

ESTABILIDADE PARAMÉTRICA DE UM PÊNDBULO CARREGADO COM PONTO DE SUSPENSÃO OSCILANTE ENTRE DUAS RETAS HORIZONTAIS COM DISTRIBUIÇÃO UNIFORME DE CARGAS ELÉTRICAS

Keity Murielly de Jesus Andrade
Universidade Federal de Sergipe - UFS
keitymurielly@academico.ufs.br

Gerson Cruz Araujo
Universidade Federal de Sergipe - UFS
gerson@academico.ufs.br

Resumo

Neste estudo, analisamos um pêndulo matemático planar com ponto de suspensão que oscila verticalmente, regido por uma lei harmônica. O bulbo do pêndulo é carregado eletricamente e está localizado entre duas linhas horizontais com distribuição uniforme de cargas elétricas, ambas equidistantes do ponto de suspensão. Determinamos o formalismo hamiltoniano deste fenômeno mecânico, a seguir encontramos dois pontos de equilíbrios, e analisamos a estabilidade linear deste sistema. Este sistema dinâmico possui três parâmetros adimensionais, a saber, μ relacionado a carga elétrica, o parâmetro ε referente a amplitude do ponto de suspensão e α advindo da frequência do sistema. Investigamos a estabilidade paramétrica dos pontos de equilíbrio, por fim, exibimos as superfícies que separam as regiões de estabilidade e instabilidade no espaço dos parâmetros, usando o método de Deprit -Hori.

Palavras-chave: pêndulo carregado; estabilidade linear; estabilidade paramétrica; superfícies limite de estabilidade; sistemas Hamiltonianos.

Abstract

In this study, we analyzed a planar mathematical pendulum with a suspension point that oscillates vertically, governed by a harmonic law. The pendulum bulb is electrically charged and is located between two horizontal lines with uniform distribution of electrical charges, both equidistant from the suspension point. We determine the Hamiltonian formalism of this mechanical phenomenon, then we find two equilibrium points, and we analyze the linear stability of this system. This dynamic system has three dimensionless parameters, namely, μ related to the electrical charge, the parameter ε referring

to the amplitude of the suspension point and α arising from the system frequency. We investigate the parametric stability of the equilibrium points, finally, we display the surfaces that separate the regions of stability and instability in the parameter space, using the Deprit -Hori method.

Keywords: charged pendulum; parametric stability; linear stability; boundary surfaces of stability, Hamiltonian system.

1 Introdução

Os pêndulos são objetos de estudos desde muitos séculos atrás. Seus diferentes tipos e particularidades vêm sendo frequentemente explorados na literatura científica, sendo utilizados como aplicações de teorias advindas de diversas áreas do conhecimento, em geral, Matemática, Física e da Engenharia. Especificamente, em Mecânica Clássica, o pêndulo matemático planar, aborda um modelo de um sistema composto por uma massa (uma bola massiva) pendurada em um pivô (o ponto de suporte) por um cabo não flexível, de tal forma que a bola possa balançar livremente e o centro de massa do sistema esteja posicionado no bulbo do pêndulo. Devido ao seu grande número de variantes e aplicações, este problema é conhecido como um dos problemas mais estudados em Mecânica. A variante do ponto de suporte não fixo deste fenômeno, com ou sem carga elétrica, tem recebido bastante atenção. Em [3, 12, 19, 20, 23, 30] os autores estudam o pêndulo (não carregado) com ponto de suspensão oscilando na vertical ou na horizontal. Em [2, 5, 6] os autores tratam de um pêndulo carregado com oscilação harmônica na vertical, mas no primeiro problema tem a presença de uma carga positiva fixa, no segundo, a presença de um fio infinito horizontal carregado e no terceiro, o ponto de suspensão do pêndulo está no centro de uma circunferência carregada.

Neste artigo, abordamos o caso em que o ponto de suporte S oscila de forma harmônica na vertical, o bulbo do pêndulo apresenta uma carga elétrica de intensidade q e o sistema está posicionado equidistante entre duas retas horizontais uniformemente carregadas (conforme Fig. 1). O problema é descrito em sua formulação Hamiltoniana por

$$H(x, y, \tau, \varepsilon) = \frac{y^2}{2} - \varepsilon \cos(\tau) \cos(x) - \alpha \cos(x) - \mu \log [(2 - \cos(x) - \varepsilon \cos(\tau))(2 + \cos(x) + \varepsilon \cos(\tau))]$$

como pode ser visto na equação (2.18), e apresenta três parâmetros: ε é um parâmetro suficientemente pequeno, associado à amplitude da oscilação e ao comprimento do pêndulo, α está associado à frequência da oscilação e ao comprimento do pêndulo e

μ está associado às cargas elétricas no bulbo e nas retas horizontais. Quando $\varepsilon = 0$, temos um pêndulo carregado com ponto de suporte fixo, enquanto no caso $\mu = 0$, obtemos um pêndulo com o bulbo sem cargas, cujo ponto de suporte oscila verticalmente, seguindo um movimento harmônico, conforme visto em [3]. Os pontos $P_1 = (0, 0)$ e $P_2 = (\pi, 0)$ são equilíbrios para todos os valores dos parâmetros e estão localizados na linha vertical que contém o ponto de suspensão S . O objetivo deste estudo é avaliar a estabilidade paramétrica desses equilíbrios através do Teorema de Krein-Gelfand-Lidskii e do processo de normalização de Deprit-Hori, como descrito em [24] do sistema Hamiltoniano associado ao Hamiltoniano do problema proposto, para um ε suficientemente pequeno. Esse método aplica-se em uma variedade de problemas, incluído na Mecânica Celeste [1, 9, 11, 25, 26, 27] e na Mecânica Clássica [2, 4, 5, 6, 8, 22, 28].

O artigo foi desenvolvido com a estrutura exibida a seguir. Na Seção 2 descrevemos o problema na sua formulação Lagrangeana e Hamiltoniana, explanando de maneira detalhada, a modelagem matemática do problema. Posteriormente, encontramos as regiões de estabilidade linear do problema não perturbado ($\varepsilon = 0$) no plano dos parâmetros (α, μ) . Essas regiões são importantes, pois os resultados das seções seguintes são restritas perante elas. Na Seção 4, realizamos algumas mudanças de variáveis simpléticas no Hamiltoniano linearizado para cada equilíbrio. O Hamiltoniano resultante reduz substancialmente os cálculos de normalização da seção seguinte. Na Seção 5, normalizamos o Hamiltoniano, via método de Deprit-Hori, obtendo um Hamiltoniano autônomo o qual será utilizado para obtermos as superfícies fronteiras que separam as regiões de estabilidade e instabilidade no espaço de parâmetros $(\mu, \alpha, \varepsilon)$. Calculamos os coeficientes de suas parametrizações até a quarta ordem em termos do parâmetro μ . Ao analisar seções planas particulares, isto é, $\mu = \text{constante}$, obtemos as curvas de fronteira de estabilidade/instabilidade em cada plano. No caso particular $\mu = 0$, obtemos as curvas de fronteira da equação de Mathieu, correspondendo aos coeficientes obtidos como os encontrados em [3], [7] e [24].

2 Formulação do Problema

Suponha um pêndulo de comprimento l com ponto de suspensão S oscilando verticalmente pela lei harmônica $\rho = a \cos(\omega t)$ variando com relação ao tempo. A massa m do bulbo está eletricamente carregada com carga q e o pêndulo está situado entre duas retas horizontais, as quais estão equidistantes do ponto O a uma distância d de O para cada reta.

Consideremos que tais retas horizontais possuem uma distribuição homogênea de cargas elétricas positivas de densidade linear σ e carga total Q , conforme ilustrado na Fig. 1.

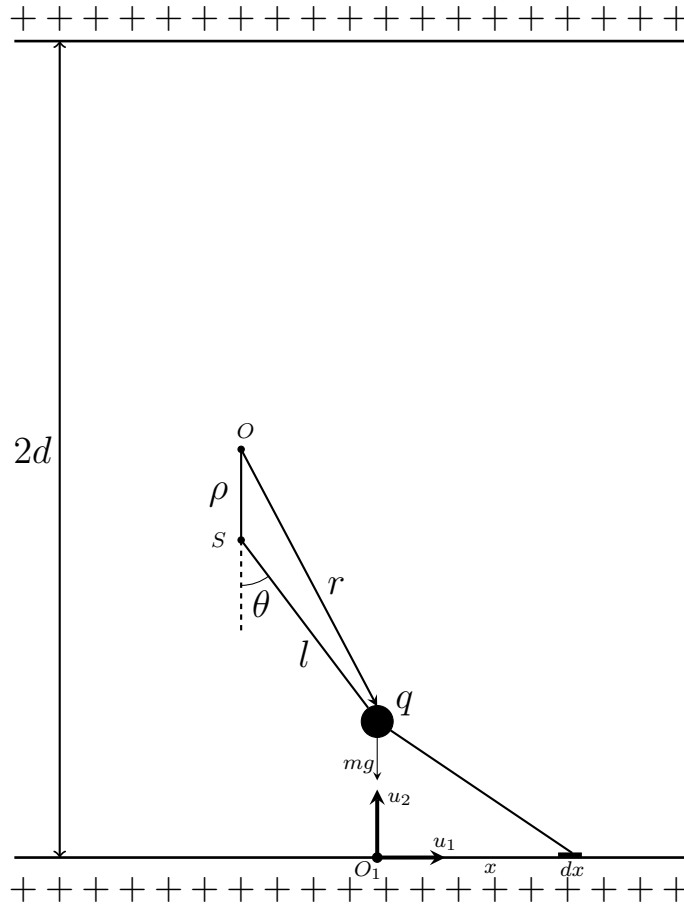


Figura 1: Pêndulo carregado com ponto de suspensão oscilante entre duas retas horizontais uniformemente carregadas.

