

ANÁLISE ESTÁTICA DE MICROVIGAS DE TIMOSHENKO POR MEIO DA TEORIA TENSÃO-MOMENTO MODIFICADA

Joseph Richard Santana Rodrigues
Universidade Federal de Sergipe
richard_rck@academico.ufs.br

Fabio Carlos da Rocha
Universidade Federal de Sergipe
fabiocrocha@academico.ufs.br

Resumo

O aumento da utilização de vigas em escalas micro e nano motivou o desenvolvimento de teorias capazes de incorporar os efeitos de escala, uma vez que a teoria clássica revela limitações na sua capacidade de modelar com precisão os fenômenos dependentes do tamanho. O presente estudo aborda essa lacuna ao empregar a teoria de vigas de Timoshenko aplicada à teoria da elasticidade com gradiente de deformação na análise de vigas sob diferentes condições de vinculação: simplesmente apoiada, duplamente engastada, engastada e apoiada, engastada e livre. Para a formulação do problema foi utilizado o Método de Ritz. Os resultados obtidos foram comparados com aqueles derivados da mecânica do contínuo clássica e outros disponíveis na literatura.

Palavras-chaves: efeito de escala, teoria de viga de Timoshenko, gradiente de deformação.

Abstract

The increase in the utilization of beams at micro and nano scales has stimulated the development of theories capable of incorporating scale effects, given that classical theory reveals limitations in its precision to model size-dependent phenomena accurately. This current study addresses this gap by employing Timoshenko beam theory applied to the theory of elasticity with gradient deformation in analyzing beams under various boundary conditions: simply supported, doubly clamped, clamped and supported, clamped-free. The problem formulation employed the Ritz Method. The results were compared with those derived from classical continuum mechanics and others available in the literature.

Keywords: scale effect, Timoshenko beam theory, strain gradient.

1 Introdução

Avanços significativos nas áreas da engenharia civil, mecânica e eletrônica têm impulsionado o desenvolvimento de dispositivos em escalas micro e nano. No que concerne à microestrutura, esta abrange todos os materiais relevantes para a engenharia, desde metais até solos granulares e argilosos [1]. No entanto, a relevância do estudo da microestrutura dos materiais vai além das engenharias. Por exemplo, no campo da biomecânica, compreender a estrutura microscópica de ossos esponjosos a partir de estruturas modeladas como microvigas é essencial para entender as causas e o desenvolvimento de problemas tais como dor lombar e artrite [2].

Várias estruturas biomecânicas, compósitos ou dispositivos eletrônicos, que se assemelham a reticulados, com espessuras próximas à ordem do micrômetro, podem ser modelados como vigas para obter seus campos de tensão e deformação, utilizando teorias mecânicas apropriadas. A teoria mecânica clássica, embora bastante difundida, falha em interpretar fenômenos dependentes do tamanho devido à ausência de parâmetros de escala em sua formulação teórica [3].

Mindlin, um dos pioneiros no campo da micromecânica, desenvolveu uma teoria do contínuo de alta ordem proporcionando avanços à teoria tensão-momento (*couple stress*), que incorpora o gradiente de deformação à formulação teórica [4]. Essa teoria é caracterizada pela presença de dois parâmetros de escala em seu desenvolvimento, permitindo a consideração do efeito de escala em fenômenos micromecânicos. Em consonância com esses avanços, Yang *et al.* [5] deram continuidade aos estudos nessa área e propuseram uma modificação nessa teoria ao introduzir o conceito de elemento de volume representativo.

A aplicação da teoria do contínuo de alta ordem com gradiente de deformação tem estimulado a investigação dos tensores associados a essa abordagem, levando Lam *et al.* [6] a apresentarem uma teoria do gradiente de deformação que abrange três parâmetros de escala. Esses parâmetros são responsáveis por caracterizar o tensor gradiente de dilatação, tensor gradiente de alongamento desviatório e tensor gradiente de rotação simétrica. A abordagem mostrou-se eficaz e tem sido amplamente utilizada na resolução de problemas envolvendo microvigas sob carga.

A análise das vigas em microescala requer uma teoria de viga que consiga representá-las adequadamente, desta forma, Kong *et al.* [7] aplicaram a teoria de viga de Euler-Bernoulli com base na teoria do gradiente de deformação para resolver problemas estáticos e dinâmicos de vigas de forma analítica. No entanto, a cinemática de Euler-Bernoulli realiza várias simplificações, que incluem o desprezo dos efeitos de Poisson na viga e a hipótese de pequenas deformações [8].

Timoshenko desenvolveu um modelo mais refinado em relação ao de Euler-Bernoulli,

ao introduzir uma variável cinemática adicional: a rotação devido à flexão, que permite a consideração dos efeitos cisalhantes nas seções transversais da estrutura [9]. Esse avanço possibilita a obtenção das tensões cisalhantes transversais por meio da lei de Hooke e torna viável a modelagem de vigas espessas [10].

O presente estudo tem como objetivo realizar uma análise estática de vigas em microescala, aplicando a cinemática de Timoshenko e a teoria tensão-momento (couple stress) com modificações em sua representação energética. Este trabalho tem como foco a investigação dos campos de deslocamento e rotação em diferentes condições de vinculação por meio de método de Rayleigh-Ritz. Não somente, pretende-se também examinar os efeitos de Poisson na estrutura e sua relação com a teoria tensão-momento, visando obter valores extremos dos campos estudados e a captura do efeito de escala em fenômenos micromecânicos.

