade das pedras determinará seu volume.
d) O aluno está correto, pois independente do material, a pedra mais pesada é sempre a de maior volume.

Fonte: Van Der Mer, 2017, p. 93, adaptada.

A situação da Figura 18 declara que o material era o mesmo e, portanto, a densidade dos três objetos era a mesma, logo, a decisão sobre o maior ou menor volume estaria a cargo da massa ou do "peso" como dito no texto da situação.

Geralmente, a maioria dos participantes demonstrou desconhecimento sobre as diferenças entre os conceitos de volume e capacidade. Durante as entrevistas, algumas explicações estavam baseadas em “quanto caberia nos objetos ou recipientes” (capacidade), e não em “quanto eles ocupavam no espaço” (volume). Em meio às explicações acerca das capacidades dos recipientes, nenhum participante levou em conta o fato da relativa verdade de $1dm^3 = 1L$, apesar de algum estímulo pelas pesquisadoras.

À GUISA DE CONCLUSÕES

A partir da hipótese de que professores e futuros professores brasileiros que ensinam Matemática poderiam não ter o conceito de volume construído com a extensão e complexidade que produzissem reflexos sobre a aprendizagem dos alunos, propusemos estudar o conceito de volume de professores e futuros professores que ensinam Matemática, tendo em conta: (1) a importância deste conteúdo na Matemática e sua influência e contribuições em outras áreas do conhecimento, (2) a revelação de investigações da Educação Matemática sobre a baixa compreensão de alunos do ensino básico e, (3) que o conteúdo de volume vem sendo abordado nos livros didáticos brasileiros com excessiva ênfase à conversão de unidades de medida e atenção precoce e prioritária dada às fórmulas de cálculo de volume.

Confirmamos a hipótese e declaramos que, de modo geral, houve maior compreensão sobre volume nas dimensões de comparação e medida, mas não nas de produção. As principais falhas ou dificuldades identificadas foram: (1) frequente confusão entre os domínios geométrico e de grandeza, (2) desconhecimento sobre os conceitos e significados de volume e capacidade, (3) equívocos em conversões e uso de fórmulas matemáticas, além de assumirem posturas absolutas sobre unidade cúbica e de capacidade e, (4) desconhecimento das relações entre massa, densidade e volume. Esse resultado nos remete à recomendação de que a construção do conceito de volume seja realizada na sequência de comparação, medição e produção, conforme validado nas investigações dos autores constantes na literatura relevante, e que sejam discutidas em formações de professores (inicial ou continuada).

É certo que a amostra de 70 participantes em duas diferentes localidades brasileiras não nos permite a generalização dos resultados desta investigação em nível nacional, mas remete-nos ao alerta de possíveis falhas nas formações destes participantes e, consequentemente do ensino desse tema que podem gerar capilaridades nocivas quando de sua aplicação em contextos da própria Matemática ou de outras esferas do conhecimento.

Sendo assim, no âmbito da pesquisa é indicado mais investigações sobre o conceito de volume estimulados em livros didáticos e por professores brasileiros. E no âmbito do campo profissional é necessário que cursos de formação inicial ou continuada explorem (1) as concepções dos estudantes ou professores sobre volume e capacidade; (2) os vínculos existentes entre volume, densidade e massa; (3) a compreensão de sistemas de medidas e relações entre eles, ao invés de aplicar regras para fazer transformações, pois muitas vezes estas são aplicadas, mas sem compreensão e; (4) as diferentes dimensões para trabalhar o conceito de volume: comparação, medição e produção.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos à Fundação de Amparo à Pesquisa e Inovação do Espírito Santo (Fapes) o apoio financeiro dado à primeira autora para a realização da presente pesquisa científica.

REFERÊNCIAS

ALAJMI, A. H. Addressing computational estimation in the Kuwaiti curriculum: Teachers' views. **Mathematics Teacher Education**, v.12, n.4, p. 263-283, 2009.