Seja θ o ângulo que o pêndulo faz com a vertical, então as coordenadas (x, y) do pêndulo são:

$$\begin{cases} x = l \operatorname{sen}(\theta) \\ y = -(\rho + l \cos(\theta)) . \end{cases} \quad (2.1)$$

com ρ sendo a distância entre o ponto O e o ponto de suspensão S . Derivando temporalmente as equações em (2.1), obtemos

$$\begin{cases} \dot{x} = l\dot{\theta} \cos(\theta) \\ \dot{y} = -(\dot{\rho} - l\dot{\theta} \operatorname{sen}(\theta)) . \end{cases} \quad (2.2)$$

Primeiramente, queremos determinar a Lagrangeana do sistema, dada pela diferença entre as energias cinética T e potencial V . A energia cinética é dada por:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \\ &= \frac{1}{2}m \left[(l\dot{\theta} \cos(\theta))^2 + (\dot{\rho} - l\dot{\theta} \sin(\theta))^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Já a energia potencial total V é obtida somando a energia potencial gravitacional V_g com a energia potencial eletrostática V_c . Esta, por sua vez, devido à distribuição uniforme de cargas elétricas, é a soma da energia potencial eletrostática associada à reta abaixo do bulbo do pêndulo com a energia potencial eletrostática associada à reta acima do ponto O .

Calculemos primeiro a energia potencial gravitacional:

$$\begin{aligned} V_g &= mgy \\ &= -mg(\rho + l \cos(\theta)). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Para o cálculo da energia potencial eletrostática, consideremos um elemento diferencial dx do fio abaixo do pêndulo, com carga diferencial $dQ = \sigma dx$. Suponhamos também que a origem do sistema de coordenadas está no ponto O_1 (projeção ortogonal da carga q sobre o fio abaixo do bulbo). Fixemos no ponto O_1 uma base ortonormal formada pelos vetores \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_2 , de modo que \mathbf{u}_2 aponta para a carga e seja s_1 a distância de q ao fio situado abaixo do pêndulo.

Desse modo, a posição de q em relação a essa base é dada por $(0, s_1) = s_1 \mathbf{u}_2$. Se $(x, 0) = x \mathbf{u}_1$ é a posição da taxa de variação dx , então a força eletrostática em q associada ao fio abaixo do bulbo pode ser obtida com uma integral imprópria:

$$F_{h_1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k_0 q \sigma}{(x^2 + s_1^2)^{\frac{3}{2}}} (-x \mathbf{u}_1 + s_1 \mathbf{u}_2) dx, \quad (2.5)$$

onde $s_1 = d - \rho - l \cos(\theta)$ e k_0 é a constante de Coulomb. Desta forma, se q é uma carga qualquer com posição (x, y) , a força eletrostática em q relativa ao fio situado abaixo do ponto de suspensão O é descrito da forma,

$$F_{h_1} = \frac{2k_0 q \sigma}{y} \mathbf{u}_2, \quad (2.6)$$

onde y representa a distância da carga ao fio situado abaixo do ponto O .

Analogamente, obtemos que a força potencial eletrostática associada à reta situada acima do ponto O é dada por:

$$F_{h_2} = -\frac{2k_0q\sigma}{s_2}\mathbf{u}_2, \quad (2.7)$$

onde $s_2 = d + \rho + l \cos(\theta)$.

De forma semelhante ao caso anterior, se q é uma carga com posição (x, y) , então a força eletrostática F_{h_2} é

$$F_{h_2} = -\frac{2k_0q\sigma}{y}\mathbf{u}_2,$$

na qual y é a distância da carga q à reta posicionada acima do ponto O .

2.1 Energia potencial eletrostática

A energia potencial eletrostática de uma carga q com posição (x, y) é definida como a integral de linha

$$V_c = -\int_O^{(x,y)} F \cdot dr,$$

onde O é a origem do sistema de coordenadas do problema. A energia eletrostática total será definida por $V_c = V_{h_1} + V_{h_2}$, onde V_{h_1} é a energia potencial entre a carga situada no bulbo e a linha reta eletrizada abaixo, assim como, V_{h_2} é a energia potencial entre a carga situada no bulbo e a linha reta eletrizada acima.

Suponhamos que $O = (x_0, y_0) = x_0\mathbf{u}_1 + y_0\mathbf{u}_2$. Note que, $y_0 = d$, isto é, a distância de O ao fio abaixo do pêndulo.

Seja $r(t) = (1-t)(x_0, y_0) + t(x, y) = ((1-t)x_0 + tx, (1-t)y_0 + ty)$, $0 \leq t \leq 1$, a parametrização do segmento que liga os pontos (x_0, y_0) a (x, y) . Então, derivando $r(t)$ em relação a t , obtemos,

$$\dot{r}(t) = (x - x_0, y - y_0)$$

Assim, a energia potencial eletrostática é dada por:

$$V_{h_1}(x, y) = -\int_O^{(x,y)} F(\bar{x}, \bar{y}) \cdot dr = -\int_0^1 F(r(t)) \cdot \dot{r}(t) dt$$

De forma que $r(t) = (\bar{x}(t), \bar{y}(t))$ e, como estamos trabalhando diante do eixo y , então,

$$-\int_0^1 F(r(t)) \cdot \dot{r}(t) dt = -\int_0^1 \left(0, \frac{2k_0q\sigma}{(1-t)y_0 + ty} \right) \cdot (x - x_0, y - y_0) dt.$$

Realizando o produto escalar entre os dois vetores, obtemos

$$-\int_0^1 \left(0, \frac{2k_0q\sigma}{(1-t)y_0 + ty} \right) \cdot (x - x_0, y - y_0) dt = -\int_0^1 \frac{2k_0q\sigma(y - y_0)}{(1-t)y_0 + ty} dt .$$

Como o numerador do integrando independe de t e reorganizando o denominador convenientemente, temos,

$$\begin{aligned} -2k_0q\sigma(y - y_0) \int_0^1 \frac{1}{y_0 + t(y - y_0)} dt &= -2k_0q\sigma(y - y_0) \frac{\log(y_0 + t(y - y_0))}{(y - y_0)} \Big|_0^1 \\ &= -2k_0q\sigma \left[\log(y_0 + t(y - y_0)) \Big|_0^1 \right] \\ &= -2k_0q\sigma [\log y - \log y_0], \end{aligned}$$

segue naturalmente que,

$$V_{h_1}(x, y) = -2k_0q\sigma \log \left(\frac{y}{y_0} \right). \quad (2.8)$$

Dessa forma, em uma carga q qualquer, a energia potencial eletrostática em relação ao fio abaixo do pêndulo é dada por:

$$V_{h_1} = -2k_0q\sigma \log \left(\frac{s_1}{d} \right), \quad (2.9)$$

sendo s_1 a distância da carga ao fio abaixo do pêndulo. Analogamente, para o fio acima do ponto O , obtemos

$$V_{h_2} = -2k_0q\sigma \log \left(\frac{s_2}{d} \right), \quad (2.10)$$

Portanto, a energia potencial eletrostática total em q é:

$$\begin{aligned} V_c &= V_{h_1} + V_{h_2} \\ &= -2k_0q\sigma \left[\log \left(\frac{s_2}{d} \right) + \log \left(\frac{s_1}{d} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Considerando que $s_1 = d - \rho - l \cos(\theta)$, $s_2 = d + \rho + l \cos(\theta)$ e $y_0 = d$, a energia potencial eletrostática torna-se:

$$V_c = -2k_0q\sigma \left[\log \left(\frac{d + \rho + l \cos(\theta)}{d} \right) + \log \left(\frac{d - \rho - l \cos(\theta)}{d} \right) \right]. \quad (2.12)$$

Finalizaremos a seção, descrevendo a equação do movimento e o formalismo hamiltoniano associado.