2 Preliminares

2.1 Cinemática de Timoshenko

Considere uma viga de domínio Ω , subespaço de \mathbb{R}^3 , referenciada aos eixos cartesianos ortogonais $x_1 - x_2 - x_3$, conforme a Fig. 1a. O campo de deslocamento é expresso de acordo com a Eq. (2.1):

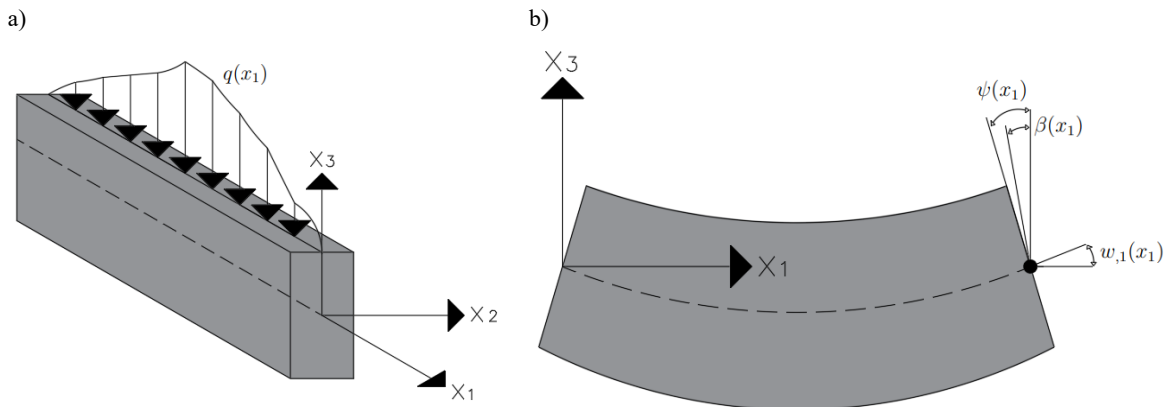


Figura 1: a) Viga de Timoshenko carregada, b) Viga de Timoshenko deformada

$$\begin{aligned}
u_1(x_1, x_2, x_3) &= -x_3\psi(x_1), \\
u_2(x_1, x_2, x_3) &= 0, \\
u_3(x_1, x_2, x_3) &= w(x_1),
\end{aligned} \tag{2.1}$$

em que u_1 , u_2 e u_3 representam os deslocamentos em x_1 , x_2 e x_3 respectivamente. A deflexão da estrutura é denotada por $w(x_1)$.

Na Fig. 1b é apresentada a estrutura deformada, cuja rotação de sua seção transversal é dada por:

$$\psi(x_1) = w_{,1}(x_1) - \beta(x_1), \tag{2.2}$$

onde $\psi(x_1)$ representa a rotação dos elementos de linha ao longo da linha neutra devido exclusivamente à flexão, e $\beta(x_1)$ a rotação dos elementos de linha tangentes à linha neutra resultante da deformação adicional de cisalhamento.

A notação das derivadas parciais utilizada no presente trabalho é definida conforme a Eq. (2.3):

$$\begin{aligned}
\Box_{,i} &:= \frac{\partial \Box}{\partial x_i}, \\
\Box_{,ii} &:= \frac{\partial^2 \Box}{\partial x_i^2},
\end{aligned} \tag{2.3}$$

de maneira que $i \in \{1, 2, 3\}$, e o símbolo \Box assume os valores de w ou ψ .

2.2 Formulação do Modelo

A energia de deformação U de um material isotrópico linear que ocupa uma região $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, de volume V , é dada por [3]:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + p_i \gamma_i + \tau_{ijk}^{(1)} \eta_{ijk}^{(1)} + m_{ij}^s \chi_{ij}^s \right) dV, \tag{2.4}$$

em que o tensor deformação, ε_{ij} , tensor gradiente de dilatação, γ_i , tensor gradiente de alongamento desviatório, $\eta_{ijk}^{(1)}$, e o tensor gradiente de rotação simétrica, χ_{ij}^s , constituem as medidas de deformação. As medidas de tensão são constituídas pelo tensor tensão clássico, σ_{ij} , e os tensores de alta ordem p_i , $\tau_{ijk}^{(1)}$ e m_{ij}^s .

Nas Eqs. (2.5)–(2.8) são definidas as medidas de deformação:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \tag{2.5}$$

$$\gamma_i = \varepsilon_{mm,i}, \tag{2.6}$$

$$\eta_{ijk}^{(1)} = \eta_{ijk}^s - \frac{1}{5} (\delta_{ij}\eta_{mmk}^s + \delta_{jk}\eta_{mmi}^s + \delta_{ki}\eta_{mmj}^s), \quad (2.7)$$

$$\chi_{ij}^s = \frac{1}{4} (e_{ipq}\varepsilon_{qj,p} + e_{j pq}\varepsilon_{qi,p}), \quad (2.8)$$

de modo que u_i representa o vetor deslocamento, ε_{mm} a deformação de dilatação, δ_{ij} o delta de Kronecker, e e_{ijk} o símbolo alternativo.

A parte simétrica do tensor gradiente de alongamento desviatório, η_{ijk}^s , é apresentada na Eq. (2.9):

$$\eta_{ijk}^s = \frac{1}{3} (u_{i,jk} + u_{j,ki} + u_{k,ij}). \quad (2.9)$$

Pode-se, ainda, reescrever o tensor gradiente de alongamento desviatório de forma simplificada, consoante [6]:

$$\begin{aligned} \eta_{ijk}^{(1)} = & \frac{1}{3} (\varepsilon_{jk,i} + \varepsilon_{ki,j} + \varepsilon_{ij,k}) \\ & - \frac{1}{15} [\delta_{ij} (\varepsilon_{mm,k} + 2\varepsilon_{mk,m}) + \delta_{jk} (\varepsilon_{mm,i} + 2\varepsilon_{mi,m}) \\ & + \delta_{ki} (\varepsilon_{mm,j} + 2\varepsilon_{mj,m})]. \end{aligned} \quad (2.10)$$

A seguir, Eqs. (2.11)–(2.14), são definidas as medidas de tensão:

$$\sigma_{ij} = k\delta_{ij}\varepsilon_{mm} + 2\mu\varepsilon'_{ij}, \quad (2.11)$$

$$p_i = 2\mu l_0^2 \gamma_i, \quad (2.12)$$

$$\tau_{ijk}^{(1)} = 2\mu l_1^2 \eta_{ijk}^{(1)}, \quad (2.13)$$

$$m_{ij}^s = 2\mu l_2^2 \chi_{ij}^s, \quad (2.14)$$

onde k representa o módulo volumétrico, μ o módulo de cisalhamento, l_0 , l_1 e l_2 os parâmetros independentes adicionais de escala de comprimento do material que estão associados, respectivamente, com o gradiente de dilatação, gradiente de alongamento desviatório, e gradiente de rotação simétrica. A deformação desviatória, ε'_{ij} , é apresentada na Eq. (2.15):

$$\varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon_{mm}\delta_{ij}. \quad (2.15)$$