ALAJMI, A. H. How do elementary textbooks address fractions? A review of mathematics textbooks in the USA, Japan, and Kuwait. **Educational Studies in Mathematics**, v. 79, n. 2, p. 239-261, 2012. Disponível em: <http://www.jstor.org.proxy.libraries.rutgers.edu/stable/41413109>. Acesso em: 16 mai. 2020.

BATTISTA, M. T. Understanding Students' Thinking about Area and Volume Measurement. In: CLEMENTS, D.H.; BRIGHT, G. **Learning and Teaching Measurement**: 2003 Yearbook, National Council of Teachers of Mathematics, Virginia: Reston, 2003. p.122-142.

BEATON, A.; MULLIS, I.; MARTIN, M.; GONZALEZ, E.; KELLY, D.; SMITH, T. **Mathematics achievement in the middle school years**: IEA's Third International Mathematics and Science Study (TIMSS). Chestnut Hill: TIMSS International Study Center, Boston College, 1996.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. Investigação qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 1994.

DOUADY, R.; PERRIN-GLORIAN, M. J. Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. **Education Studies in Mathematics**, v. 20, n. 4, p. 387-424, 1989.

ESCOLANO, R. E.; GAIRÍN, J. M. Modelos de medida para la enseñanza del número racional en Educación Primaria. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, n.1, p.17-35, 2005.

FIGUEIREDO, A. P. N. B. **Resolução de problemas sobre a grandeza volume por alunos do Ensino Médio***:* um estudo sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais. Dissertação em Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2013.

GIOVANNI JÚNIOR, J. R.; CASTRUCCI, B. **A Conquista da Matemática**: 8º ano. São Paulo: FTD, 2018.

HIEBERT, J; GROUWS, D. A. The effects of classroom mathematics teaching on students learning. In: LESTER, F. K. **Second handbook of research on mathematics teaching and learning***,* Greenwich, 2007. p. 371-404.

LIMA, P. F.; BELLEMAIN, P. M. B. Grandezas e Medidas. In: CARVALHO, J. B. P. F. **Matemática**: Ensino Fundamental. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2010. cap. 8, 167-200.

_______. Um Estudo da Noção de Grandeza e Implicações no Ensino Fundamental. **SBHMat**, v. 8, 2002.

MELLO, L. F. de. **Formação do conceito de área e perímetro a partir de aulas baseadas no modelo Lesson Study**. Dissertação em Educação, Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória, 2018.

MENDUNI-BORTOLOTI, R. D.; BARBOSA, J. C. A construção de uma matemática para o ensino do conceito de proporcionalidade direta a partir de uma revisão sistemática de literatura. **Bolema**, v. 31, n.59, p. 947-967, 2017.

MORAIS, L. B; BELLEMAIN, P. M. B. Análise da abordagem do conceito de volume nos livros didáticos de Matemática para os anos finais do ensino fundamental sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais. **Anais**...Congresso de Iniciação Científica - UFPE, Recife, 2010.

ROBITAILLE, D. F.; TRAVERS, K. J. International studies of achievement in mathematics. In GROUWS, D. A. (Ed.). **Handbook of mathematics teaching and learning**. New York: Macmillan Publishing Company, 1992. p. 687–709.

SERRA, S. C. C. **Conceito de volume**: uma experiência no 6º ano de escolaridade. Dissertação em Educação Matemática na Educação Pré-Escolar e no 1º e 2º Ciclos do Ensino Básico, Instituto Politécnico de Lisboa, Lisboa, 2010.

VAN DER MER, I. A. da S. **Aprendizagem do conceito de volume***:* uma proposta didática compartilhada com licenciandos da matemática. Dissertação em Ensino de Ciências, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2017.

WANDERLEY, R. A. J. **Algumas contribuições do Lesson Study para a formação do professor de matemática em aulas que promovam a construção do conceito de volume**. Dissertação em Educação, Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória, 2019.

Submetido em 20 de outubro de 2023.
Aprovado em 09 de julho de 2024.