2.2 Equação do movimento

Em conformidade com o estudo realizado através da equação (2.12) e sabendo que a função Lagrangeana é da forma $L = T - V$, em especial, para o problema sugerido, $V = V_g + V_c$, chegamos a expressão:

$$L = \frac{m}{2} \left(\dot{\rho}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 - 2l\dot{\rho}\dot{\theta} \cos(\theta) \right) + mg(\rho + l \cos(\theta)) + 2k_0q\sigma \left[\log \left(\frac{d + \rho + l \cos(\theta)}{d} \right) + \log \left(\frac{d - \rho - l \cos(\theta)}{d} \right) \right]. \quad (2.13)$$

Em seguida, determinemos a equação de movimento, pelas equações de Euler-Lagrange, definido por, $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$. No problema proposto temos,

- $\frac{\partial L}{\partial \theta} = -ml\dot{\rho}\dot{\theta} \cos(\theta) - mgl \sin(\theta) + 2lk_0q\sigma \left[\frac{1}{d - \rho - l \cos(\theta)} - \frac{1}{d + \rho + l \cos(\theta)} \right] \sin(\theta),$
- $\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} - ml\dot{\rho} \cos(\theta),$

o que implica na expressão,

- $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = ml^2\ddot{\theta} - ml\ddot{\rho} \cos(\theta) - ml\dot{\rho}\dot{\theta} \sin(\theta).$

Desta forma, a equação é descrita como segue,

$$ml^2\ddot{\theta} - ml\ddot{\rho} \cos(\theta) - ml\dot{\rho}\dot{\theta} \sin(\theta) + ml\dot{\rho}\dot{\theta} \sin(\theta) + mgl \sin(\theta) + 2lk_0q\sigma \left[\frac{1}{d + \rho + l \cos(\theta)} - \frac{1}{d - \rho - l \cos(\theta)} \right] \sin(\theta) = 0.$$

Dividindo ambos os membros da equação acima por l e cancelando os termos opostos, ficamos com,

$$ml\ddot{\theta} - m\ddot{\rho} \cos(\theta) + mg \sin(\theta) + 2k_0q\sigma \left[\frac{1}{d + \rho + l \cos(\theta)} - \frac{1}{d - \rho - l \cos(\theta)} \right] \sin(\theta) = 0. \quad (2.14)$$

Agora, tomemos $\tau = \omega t$, e denotemos por (\prime) , as derivadas em relação a essa nova variável temporal. Dessa maneira,

$$\ddot{\theta} = \omega^2 \theta'' \quad \text{e} \quad \ddot{\rho} = \omega^2 \rho'', \quad (2.15)$$

e substituindo em (2.14), obtemos,

$$ml\omega^2 \theta'' + m\omega^2 a \cos(\tau) \sin(\theta) + mg \sin(\theta) + 2k_0 q \sigma \left[\frac{1}{d + a \cos(\tau) + l \cos(\theta)} - \frac{1}{d - a \cos(\tau) - l \cos(\theta)} \right] \sin(\theta) = 0. \quad (2.16)$$

Multiplicando ambos os membros da equação (2.16) por $\frac{1}{ml\omega^2}$, e por conveniência do estudo que se almeja, façamos $d = 2\ell$, $\alpha = \frac{g}{\ell\omega^2}$, $\varepsilon = \frac{a}{\ell}$, $\mu = \frac{q}{\ell\sigma}$ e tomando σ tal que $\frac{4k_0\sigma^2}{m\ell\nu^2} = 1$, a equação do movimento torna-se

$$\theta'' + \varepsilon \cos(\tau) \sin(\theta) + \alpha \sin(\theta) + \mu \left[\frac{1}{2 + \varepsilon \cos(\tau) + \cos(\theta)} - \frac{1}{2 - \varepsilon \cos(\tau) - \cos(\theta)} \right] \sin(\theta) = 0. \quad (2.17)$$

Quando $\mu = 0$, esta equação descreve o movimento de um pêndulo cujo ponto de suspensão oscila de forma harmônica na direção vertical, como descrito em [3],[7] e [24]. Os valores $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ representam pontos de equilíbrio para todos os valores dos parâmetros. Nosso objetivo é estudar a estabilidade paramétrica desses equilíbrios usando a formulação Hamiltoniana.

Fazendo $x = \theta$ e $y = \theta'$, a equação (2.17) pode ser escrito pelo sistema Hamiltoniano

$$x' = H_y, \quad y' = -H_x,$$

cuja função Hamiltoniana é dada por:

$$H(x, y, \tau, \varepsilon) = \frac{y^2}{2} - \varepsilon \cos(\tau) \cos(x) - \alpha \cos(x) - \mu \log [(2 - \cos(x) - \varepsilon \cos(\tau))(2 + \cos(x) + \varepsilon \cos(\tau))]. \quad (2.18)$$

3 Estabilidade linear

Os pontos $P_1 = (0, 0)$ e $P_2 = (\pi, 0)$ representam equilíbrios para todos os valores dos parâmetros deste sistema Hamiltoniano. Quando $\varepsilon = 0$ (amplitude nula), temos um

sistema autônomo com um grau de liberdade que descreve o movimento de um pêndulo carregado com ponto de suspensão fixo. Dessa forma,

$$H(x, y, \mu, \alpha) = \frac{y^2}{2} - \alpha \cos(x) - \mu \log [(2 - \cos(x))(2 + \cos(x))]. \quad (3.1)$$

A seguir, temos o seguinte resultado sobre a estabilidade linear desses pontos de equilíbrios.

Proposição 3.1. *Para $\varepsilon = 0$, o sistema definido por (2.18) é linearmente estável nas regiões,*

$$\mu < \frac{3}{2}\alpha \text{ para o equilíbrio } P_1 \text{ e } \mu < -\frac{3}{2}\alpha \text{ para o equilíbrio } P_2,$$

e instável nas regiões,

$$\mu > \frac{3}{2}\alpha \text{ para o equilíbrio } P_1 \text{ e } \mu > -\frac{3}{2}\alpha \text{ para o equilíbrio } P_2.$$

Demonstração. Utilizaremos a técnica de linearização do sistema hamiltoniano associado à forma (3.1) em torno dos pontos $P_1 = (0, 0)$ e $P_2 = (\pi, 0)$. Primeiramente, para P_1 , o sistema Hamiltoniano linearizado é descrito da forma,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = JD^2H(P_1)\vec{P},$$

onde, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ é a matriz simplética padrão de ordem 2 e $D^2H(P_1)$ é a matriz hessiana da função Hamiltoniana no ponto de equilíbrio. Assim,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{xx}(P_1) & H_{yx}(P_1) \\ H_{xy}(P_1) & H_{yy}(P_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Com isso,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha - \frac{2}{3}\mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha + \frac{2}{3}\mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

O sistema (3.4) é dito sistema Hamiltoniano linearizado com Hamiltoniana quadrática dada por:

$$H(x, y) = \frac{1}{2}Z^T \cdot S \cdot \vec{Z},$$

onde $\vec{Z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e $S = D^2H(P)$. Assim, para o ponto $P_1 = (0, 0)$, a forma quadrática não perturbada é expressa por:

$$H(x, y) = \frac{1}{2} \left(\alpha - \frac{2}{3}\mu \right) x^2 + \frac{1}{2}y^2 . \quad (3.5)$$

Analogamente, para o ponto $P_2 = (\pi, 0)$ temos que o sistema linearizado é dado pela seguinte expressão

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha + \frac{2}{3}\mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} , \quad (3.6)$$

com Hamiltoniana quadrática não perturbada:

$$H(x, y) = \frac{1}{2} \left(-\alpha - \frac{2}{3}\mu \right) x^2 + \frac{1}{2}y^2 . \quad (3.7)$$

Feito tal estudo, percebe-se que os valores de H_{xx} nos pontos de equilíbrios P_1 e P_2 , são respectivamente,

$$H_{xx} = \alpha - \frac{2}{3}\mu \quad \text{e} \quad H_{xx} = -\alpha - \frac{2}{3}\mu .$$

Logo, o resultado segue do Teorema de Dirichlet, como pode ser visto em [32], fazendo $H_{xx} > 0$, em ambos os casos. \square

4 Estabilidade paramétrica

Nesta seção, estamos interessados em estudar a estabilidade paramétrica do sistema Hamiltoniano associado à função (2.18) no espaço dos parâmetros $(\mu, \alpha, \varepsilon)$. Para alcançar esse objetivo, utilizaremos o Teorema de Krein-Gelfand-Lidskii, descrito em [7], [24], segundo o enunciado a seguir.