Ao substituir as Eqs. (2.5)–(2.15) na Eq. (2.4), pode-se explicitar a energia de deformação em termos dos parâmetros incógnitas, de tal forma que esta passa a ser reescrita como segue:

$$\begin{aligned} U(w, \psi) = & \frac{1}{2} \int_0^L [k_1(\psi_{,11}(x_1))^2 + k_2(\psi_{,1}(x_1))^2 + k_3(w_{,11}(x_1) + \psi_{,1}(x_1))^2 \\ & + k_4(-w_{,11}(x_1) + 2\psi_{,1}(x_1))^2 + k_5(w_{,1}(x_1) - \psi(x_1))^2] dx_1. \end{aligned} \quad (2.16)$$

As constantes k_1 a k_5 são apresentadas na Eq. (2.17):

$$(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5) \equiv \left(2I\mu l_0^2 + \frac{4}{5}I\mu l_1^2, I \left(k + \frac{4}{3}\mu \right) + 2\mu A l_0^2, \frac{1}{4}\mu A l_2^2, \frac{8}{15}\mu A l_1^2, k_s \mu A \right), \quad (2.17)$$

onde I representa o momento de inércia da seção transversal, A a área da seção transversal e k_s o fator de correção de cisalhamento.

A energia potencial gerada por uma força externa $q(x)$ genérica que realiza trabalho nesse campo é definida por [3]:

$$W(w, \psi) = - \left(\int_0^L q(x_1)w(x_1)dx_1 + Vw(x_1)|_0^L + Mw_{,1}(x_1)|_0^L + M_h\psi_{,1}(x_1)|_0^L \right), \quad (2.18)$$

em que V representa a força de cisalhamento, M o momento clássico e M_h o momento de alta ordem.

2.3 Método de Ritz

O Método de Ritz será desenvolvido tendo como fundamento o princípio dos trabalhos virtuais, em que serão impostos campos aproximadores em um sistema em equilíbrio estático. Deste modo, a variação da energia total é nula, conforme as Eqs. (2.19) e (2.20):

$$\frac{\partial \Pi(U, W)}{\partial w_j} = \frac{\partial U(w_n, \psi_n)}{\partial w_j} + \frac{\partial W(w_n, \psi_n)}{\partial w_j} = 0, \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial \Pi(U, W)}{\partial \psi_j} = \frac{\partial U(w_n, \psi_n)}{\partial \psi_j} + \frac{\partial W(w_n, \psi_n)}{\partial \psi_j} = 0. \quad (2.20)$$

A partir das Eqs. (2.16) e (2.18) são tomada as derivadas parciais de cada energia com relação às variáveis w_j e ψ_j , com $j \in \mathbb{N}$. O Método de Ritz aproxima a solução das equações diferenciais ao definir as funções de aproximação de $w(x_1)$ e $\psi(x_1)$ como $\zeta_w^n(x_1)$ e $\zeta_\psi^n(x_1)$, respectivamente, para um somatório de $n = 1$ a M termos. As variações da energia de deformação e potencial são apresentadas nas Eqs. (2.21) a (2.24):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U(w_n, \psi_n)}{\partial w_j} \\ &= \sum_{n=1}^M \left[\int_0^L w_n (k_3 \zeta_{w,11}^j(x_1) \zeta_{w,11}^n(x_1) + k_4 \zeta_{w,11}^j(x_1) \zeta_{w,11}^n(x_1) + k_5 \zeta_{w,1}^j(x_1) \zeta_{w,1}^n(x_1)) dx_1 \right] \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$+ \int_0^L \psi_n \left(k_3 \zeta_{w,11}^j(x_1) \zeta_{\psi,1}^n(x_1) - 2k_4 \zeta_{w,11}^j(x_1) \zeta_{\psi,1}^n(x_1) - k_5 \zeta_{w,1}^j(x_1) \zeta_{\psi}^n(x_1) \right) dx_1 \Big], \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial W(w_n, \psi_n)}{\partial w_j} = - \left(\int_0^L q(x_1) \zeta_w^j(x_1) dx_1 + V \zeta_w^j(x_1) \Big|_0^L + M \zeta_{w,1}^j(x_1) \Big|_0^L \right), \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U(w_n, \psi_n)}{\partial \psi_j} \\ &= \sum_{n=1}^M \left[\int_0^L \psi_n \left(k_1 \zeta_{\psi,11}^j(x_1) \zeta_{\psi,11}^n(x_1) + k_2 \zeta_{\psi,1}^j(x_1) \zeta_{\psi,1}^n(x_1) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + k_3 \zeta_{\psi,1}^j(x_1) \zeta_{\psi,1}^n(x_1) + 4k_4 \zeta_{\psi,1}^j(x_1) \zeta_{\psi,1}^n(x_1) + k_5 \zeta_{\psi}^j(x_1) \zeta_{\psi}^n(x_1) \right) dx_1 \right. \\ & \quad \left. + \int_0^L w_n \left(k_3 \zeta_{\psi,1}^j(x_1) \zeta_{w,11}^n(x_1) - 2k_4 \zeta_{\psi,1}^j(x_1) \zeta_{w,11}^n(x_1) - k_5 \zeta_{\psi}^j(x_1) \zeta_{w,1}^n(x_1) \right) dx_1 \right], \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial W(w_n, \psi_n)}{\partial \psi_j} = - \left(M_h \zeta_{\psi,1}^j(x_1) \Big|_0^L \right). \quad (2.25)$$

O campo aproximador teve seu somatório escrito de forma simplificada, conforme expõe a Eq. (2.25):

$$\left(\zeta_{\square}^j(x_1), \zeta_{\square,1}^j(x_1), \zeta_{\square,11}^j(x_1) \right) := \left(\sum_{n=1}^M \delta_{nj} \zeta_{\square}^n(x_1), \sum_{n=1}^M \delta_{nj} \zeta_{\square,1}^n(x_1), \sum_{n=1}^M \delta_{nj} \zeta_{\square,11}^n(x_1) \right), \quad (2.26)$$

onde o símbolo \square assume os valores de w ou ψ .