Teorema de Krein-Gelfand-Lidskii. *Considere um sistema Hamiltoniano linear, cuja função Hamiltoniana é da forma*

$$H = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sigma_k (x_k^2 + y_k^2) + \varepsilon H_1 + \varepsilon^2 H_2 + \dots , \quad (4.1)$$

onde H_1, H_2, \dots são formas quadráticas nas variáveis $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$ com coeficientes contínuos e 2π -periódicos em t e $\sigma_k = \delta_k \omega_k$ ($\delta_k = 1$ ou $\delta_k = -1$). Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, o sistema linear com hamiltoniano (4.1) é estável se, e somente se,

os coeficientes σ_k não estão vinculadas pelas relações

$$\sigma_k + \sigma_l = N, \quad (4.2)$$

com $k, l = 1, 2, \dots, n$ e $N = \pm 1, \pm 2, \dots$.

O sistema definido por (2.18) é um sistema Hamiltoniano que varia com o tempo e depende dos parâmetros μ, α e ε . Investigaremos a estabilidade do sistema linearizado em torno dos equilíbrios $P_1 = (0, 0)$, quando $\mu > \frac{3}{2}\alpha$, e $P_2 = (\pi, 0)$, quando $\mu < -\frac{3}{2}\alpha$.

Fazendo $\xi = x - x_0$ e $\eta = y$, com $x_0 = 0$ para P_1 e $x_0 = \pi$ para P_2 , as funções Hamiltonianas linearizadas são dadas, respectivamente, por:

$$H(\xi, \eta, \tau, \mu, \alpha, \varepsilon) = \frac{\eta^2}{2} + \frac{\xi^2}{2} \left[\varepsilon \cos \tau + \alpha - 2\mu \frac{(1 + \varepsilon \cos(\tau))}{(3 + \varepsilon \cos(\tau))(1 - \varepsilon \cos(\tau))} \right], \quad (4.3)$$

$$H(\xi, \eta, \tau, \mu, \alpha, \varepsilon) = \frac{\eta^2}{2} - \frac{\xi^2}{2} \left[\varepsilon \cos \tau + \alpha + 2\mu \frac{(1 - \varepsilon \cos(\tau))}{(3 - \varepsilon \cos(\tau))(1 + \varepsilon \cos(\tau))} \right]. \quad (4.4)$$

Aplicando a transformação simplética $(\xi, \eta) \rightarrow (x, y)$ dada por:

$$\xi = \omega^{-1/2}x, \quad \eta = \omega^{1/2}y,$$

onde $\omega^2 = \alpha - \frac{2\mu}{3}$ para P_1 , $\omega^2 = -\alpha - \frac{2\mu}{3}$ para P_2 , e fazendo a expansão em séries de potências dos Hamiltonianos (4.3) e (4.4) obtemos as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} H(x, y, \tau, \mu, \alpha, \varepsilon) &= \frac{\omega}{2}(x^2 + y^2) + \frac{x^2}{2\omega} \cos(\tau) \varepsilon - \frac{\mu x^2}{2\omega} \sum_{j \geq 1} \frac{3^{2j} + 1}{3^{2j}} \cos^{2j-1} \varepsilon^{2j-1} - \\ &- \frac{\mu x^2}{2\omega} \sum_{j \geq 1} \frac{3^{2j+1} - 1}{3^{2j+1}} \cos^{2j} \varepsilon^{2j}, \quad \text{para } P_1 = (0, 0), \end{aligned} \quad (4.5)$$

e,

$$\begin{aligned} H(x, y, \tau, \mu, \alpha, \varepsilon) &= \frac{\omega}{2}(x^2 + y^2) - \frac{x^2}{2\omega} \cos(\tau) \varepsilon + \frac{\mu x^2}{2\omega} \sum_{j \geq 1} \frac{3^{2j} + 1}{3^{2j}} \cos^{2j-1} \varepsilon^{2j-1} - \\ &- \frac{\mu x^2}{2\omega} \sum_{j \geq 1} \frac{3^{2j+1} - 1}{3^{2j+1}} \cos^{2j} \varepsilon^{2j}, \quad \text{para } P_2 = (\pi, 0). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Conforme o Teorema de Krein-Gelfand-Lidskii, se $2\omega(\mu, \alpha) = N$ para algum número inteiro N , o sistema linear não perturbado é instável. Analisando o sistema no espaço de parâmetros $(\mu, \alpha, \varepsilon)$, a equação $2\omega(\mu, \alpha) = N$ define uma curva no subespaço $(\mu, \alpha, 0)$.

Portanto, se $\varepsilon > 0$, o ponto $(\mu_0, \alpha_0, \varepsilon)$ pode ou não ser estável, dependendo do ponto $(\mu_0, \alpha_0, 0)$ na curva. Para separar as regiões de estabilidade e instabilidade, serão construídas superfícies fronteiras no espaço de parâmetros $(\mu, \alpha, \varepsilon)$, e expressas como séries de potências de ε , com coeficientes dependentes de μ :

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon + \alpha_2\varepsilon^2 + \alpha_3\varepsilon^3 + \alpha_4\varepsilon^4 + \mathcal{O}(\varepsilon^5), \quad (4.7)$$

onde $\alpha_j = \alpha_j(\mu)$ para $j \geq 1$ são funções de μ . $\alpha_0 = (3N^2 + 8\mu)/12$ para P_1 e $\alpha_0 = -(3\mu + 8N^2)/12$ para P_2 são curvas no plano $(\mu, \alpha, 0)$ dadas pela equação $2\omega(\mu, \alpha) = N$.

A expressão de α na equação (4.7) desempenha um papel essencial por permitir identificarmos as superfícies fronteiras que separam as regiões de estabilidade e instabilidade no espaço de parâmetros. Para tal, substituiremos (4.7) nos Hamiltonianos (4.5) e (4.6), realizaremos uma expansão em série de potências em ε , e rearranjando adequadamente obtemos

$$\mathcal{H}(x, y, \tau, \mu, \alpha, \varepsilon) = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1\varepsilon + \mathcal{H}_2\varepsilon^2 + \dots, \quad (4.8)$$

com, $\mathcal{H}_0 = \frac{\omega_0}{2}(x^2 + y^2)$, onde, para o ponto $P_1 = (0, 0)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 &= \frac{x^2}{N} \left(\alpha_1 + \cos(\tau) - \frac{10}{9}\mu \cos(\tau) \right), \\ \mathcal{H}_{2j} &= \frac{1}{N} \sum_{j \geq 1} \left[\alpha_{2j} - \left(\frac{3^{2j+1} - 1}{3^{2j+1}} \right) \mu \cos^{2j}(\tau) \right] x^2, \\ \mathcal{H}_{2j+1} &= \frac{1}{N} \sum_{j \geq 1} \left[\alpha_{2j+1} - \left(\frac{3^{2j+2} - 1}{3^{2j+2}} \right) \mu \cos^{2j+1}(\tau) \right] x^2, \end{aligned} \quad (4.9)$$

e, para o ponto $P_2 = (\pi, 0)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 &= \frac{x^2}{N} \left(-\alpha_1 - \cos(\tau) + \frac{10}{9}\mu \cos(\tau) \right), \\ \mathcal{H}_{2j} &= -\frac{1}{N} \sum_{j \geq 1} \left[\alpha_{2j} + \left(\frac{3^{2j+1} - 1}{3^{2j+1}} \right) \mu \cos^{2j}(\tau) \right] x^2, \\ \mathcal{H}_{2j+1} &= -\frac{1}{N} \sum_{j \geq 1} \left[\alpha_{2j+1} - \left(\frac{3^{2j+2} + 1}{3^{2j+2}} \right) \mu \cos^{2j+1}(\tau) \right] x^2. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Com o propósito de simplificar a função hamiltoniana (4.8) faremos uma transformação de variáveis simpléticas para obter o Hamiltoniano que será utilizado no método de Deprit-Hori. Pela transformação rotação

$$x = X \cos(\sqrt{\omega_0}\tau) + Y \sin(\sqrt{\omega_0}\tau), \quad y = -X \sin(\sqrt{\omega_0}\tau) + Y \cos(\sqrt{\omega_0}\tau),$$

o termo \mathcal{H}_0 é eliminado, e o novo hamiltoniano torna-se:

$$H(X, Y, \tau, \mu, \alpha, \varepsilon) = H_1 \varepsilon + H_2 \varepsilon^2 + \dots, \quad (4.11)$$

onde as expressões para os polinômios homogêneos, expostos em (4.9) e 4.10, são modificados, substituindo pelo valor $x = X \cos(\sqrt{\omega_0}\tau) + Y \sin(\sqrt{\omega_0}\tau)$.

O hamiltoniano (4.11) é crucial para o estudo posterior, pois o mesmo será utilizado no método de Deprit-Hori para calcular os coeficientes α_j de (4.7). Vale salientar que a rotação simplética aqui realizada elimina o termo \mathcal{H}_0 do Hamiltoniano, como descrito em [5], [7], resultando em uma significativa redução na complexidade dos cálculos dos coeficientes α_j . A seção seguinte será dedicada ao cálculo desses coeficientes.

5 Superfícies de estabilidade e instabilidade

Nesta seção, aplicaremos o método de Deprit-Hori [1, 11, 14, 24] ao Hamiltoniano (4.11) para encontrar superfícies fronteiras que dividem as regiões de estabilidade e instabilidade. O método permite transformar, por meio de uma mudança de variáveis simpléticas $X, Y \rightarrow p, P$, funções Hamiltonianas da forma

$$H(X, Y, \nu, \varepsilon) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^m}{m!} H_m(X, Y, \nu), \quad (5.1)$$

em um Hamiltoniano autônomo da forma

$$K(p, P) = k_{02}p^2 + k_{11}pP + k_{20}P^2, \quad (5.2)$$

onde $k_{ij} = \sum_{m=1}^{\infty} k_{ij}^{(m)} \varepsilon^m$, com $k_{ij}^{(m)}$ dependendo de $\alpha_1, \dots, \alpha_m$.

Aplicando o método de Deprit-Hori ao Hamiltoniano (4.11), obtemos um Hamiltoniano da forma (5.2), com o termo k_{11} identicamente zero. Isso implica que a equação característica é da forma $\lambda^2 + 4k_{20}k_{02} = 0$. A região de estabilidade é determinada pela desigualdade $k_{20}k_{02} > 0$, cuja fronteira é dada pela equação $k_{20}k_{02} = 0$, ou seja, quando

$$k_{20} = 0 \quad \text{ou} \quad k_{02} = 0. \quad (5.3)$$

Ao igualar a zero os coeficientes de todas as potências de ε nas expressões k_{20} e k_{02} , encontramos os coeficientes $\alpha_j(\mu)$ em (4.7), o que permite determinarmos as superfícies fronteiras no espaço dos parâmetros $(\mu, \alpha, \varepsilon)$. Estas superfícies derivam da curva $\alpha_0 = (3N^2 + 8\mu)/12$ para P_1 e $\alpha_0 = -(8\mu + 3N^2)/12$ para P_2 , definidas pela equação $2\omega(\mu, \alpha) = N$, $N \geq 1$, no plano $\varepsilon = 0$.

5.1 Construção das superfícies para o ponto de equilíbrio P_1 .

Nesta subseção, encontramos as superfícies fronteiras que separam as regiões de estabilidade e instabilidade para o equilíbrio P_1 usando o método de Deprit-Hori. Esse método é aplicado ao Hamiltoniano (4.11) para ressonâncias da forma $2\omega = N$, onde $N = 1, 2, 3, \dots$ e para $\omega_0^2 = \alpha_0 - \frac{2}{3}\mu$.

Teorema 5.1. *As superfícies fronteiras separando as regiões de estabilidade e instabilidade para o equilíbrio P_1 associadas à ressonância $2\omega = 1$ são parametrizadas por*

$$\alpha = \frac{\frac{1}{12}(3 + 8\mu) + \varepsilon \left(-\frac{1}{2} + \frac{5\mu}{9} \right) + \frac{\varepsilon^2(-81 + 492\mu - 100\mu^2)}{648} + \frac{\varepsilon^3(729 + 9234\mu - 420\mu^2 - 1000\mu^3)}{23328} + \frac{\varepsilon^4(-6561 + 1397736\mu - 564984\mu^2 - 26400\mu^3 - 10000\mu^4)}{2519424}, \quad (5.4)$$

$$\alpha = \frac{\frac{1}{12}(3 + 8\mu) + \varepsilon \left(\frac{1}{2} - \frac{5\mu}{9} \right) + \frac{\varepsilon^2(-81 + 492\mu - 100\mu^2)}{648} + \frac{\varepsilon^3(-729 - 9234\mu + 420\mu^2 + 1000\mu^3)}{23328} + \frac{\varepsilon^4(-6561 + 1397736\mu - 564984\mu^2 - 26400\mu^3 - 10000\mu^4)}{2519424}. \quad (5.5)$$

Demonstração. Aplicando o método de Deprit-Hori ao Hamiltoniano (4.11) com $\omega_0^2 = \alpha_0 - \frac{2}{3}\mu$ e $N = 1$ obtemos um Hamiltoniano da forma (5.2) cujo coeficiente k_{11} é identicamente igual a zero e os coeficientes k_{20} e k_{02} são dados por:

$$k_{20}^{(1)} = \frac{1}{4} + \frac{\alpha_1}{2} - \frac{5\mu}{18},$$

$$k_{20}^{(2)} = \frac{1}{432} [-81 - 216\alpha_1^2 + 216\alpha_2 + 76\mu - 100\mu^2 + 36\alpha_1(-9 + 10\mu)],$$

e

$$k_{02}^{(1)} - k_{20}^{(1)} = -\frac{1}{2} + \frac{5\mu}{9}, \quad k_{02}^{(2)} - k_{20}^{(2)} = \frac{\alpha_1}{6}(9 - 10\mu).$$

Das equações (5.3), obtemos duas superfícies no espaço dos parâmetros, determinadas por igualar os coeficientes em k_{20} e k_{02} a zero. Essas superfícies são parametrizadas na equação (5.5). \square

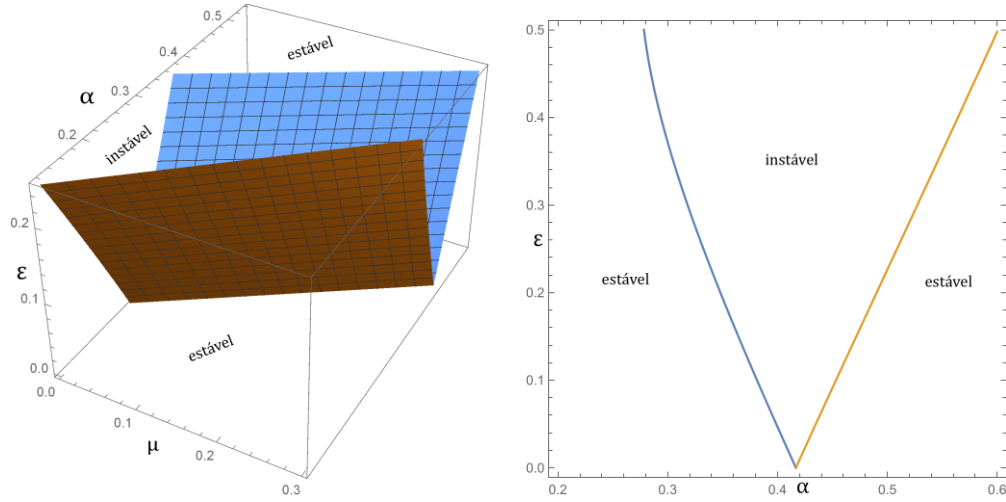


Figura 2: Superfícies separando regiões de estabilidade e instabilidade para P_1 e $N = 1$ e seção planar quando $\mu = \frac{1}{4}$, ver equações (5.4) e (5.5).

As duas superfícies encontradas delimitam a região de instabilidade associada à ressonância $2\omega = 1$ para o equilíbrio P_1 . A Fig. 2 mostra à esquerda as superfícies que marcam os limites da região de instabilidade, e à direita a seção plana desse espaço no plano $\mu = \frac{1}{4}$.

A seguir, construímos as superfícies que emanam de pontos onde há ressonâncias de Krein $2\omega(\mu, \alpha) = 2$ e $2\omega(\mu, \alpha) = 3$.