As Eqs. (2.21) e (2.22) podem ser sintetizadas ao definir suas parcelas conforme expõe a Eq. (2.26):

$$\begin{aligned} k_{jn}^1 &\equiv \int_0^L \left(k_3 \zeta_{w,11}^j(x_1) \zeta_{w,11}^n(x_1) + k_4 \zeta_{w,11}^j(x_1) \zeta_{w,11}^n(x_1) + k_5 \zeta_{w,1}^j(x_1) \zeta_{w,1}^n(x_1) \right) dx_1, \\ k_{jn}^2 &\equiv \int_0^L \left(k_3 \zeta_{w,11}^j(x_1) \zeta_{\psi,1}^n(x_1) - 2k_4 \zeta_{w,11}^j(x_1) \zeta_{\psi,1}^n(x_1) - k_5 \zeta_{w,1}^j(x_1) \zeta_{\psi}^n(x_1) \right) dx_1, \\ F_j &\equiv \int_0^L q(x_1) \zeta_w^j(x_1) dx_1 + V \zeta_w^j(x_1) \Big|_0^L + M \zeta_{w,1}^j(x_1) \Big|_0^L, \end{aligned} \quad (2.27)$$

o que possibilita reescrever a Eq. (2.19) como sendo:

$$k_{jn}^1 w_n + k_{jn}^2 \psi_n = F_j. \quad (2.28)$$

As Eqs. (2.23) e (2.24) também podem ser escritas de maneira simplificada ao definir suas parcelas como mostra a Eq. (2.28):

$$\begin{aligned} \bar{k}_{jn}^1 &\equiv \int_0^L (k_3 \zeta_{\psi,1}^j(x_1) \zeta_{w,11}^n(x_1) - 2k_4 \zeta_{\psi,1}^j(x_1) \zeta_{w,11}^n(x_1) - k_5 \zeta_{\psi,1}^j(x_1) \zeta_{w,1}^n(x_1)) dx_1, \\ \bar{k}_{jn}^2 &\equiv \int_0^L (k_1 \zeta_{\psi,11}^j(x_1) \zeta_{\psi,11}^n(x_1) + k_2 \zeta_{\psi,1}^j(x_1) \zeta_{\psi,1}^n(x_1) + k_3 \zeta_{\psi,1}^j(x_1) \zeta_{\psi,1}^n(x_1) + \\ &4k_4 \zeta_{\psi,1}^j(x_1) \zeta_{\psi,1}^n(x_1) + k_5 \zeta_{\psi,1}^j(x_1) \zeta_{\psi,1}^n(x_1)) dx_1 \\ \bar{F}_j &\equiv M_h \zeta_{\psi,1}^j(x_1) \Big|_0^L, \end{aligned} \quad (2.29)$$

de maneira que se pode reescrever a Eq. (2.20) como:

$$\bar{k}_{jn}^1 w_n + \bar{k}_{jn}^2 \psi_n = \bar{F}_j. \quad (2.30)$$

Dispondo das Eqs. (2.27) e (2.29) pode-se, finalmente, montar o algoritmo de resolução, a ser apresentado na Eq. (2.30):

$$\begin{bmatrix} k^1 & k^2 \\ \bar{k}^1 & \bar{k}^2 \end{bmatrix}_{\partial_j \times \partial_n} \begin{Bmatrix} w \\ \psi \end{Bmatrix}_{\partial_n} = \begin{Bmatrix} F \\ \bar{F} \end{Bmatrix}_{\partial_j}. \quad (2.31)$$

2.4 Funções de forma

Para a formulação do problema, cada vinculação possui suas respectivas funções de forma aproximadas por um campo exponencial. Na Fig. 2 são apresentados desenhos esquemáticos das respectivas vinculações.

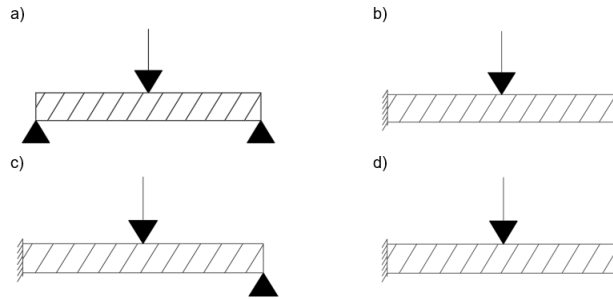


Figura 2: a) viga simplesmente apoiada, b) viga duplamente engastada, c) viga engastada e apoiada, d) viga engastada e livre

2.4.1 Viga simplesmente apoiada

Para essa vinculação, as condições de contorno são:

$$w|_{x_1=0} = w|_{x_1=L} = 0, w_{,1}|_{x_1=0} = w_{,1}|_{x_1=L} = 0, \psi_{,1}|_{x_1=0} = \psi_{,1}|_{x_1=L} = 0, \quad (2.32)$$

em que o campo aproximador que satisfaz as condições de contorno apresentadas na Eq. (2.31) é dado por:

$$\begin{aligned} \zeta_w^n(x_1) &= \sum_{n=1}^M x_1 (L - x_1) e^{\left(\frac{x_1}{nL}\right)}, \\ \zeta_\psi^n(x_1) &= \sum_{n=1}^M \frac{[nL^2 - x_1^2 + L(x_1 - 2nx_1)] e^{\left(\frac{x_1}{nL}\right)}}{nL}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

2.4.2 Viga duplamente engastada

Para uma viga duplamente engastada, as condições de contorno são dadas por:

$$w|_{x_1=0} = w|_{x_1=L} = 0, w_{,1}|_{x_1=0} = w_{,1}|_{x_1=L} = 0, \psi_{,11}|_{x_1=0} = \psi_{,11}|_{x_1=L} = 0, \quad (2.34)$$

de maneira que o campo aproximador que satisfaz as condições de contorno da Eq. (2.33) é:

$$\begin{aligned} \zeta_w^n(x_1) &= \sum_{n=1}^M x_1^2 (L - x_1)^2 e^{\left(\frac{x_1}{nL}\right)}, \\ \zeta_\psi^n(x_1) &= \sum_{n=1}^M \frac{x_1 (L - x_1) [2nL^2 - x_1^2 + L(x_1 - 4nx_1)] e^{\left(\frac{x_1}{nL}\right)}}{nL}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