Teorema 5.2. *As superfícies fronteiras separando as regiões de estabilidade e instabilidade para o equilíbrio P_1 associadas à ressonância $2\omega = 2$ e são parametrizadas pelas superfícies dadas pelas expressões*

$$\alpha = \frac{1}{12}(12 + 8\mu) + \frac{\varepsilon^2(405 - 198\mu + 500\mu^2)}{972} + \frac{\varepsilon^4(-5006043 + 18385380\mu - 12174948\mu^2 + 21805200\mu^3 - 7630000\mu^4)}{22674816}, \quad (5.6)$$

$$\alpha = \frac{1}{12}(12 + 8\mu) + \frac{\varepsilon^2(-81 + 414\mu - 100\mu^2)}{972} + \frac{\varepsilon^4(32805 + 4855140\mu - 2636388\mu^2 + 147600\mu^3 + 50000\mu^4)}{22674816}. \quad (5.7)$$

Demonstração. Neste caso, usando $\omega_0^2 = \alpha_0 - \frac{2}{3}\mu$ e $N = 2$, os coeficientes k_{20} e de k_{02} são dados por

$$k_{20}^{(1)} = \frac{\alpha_1}{4}$$

$$k_{20}^{(2)} = \frac{-405 - 243\alpha_1^2 + 972\alpha_2 + 198\mu - 500\mu^2}{3888},$$

e

$$k_{02}^{(1)} = k_{20}^{(1)}, \quad k_{02}^{(2)} - k_{20}^{(2)} = \frac{81 - 102\mu + 100\mu^2}{648}.$$

As equações $k_{20} = 0$ e $k_{02} = 0$ nos fornecem, respectivamente, as superfícies dadas por (5.6) e (5.7). \square

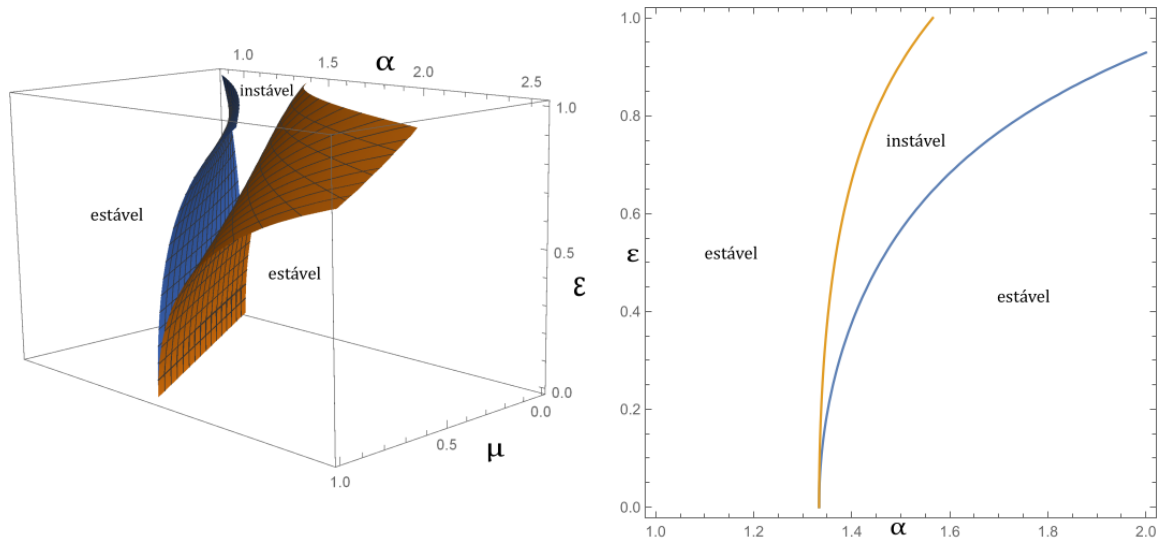


Figura 3: Superfícies separando regiões de estabilidade e instabilidade para P_1 quando $N = 2$ e seção planar quando $\mu = \frac{1}{2}$, ver equações (5.6) e (5.7).

Finalizamos esta subseção, apresentando o resultado para o caso de ressonância de Krein $2\omega = 3$, no ponto de equilíbrio P_1 , conforme enunciado a seguir.

Teorema 5.3. *As superfícies fronteiras separando as regiões de estabilidade e instabilidade para o equilíbrio P_1 associadas à ressonância $2\omega = 3$ são parametrizadas por*

$$\alpha = \frac{1}{12}(27 + 8\mu) + \frac{\varepsilon^2(81 + 444\mu + 100\mu^2)}{1296} + \frac{\varepsilon^3(-729 + 2574\mu + 420\mu^2 + 1000\mu^3)}{23328} + \frac{\varepsilon^4(-85293 + 9584568\mu + 3605112\mu^2 + 280800\mu^3 + 130000\mu^4)}{33592320}, \quad (5.8)$$

$$\alpha = \frac{1}{12}(27 + 8\mu) + \frac{\varepsilon^2(81 + 444\mu + 100\mu^2)}{1296} + \frac{\varepsilon^3(729 - 2574\mu - 420\mu^2 - 1000\mu^3)}{23328} + \frac{\varepsilon^4(85293 + 9584568\mu + 3605112\mu^2 + 280800\mu^3 + 130000\mu^4)}{33592320}. \quad (5.9)$$

Demonstração. Com $\omega_0^2 = \alpha_0 - \frac{2}{3}\mu$ e $N = 3$, os coeficientes de k_{20} e k_{02} são

$$k_{20}^{(1)} = \frac{\alpha_1}{6}$$

$$k_{20}^{(2)} = -\frac{1}{7776} [-81 - 144\alpha_1^2 + 1296\alpha_2 - 804\mu - 100\mu^2 - 24\alpha(9 + 10\mu)]$$

e

$$k_{02}^{(1)} = k_{20}^{(1)}, \quad k_{02}^{(2)} - k_{20}^{(2)} = \frac{\alpha_1(9+10\mu)}{162}.$$

Fazendo $k_{20} = 0$ e $k_{02} = 0$, obtemos, respectivamente, as superfícies dada na equação (5.9). \square

Observação 1. No processo de surgimento das superfícies emanando dos pontos no espaço dos parâmetros onde há ressonâncias de Krein, conforme a variação $N = 1, 2, 3, \dots$, obtemos uma divisão intercalada de regiões de estabilidade e regiões de instabilidade para o equilíbrio P_1 no espaço de parâmetros $(\mu, \alpha, \varepsilon)$. A Fig. 5 mostra esta divisão para os casos $N = 1, 2, 3$ para uma variação ε suficientemente pequena.

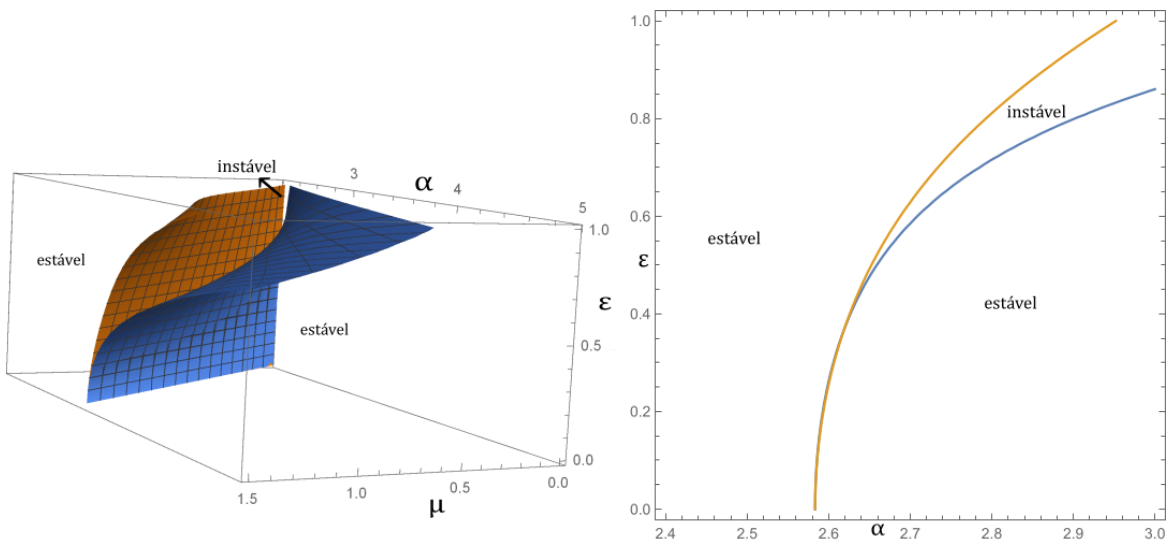


Figura 4: Superfícies separando regiões de estabilidade e instabilidade para P_1 quando $N = 3$ e seção planar quando $\mu = \frac{1}{2}$, ver equações em (5.8) e (5.9).

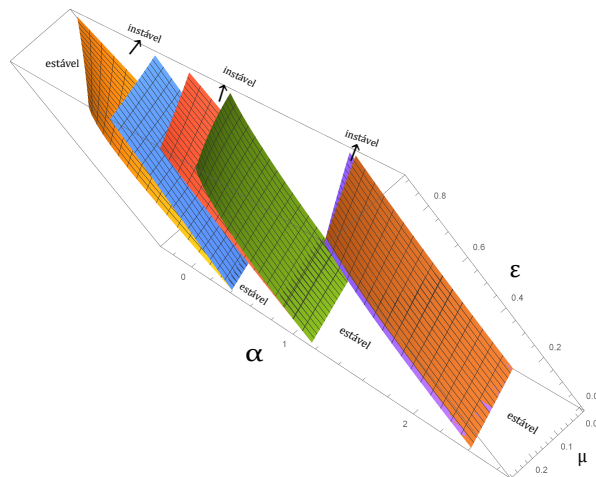


Figura 5: Superfícies separando regiões de estabilidade e instabilidade para P_1 nos casos $N = 1, 2, 3$, ver equações em (5.4)–5.9.