2.4.3 Viga engastada e apoiada

Para uma viga engastada na extremidade esquerda e apoiada na direita, as condições de contorno são:

$$w|_{x_1=0} = w|_{x_1=L} = 0, w_{,1}|_{x_1=0} = w_{,11}|_{x_1=L} = 0, \psi_{,11}|_{x_1=0} = \psi_{,1}|_{x_1=L} = 0, \quad (2.36)$$

em que as condições de contorno da Eq. (2.35) são supridas pelo campo aproximador dado por:

$$\begin{aligned} \zeta_w^n(x_1) &= \sum_{n=1}^M x_1^2 (L - x_1) e^{\left(\frac{x_1}{nL}\right)}, \\ \zeta_\psi^n(x_1) &= \sum_{n=1}^M \frac{x_1 [2nL^2 - x_1^2 + L(x_1 - 3nx_1)] e^{\left(\frac{x_1}{nL}\right)}}{nL}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

2.4.4 Viga engastada e livre

Para uma viga engastada na extremidade esquerda e livre na direita, as condições de contorno são:

$$w|_{x_1=0} = w_{,111}|_{x_1=L} = 0, w_{,1}|_{x_1=0} = w_{,11}|_{x_1=L} = 0, \psi_{,11}|_{x_1=0} = \psi_{,1}|_{x_1=L} = 0, \quad (2.38)$$

de tal forma que as condições de contorno da Eq. (2.37) são satisfeitas pelo seguinte campo aproximador:

$$\begin{aligned} \zeta_w^n(x_1) &= \sum_{n=1}^M x_1^2 e^{\left(\frac{x_1}{nL}\right)}, \\ \zeta_\psi^n(x_1) &= \sum_{n=1}^M \frac{x_1 (2nL + x_1) e^{\left(\frac{x_1}{nL}\right)}}{nL}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

3 Resultados Principais

Os resultados foram obtidos mediante análise de uma viga fabricada com material epóxi, submetida a uma carga concentrada localizada no meio do vão. Este estudo contemplou diferentes configurações de vinculação, especificamente: viga simplesmente apoiada, viga duplamente engastada, viga com engastamento em uma extremidade e apoio na outra, viga engastada e livre.

Os dados de entrada relevantes para a resolução do problema são apresentados na Tab. 1, compreendendo o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson do material epóxi, o valor da carga concentrada, e o parâmetro de comprimento de escala. Este último será empregado como um parâmetro para a variação das dimensões da estrutura.

Módulo, E (GPa)	Poisson, ν	Carga, P (μN)	Parâmetro de Escala, l (μm)
144	0,38	100	17,6

Tabela 1: Dados de entrada

As características geométricas são expostas na Tab. 2, incluindo informações sobre sua espessura, largura e comprimento. Notavelmente, as dimensões da peça são expressas em função do parâmetro de comprimento de escala.

Propriedades geométricas	$h = l$	$h = 2l$	$h = 4l$
Espessura, h (μm)	17,6	35,2	70,4
Largura, $b = 2h$ (μm)	35,2	70,4	140,8
Comprimento, $L = 20h$ (μm)	352,0	704,0	1408

Tabela 2: Propriedades geométricas

A partir das propriedades geométricas da viga e das propriedades mecânicas do material, pôde-se realizar a modelagem computacional da estrutura para todas as vinculações. A visualização e análise dos dados foi auxiliada pelo software de código aberto ParaView, em que os resultados obtidos estão dispostos nas Figs. 2-8.

A Fig. 3a ilustra as deflexões normalizadas ao longo do vão de uma viga simplesmente apoiada. Nota-se a ausência de pontos de inflexão, o que indica a existência de momentos fletores positivos em todo o comprimento da estrutura. Ressalta-se, também, que a máxima deflexão ocorre no meio do vão, onde é aplicada a carga concentrada. A Fig. 3b representa as rotações ao longo do vão para essa mesma vinculação. Pode-se perceber que nas extremidades da viga a rotação é livre, uma vez que os apoios permitem a rotação da peça. Além disso, é observável que no ponto de aplicação da carga não há variação angular.

A Fig. 4a apresenta as deflexões normalizadas para uma viga submetida à condição de engastamento duplo. É possível notar a presença de dois pontos de inflexão localizados próximos às extremidades, os quais indicam a inversão do diagrama de momentos fletores. A Fig. 4b traz as rotações que ocorrem ao longo do comprimento da viga sujeita a essa mesma vinculação. Evidencia-se a rotação nula nas extremidades, em virtude dos momentos fletores que são gerados nos engastes, os quais impedem a rotação da estrutura nesses pontos. Nota-se também variação angular nula no ponto de aplicação da carga.

A Fig. 5a expõe as deflexões normalizadas de uma viga que possui engaste no extremo esquerdo e apoio no extremo direito. Nesta configuração observa-se a presença de um único ponto de inflexão, em virtude do engaste que proporciona a inversão do diagrama de momentos fletores. A Fig. 5b exhibe as rotações da estrutura sob essa vinculação. Nota-se um duplo comportamento deste campo: na extremidade onde ocorre o engaste, a rotação é nula, enquanto que na extremidade onde há apoio, a rotação é permitida de forma livre.