Observação 2. Vale ressaltar agora que, fazendo $\mu = 0$, significa que o parâmetro associado à carga é igual a zero, desta forma, a equação de movimento (2.17) descreve o movimento de um pêndulo não carregado oscilando harmonicamente na vertical, como discutido em [3], [7] e [24]. Adicionalmente, as curvas obtidas com $\mu = 0$ a partir das equações (5.5)–(5.9) são idênticas às curvas fronteiras da equação de Mathieu encontradas em [3].

A seguir, será analisado todo processo de construção de superfícies que delimitam regiões de instabilidade e instabilidade para o ponto de equilíbrio $P_2 = (\pi, 0)$.

5.2 Construção de superfícies para o ponto de equilíbrio P_2

No caso do equilíbrio P_2 , utilizamos o método de Deprit-Hori na função Hamiltoniana (4.11) para cada ressonância da forma $2\omega = N$, com $N = 1, 2, 3, \dots$, $\omega_0^2 = -\frac{2}{3}\mu - \alpha_0$, e utilizando as equações em (5.3), obtivemos o seguinte resultado:

Teorema 5.4. *As superfícies fronteiras que separam as regiões de estabilidade e instabilidade para o equilíbrio P_2 associadas à ressonância $2\omega = N$ são dadas por:*

- Para $N = 1$

$$\alpha = \frac{1}{12}(-3 - 8\mu) + \varepsilon \left(-\frac{1}{2} + \frac{5\mu}{9} \right) + \frac{\varepsilon^2(81 - 492\mu + 100\mu^2)}{648} + \frac{\varepsilon^3(729 + 9234\mu - 420\mu^2 - 1000\mu^3)}{2519424} + \frac{23328\varepsilon^4(6561 - 1397736\mu + 564984\mu^2 + 26400\mu^3 + 10000\mu^4)}{2519424}, \quad (5.10)$$

$$\alpha = \frac{1}{12}(-3 - 8\mu) + \varepsilon \left(\frac{1}{2} - \frac{5\mu}{9} \right) + \frac{\varepsilon^2(81 - 492\mu + 100\mu^2)}{648} + \frac{\varepsilon^3(-729 - 9234\mu + 420\mu^2 + 1000\mu^3)}{2519424} + \frac{23328\varepsilon^4(6561 - 1397736\mu + 564984\mu^2 + 26400\mu^3 + 10000\mu^4)}{2519424}. \quad (5.11)$$

- Para $N = 2$

$$\alpha = \frac{1}{12}(-12 - 8\mu) + \frac{\varepsilon^2(-405 + 198\mu - 500\mu^2)}{972} + \frac{\varepsilon^4(5006043 - 18385380\mu + 12174948\mu^2 - 21805200\mu^3 + 7630000\mu^4)}{22674816}, \quad (5.12)$$

$$\alpha = \frac{1}{12}(-12 - 8\mu) + \frac{\varepsilon^2(81 - 414\mu + 100\mu^2)}{\varepsilon^4(-32805 - 4855140\mu + 2636388\mu^2 - 147600\mu^3 - 50000\mu^4)} + \frac{972}{22674816} \quad (5.13)$$

• Para $N = 3$

$$\alpha = \frac{1}{12}(-27 - 8\mu) + \frac{\varepsilon^2(-81 - 444\mu - 100\mu^2)}{\varepsilon^3(-729 + 2574\mu + 420\mu^2 + 1000\mu^3)} + \frac{1296}{23328} + \frac{\varepsilon^4(-85293 - 9584568\mu - 3605112\mu^2 - 280800\mu^3 - 130000\mu^4)}{33592320} \quad (5.14)$$

$$\alpha = \frac{1}{12}(-27 - 8\mu) + \frac{\varepsilon^2(-81 - 444\mu - 100\mu^2)}{\varepsilon^3(729 - 2574\mu - 420\mu^2 - 1000\mu^3)} + \frac{1296}{23328} + \frac{\varepsilon^4(-85293 - 9584568\mu - 3605112\mu^2 - 280800\mu^3 - 130000\mu^4)}{33592320} \quad (5.15)$$

Analogamente ao processo realizado para o equilíbrio P_1 , continuamos o processo para $N = 1, 2, 3, \dots$ e obtemos uma decomposição do espaço de parâmetros $(\mu, \alpha, \varepsilon)$ em regiões de estabilidade e instabilidade para o equilíbrio P_2 , ilustrado na Fig.6.

Finalmente, representaremos no espaço dos parâmetros, para a seção transversal $\mu = -\frac{1}{4}$ as curvas que emanam do pontos onde ocorrem ressonâncias de Krein $2\omega = 1, 2\omega = 2$ e $2\omega = 3$ e dividem as regiões de estabilidade e instabilidade, conforme mostrado em Fig.7.

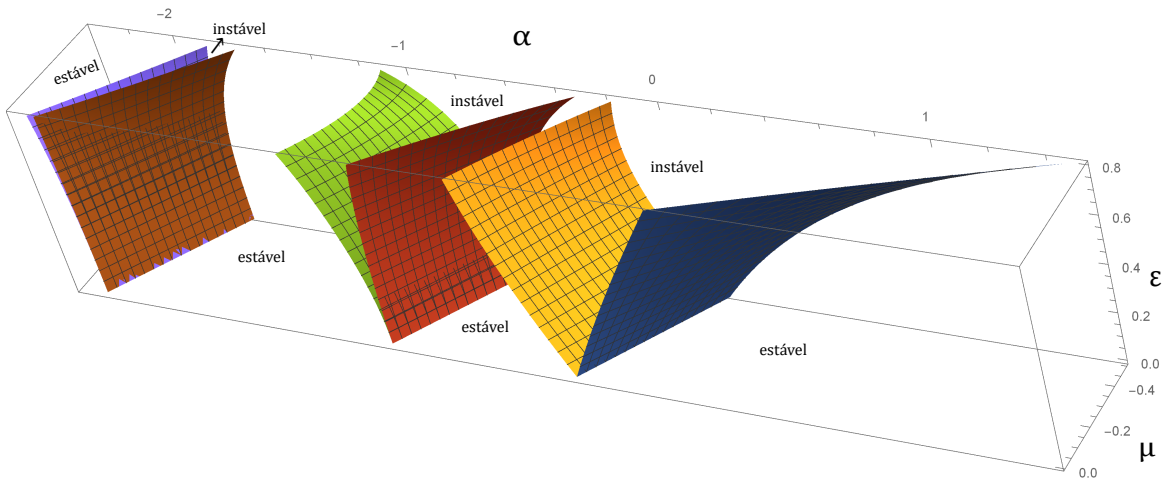


Figura 6: Superfícies separando regiões de estabilidade e instabilidade para P_2 quando $N = 1, 2, 3$, ver equações (5.10)–(5.15).

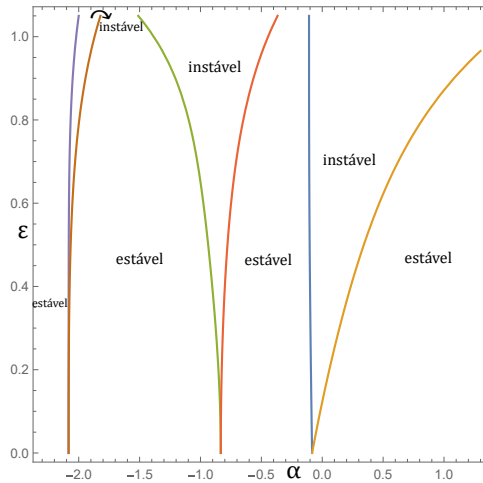


Figura 7: Seção Planar $\mu = -\frac{1}{4}$ das regiões de estabilidade e instabilidade para P_2 quando $N = 1, 2, 3$, ver equações (5.10)–(5.15).

6 Conclusão

Ao longo deste artigo deduzimos matematicamente a equação do movimento de uma variação de um problema da Mecânica Clássica, a saber, o estudo de osciladores paramétricos, no qual abordamos um pêndulo com ponto de suspensão oscilante, com o bulbo com uma carga q entre duas retas com distribuição uniforme de cargas elétricas. Encontramos os pontos de equilíbrios e a estabilidade linear do sistema hamiltoniano linear associado ao problema. Em seguida, analisamos a estabilidade paramétrica, pelo formalismo Hamiltoniano no espaço dos parâmetros $(\mu, \alpha, \varepsilon)$, com o intuito de oferecer informações analíticas do sistema Hamiltoniano vinculado ao problema proposto. Em suma, encontramos dois pontos de equilíbrio $P_1 = (0, 0)$ e $P_2 = (\pi, 0)$, verificamos que, para o sistema Hamiltoniano linear autônomo, quando, $\varepsilon = 0$, encontramos estabilidade linear nas regiões $\mu < \frac{3}{2}\alpha$ e $\mu < -\frac{3}{2}\alpha$, respectivamente. Posteriormente, normalizamos a parte quadrática da função Hamiltoniana, usando o método de Deprit-Hori para encontrar as superfícies que separam as regiões de estabilidade e instabilidade no espaço dos parâmetros. Essas superfícies foram obtidas como gráficos sobre o espaço $(\mu, \alpha, \varepsilon)$, determinando os coeficientes de suas parametrizações até a quarta ordem, com respeito ao parâmetro ε para valores suficientemente pequenos e como função do parâmetro μ . Destacamos que, quando fixamos μ como uma constante, obtemos as curvas fronteiras das regiões de estabilidade e instabilidade no plano (α, ε) , como ilustrado nas figuras, Fig.2, Fig.3, Fig.4 e Fig.7. Em particular, quando $\mu = 0$, obtemos as curvas fronteiras da equação de Mathieu, encontradas previamente em [3], [7], [24].