A Fig. 6a encarrega-se de mostrar as deflexões normalizadas de uma viga engastada na extremidade esquerda e livre na outra. Para esta vinculação não há nenhum ponto de inflexão, o que indica a presença de momentos fletores negativos somente, presentes na região compreendida entre o ponto de aplicação da carga e o engaste. No que

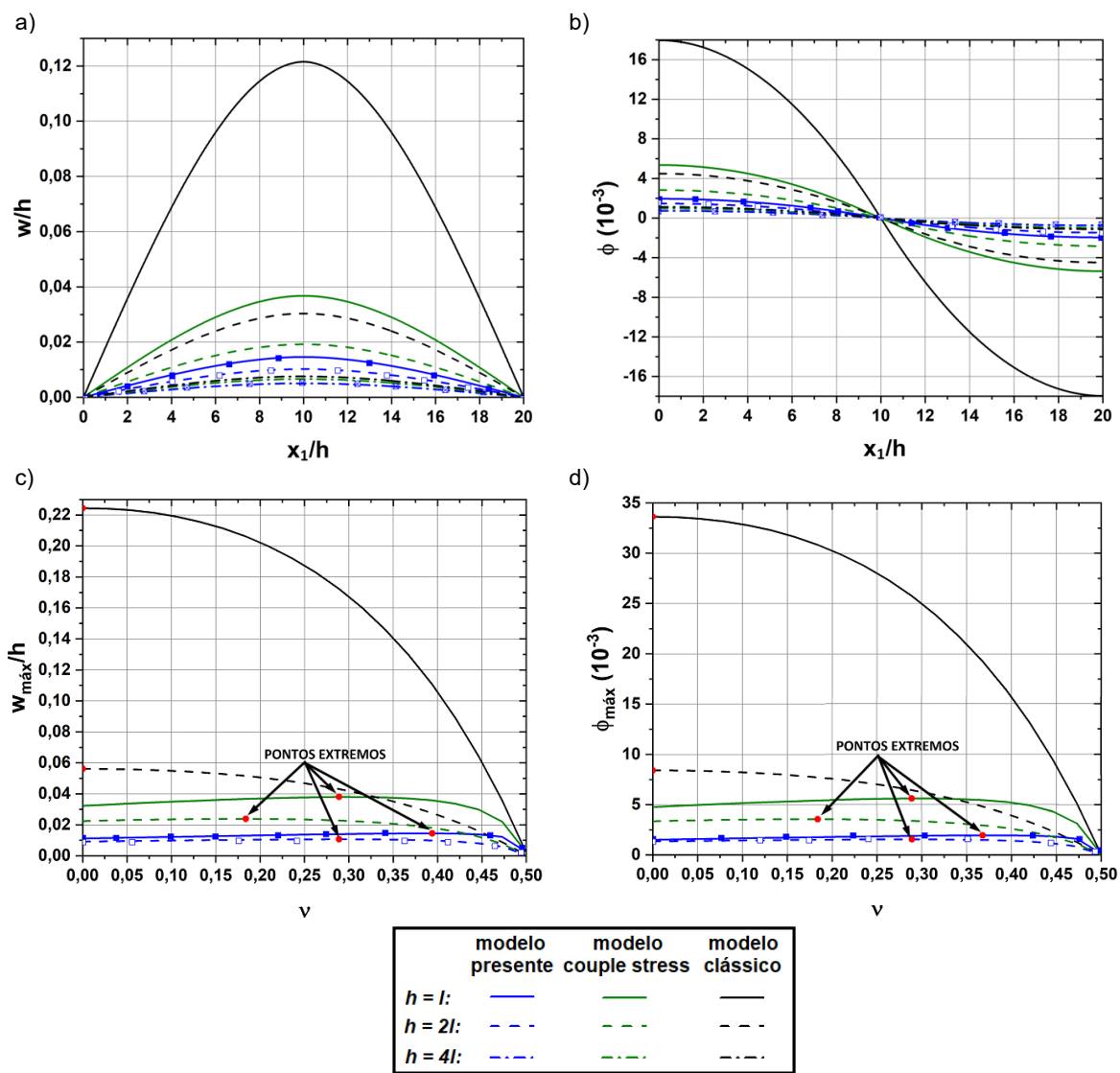


Figura 3: a) deflexões normalizadas ao longo do vão para viga SS, b) rotações ao longo do vão para viga SS, c) efeito de Poisson na deflexão máxima para viga SS, d) efeito de Poisson na rotação máxima para viga SS

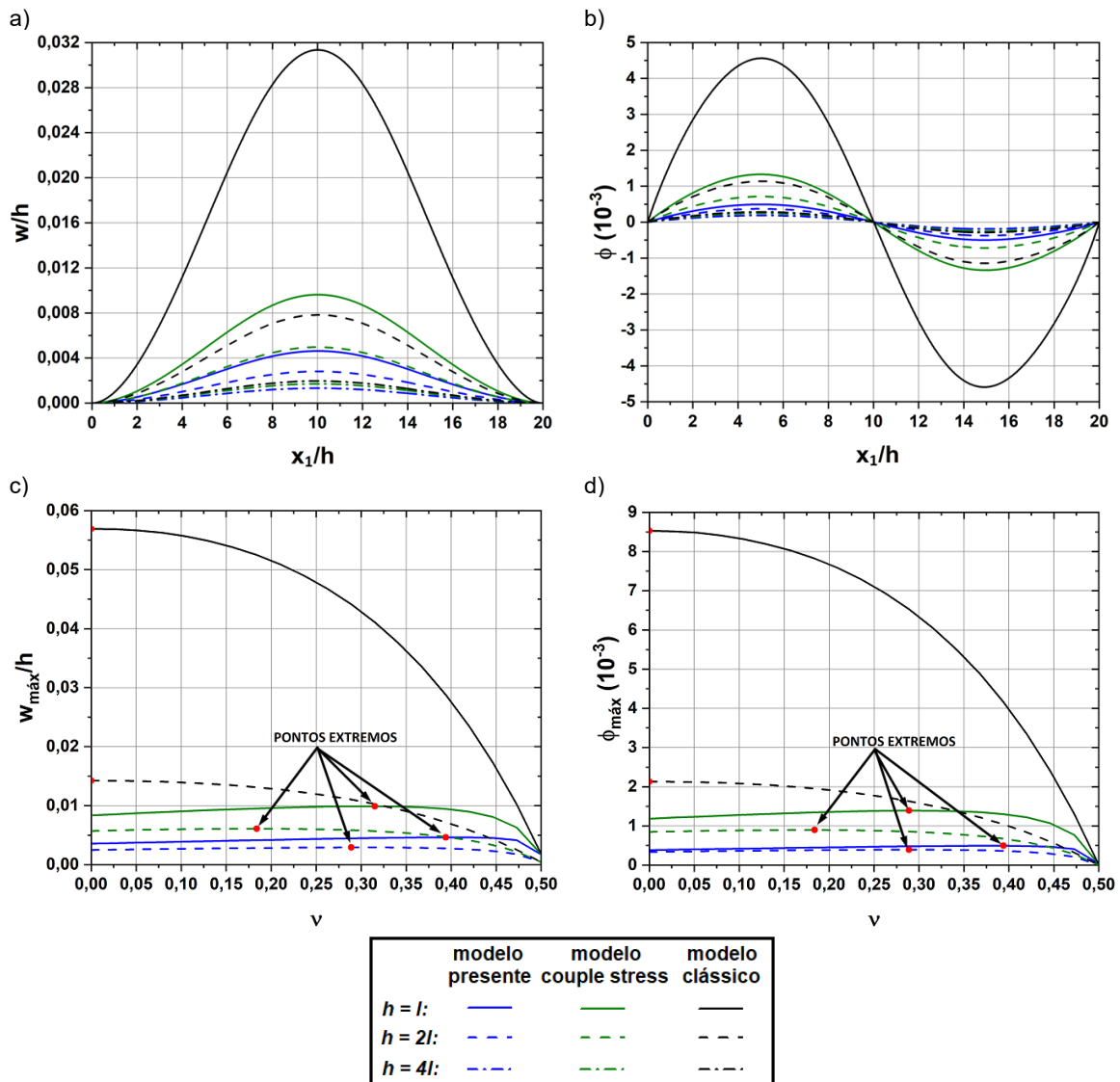


Figura 4: a) deflexões normalizadas ao longo do vão para viga CC, b) rotações ao longo do vão para viga CC, c) efeito de Poisson na deflexão máxima para viga CC, d) efeito de Poisson na rotação máxima para viga CC

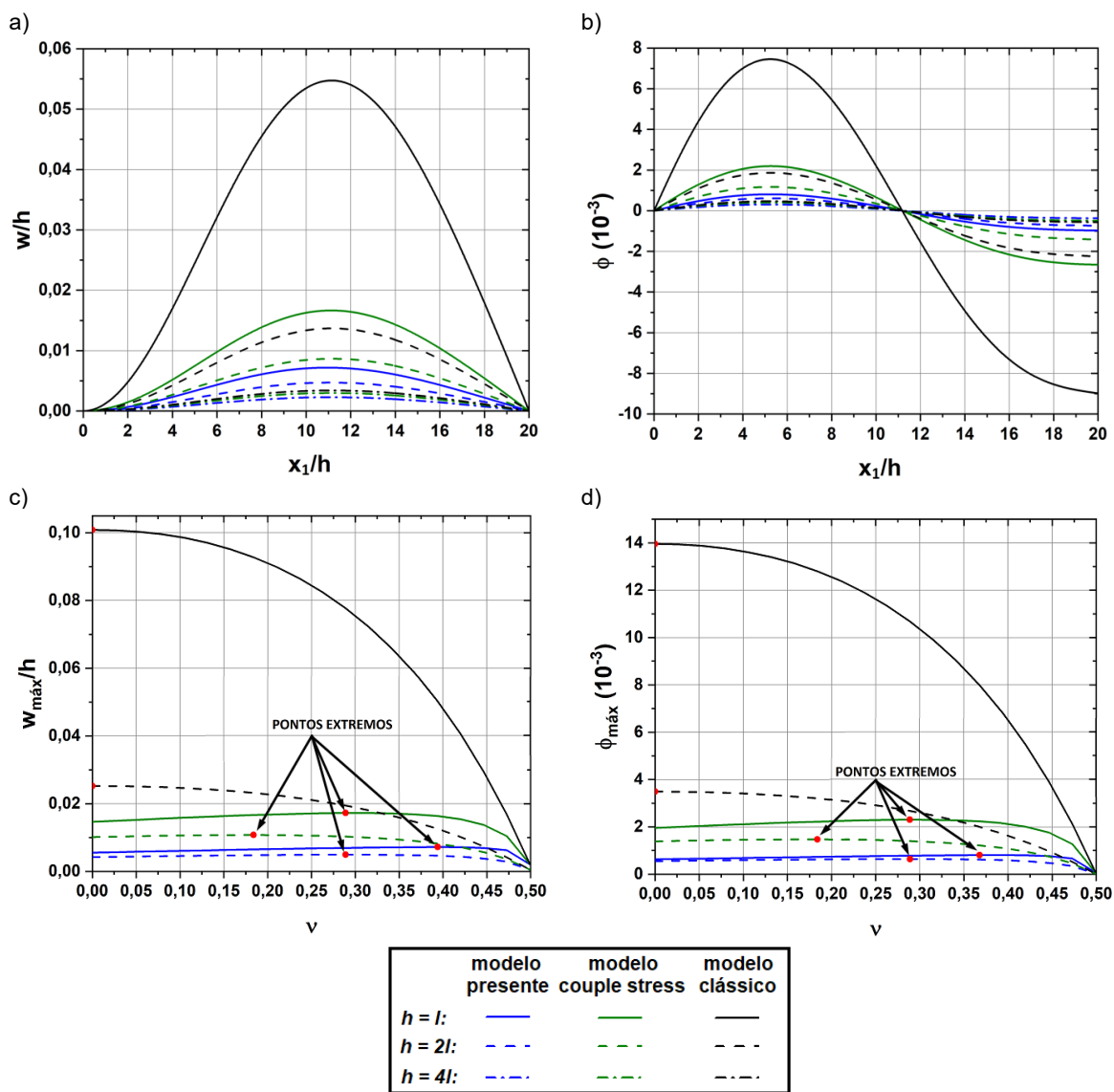


Figura 5: a) deflexões normalizadas ao longo do vão para viga CS, b) rotações ao longo do vão para viga CS, c) efeito de Poisson na deflexão máxima para viga CS, d) efeito de Poisson na rotação máxima para viga CS