Agradecimentos

Os autores agradecem aos revisores pela leitura minuciosa e pelas essenciais sugestões que contribuíram significativamente para enriquecer este trabalho. Nossos sinceros cumprimentos a gentileza do editor da revista. Finalmente, a primeira autora agradece ao PNAES/UFS, pois foi bolsista no Projeto de Iniciação Científica: PIB11787-2022 — Teoria das Oscilações Paramétricas via Formalismo Lagrangeano e Hamiltoniano, Plano de Trabalho: Estabilidade linear do Pêndulo com suspensão oscilante de bulbo eletrizado entre placas energizadas.

Referências

- [1] Araujo, G. C., Cabral, H. E.: Parametric Stability in a $P + 2$ -Body Problem. *J. Dyn Diff Equat.* **30**, 719-742 (2018).
- [2] Araujo, G. C., Cabral, H. E.: Parametric Stability of a Charged Pendulum with an Oscillating Suspension Point. *Regular and Chaotic Dynamics*. Vol. 26, No 1, 39-60 (2021).
- [3] Bardin, B. S., Markeev, A. P.: The Stability of the Equilibrium of a Pendulum for Vertical Oscillations of the Point of Suspension. *J. App. Maths Mechs.* **59** (6), 879-886, (1995).
- [4] Cabral, E. H., Amorim, T. A.: Subharmonic Solutions of a Pendulum under Vertical Anharmonic Oscillations of the Point of Suspension. *Regular and Chaotic Dynamics*. **22**, 782-791 (2017).
- [5] Cabral, H. E. Carvalho, A. C.: Parametric Stability of a Charged Pendulum with Oscillating Suspension Point. *Journal of Differential Equations*. Vol. 284, 23-38 (2021).
- [6] Cabral, H. E. Carvalho, A. C.: Parametric Resonance in the Oscillations of a Charged Pendulum Inside a Uniformly Charged Circular Ring . *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. Vol. 18, No.4, 513-526 (2022).
- [7] Cabral, H. E. and Dias, L. B., *Normal Forms and Stability of Hamiltonian Systems*, New York: Springer: 2023.
- [8] Carvalho, A.C., Araujo, G.C. Parametric Resonance of a Charged Pendulum with a Suspension Point Oscillating Between Two Vertical Charged Lines. *Regul. Chaot. Dyn.* 28, 321-331 (2023).
- [9] Churkina, T.: Stability of a planar resonance satellite motion under spatial perturbations. *Mech. of Solids*, 42:507-516, 2007.
- [10] Dadfar, M. B. and Geer, J. F., Power Series Solution to a Simple Pendulum with Oscillating Support, *SIAM J. Appl. Math.* , 1987, vol. 47, no. 4, pp. 737–750.
- [11] Dias, L. F. B., Cabral, H. E.: Parametric Stability in a Sitnikov-like Restricted P-body Problem. *Journal of Dynamics and Differential Equations*. **30**: 81-82 (2018).

- [12] Formalskii, A. M., Stabilization of an Inverted Pendulum with a Fixed or Movable Suspension Point, *Dokl. Math.* , 2006, vol. 73, no. 1, pp. 152–156.
- [13] Kallu, K. D., Nawaz, M. H., Abbas, N., Pruncu, C. I., and Hasnain, C., Dynamic Response of an Inverted Pendulum System in Water under Parametric Excitations for Energy Harvesting: A Conceptual Approach, *Energies*, 2020, vol. 13, no. 19, Art. 5215, 15 pp.
- [14] Kamel, A.: Expansion formulae in canonical transformations depending on a small parameter. *Celest. Mech.* **1**, 190-199 (1969).
- [15] Kapitsa, P. L.: The dynamic stability of a pendulum for an oscillating point of suspension, *Zh. Èksp. Teor. Fiz.* **21** (5), 588-598 (1951).
- [16] Kapitsa, P. L.: A pendulum with a vibrating suspension. *Uspekhi Fiz. Nauk.* **44**(1), 7-20 (1951).
- [17] Kapitza, P. L., Pendulum with a Vibrating Suspension, *Usp. Fiz. Nauk*, 1951, vol. 44, pp. 7–20 (Russian). See also: *Collected Papers of P. L. Kapitza: Vol. 2*, D. ter Haar (Ed.), Oxford: Pergamon, 1965, pp. 726–737.
- [18] Kapitsa, P. L., The Dynamic Stability of a Pendulum for an Oscillating Point of Suspension, *Zh. Èksp. Teor. Fiz.* , 1951, vol. 21, no. 5, pp. 588–598 (Russian).
- [19] Kholostova O. V., On motions of a pendulum with a vibrating suspension point, *Teor. Mekh.* , 2003, no. 24, pp. 157–167 (Russian).
- [20] Kholostova, O. V., On the Motions of a Double Pendulum with Vibrating Suspension Point, *Mech. Solids*, 2009, vol. 44, no. 2, pp. 184–197; see also: *Izv. Ross. Akad. Nauk. Mekh. Tverd. Tela*, 2009, no. 2, pp. 25-40.
- [21] Kholostova, O. V. Some problems of the motion of a pendulum when there are horizontal vibrations of the point of suspension. *J. Appl. Math Mechs.* **59**, 553-561 (1995).
- [22] Kholostova, O. V., On Stability of Relative Equilibria of a Double Pendulum with Vibrating Suspension Point, *Mech. Solids*, 2011, vol. 46, no. 4, pp. 508–518.
- [23] Madigan, C., *Pendulum with a Moving Pivot*, Truro, N.S.: Nova Scotia Agricultural College, 2007.

- [24] Markeev, A. P.: Linear Hamiltonian Systems and Some Problems of Stability of the Satellite Center of Mass. Regular and Chaotics Dynamics, Izhevsk (2009) (**in Russian**).
- [25] Markeev, A.P.: On one Spacial Case of Parametric Resonance in Problems of Celestial Mechanics. Astronomy Letters, 31:388-394, 2005.
- [26] Menezes Neto, J. L. de; Araujo, G. C. ; Rothen, Y. P. ; Vidal, Claudio. Parametric stability of a double pendulum with variable length and with its center of mass in an elliptic orbit. Journal of Geometric Mechanics, v. 14, p. 1, 2022.
- [27] Menezes Neto, J. L. de, and Cabral, H. E., Parametric Stability of a Pendulum with Variable Length in an Elliptic Orbit, Regular and Chaotic Dynamics, vol. 25, no. 4, pp. 323-329, 2020.
- [28] Menezes Neto, J. L. de; Carvalho, A. C.; Carvalho, R. F. L.. Estabilidade paramétrica de um pêndulo carregado próximo a um fio carregado oscilante. Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática, v. 8, p. 1-19, 2023.
- [29] Morozov, A. D., The Problem of a Pendulum with an Oscillating Point of Suspension, J. Appl. Math. Mech. , 1995, vol. 59, no. 4, pp. 563–570; see also: Prikl. Mat. Mekh. , 1995, vol. 59, no. 4, pp. 590-598.
- [30] Neishtadt, A. I. and Sheng, K., Bifurcations of Phase Portraits of Pendulum with Vibrating Suspension Point, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. , 2017, vol. 47, pp. 71–80.
- [31] Ovseyevich, A. I., The Stability of an Inverted Pendulum When There Are Rapid Random Oscillations of the Suspension Point, J. Appl. Math. Mech. , 2006, vol. 70, no. 5, pp. 761–768; see also: Prikl. Mat. Mekh. , 2006, vol. 70, no. 5, pp. 844-851.
- [32] Siegel, C. L., Moser, J. K.: Lectures on Celestial Mechanics. Springer-Verlag, New York (1971).

Recebido em 26 de Outubro de 2023.
1^a Revisão 28 de Novembro de 2023.
2^a Revisão 29 de Abril de 2024.
Aceito em 11 de Junho de 2024.