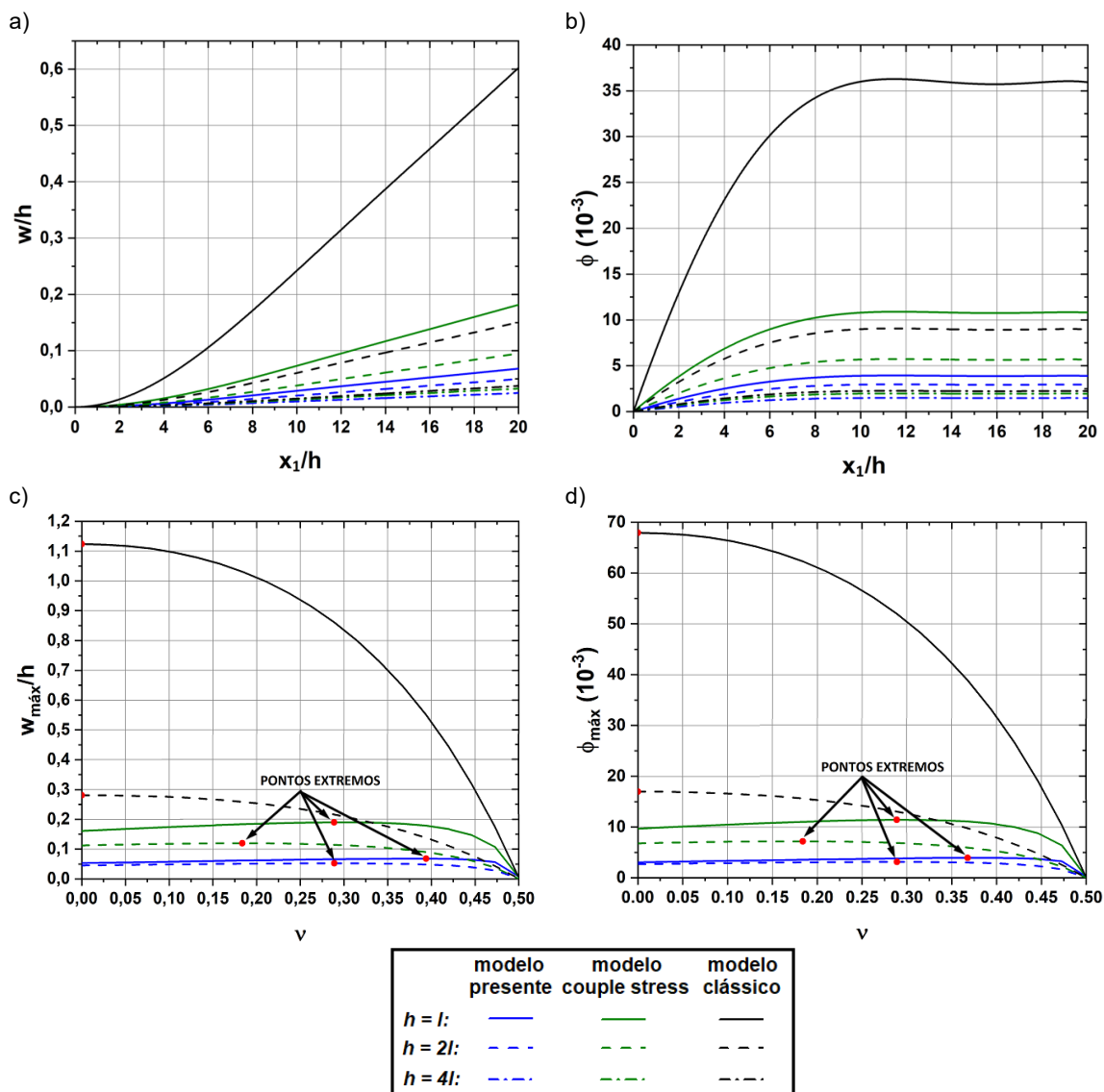


Figura 6: a) deflexões normalizadas ao longo do vão para viga CF, b) rotações ao longo do vão para viga CF, c) efeito de Poisson na deflexão máxima para viga CF, d) efeito de Poisson na rotação máxima para viga CF

concerne às deflexões, estas tornam-se mais significativas à medida que a distância da seção medida até o engaste aumenta. A Fig. 6b exibe as rotações da estrutura sob essa configuração. É observável que as rotações são nulas no engaste e crescem até a seção do meio do vão. Na região compreendida entre o meio do vão e a extremidade livre as rotações se mantêm constantes para o presente modelo, condizente com os princípios da estática.

As Figs. 3c-d, 4c-d, 5c-d e 6c-d ilustram as curvas de deflexões máximas e rotações máximas para coeficientes de Poisson que variam de 0 a 0,50. Ao analisá-las, percebe-se que o modelo clássico exibe valores que diminuem à medida que o coeficiente de Poisson aumenta, sem apresentar extremos. Por outro lado, os modelos presente e couple stress, que incorporam parâmetros de escala em sua teoria, demonstram deflexões e rotações que crescem gradualmente com o aumento do coeficiente de Poisson, até atingirem pontos de valores extremos, para posteriormente declinar.

Para cada vinculação, a partir das curvas de seus modelos, foram coletados os pontos máximos de deflexão e rotação, dispostos nas Tabs. 3 e 4, respectivamente. Pode-se notar que os valores máximos de deflexão e rotação para o modelo clássico, em $\nu = 0$, são significativamente superiores aos obtidos pela formulação microestrutural. Como o modelo clássico apresenta seus valores máximos para coeficiente de Poisson nulo, não há influência do parâmetro de comprimento característico.

Ademais, é possível constatar, para as Figs. 3, 4, 5 e 6, que o modelo clássico exibe deflexões e rotações significativamente maiores em comparação com os modelos presente e couple stress. Essa disparidade pode ser atribuída à ausência de parâmetros de escala na teoria clássica, o que a impede de capturar os efeitos de escala. Em contraste, para vigas mais espessas, as deflexões e rotações previstas pelo modelo clássico tendem a se aproximar dos valores obtidos pelos outros modelos, uma vez que os fenômenos do tamanho se tornam menos proeminentes.

Vinculação	Modelo	Variável	$h = l$	$h = 2l$
Simplesmente apoiada (SS)	Presente	ν	0,39	0,29
		w/h	0,0145	0,0107
	Couple Stress	ν	0,29	0,18
		w/h	0,0379	0,0239
	Clássico	ν	0,00	0,00
		w/h	0,2244	0,0561
Duplamente engastada (CC)	Presente	ν	0,39	0,29
		w/h	0,0046	0,0029
	Couple Stress	ν	0,32	0,18
		w/h	0,0099	0,0061
	Clássico	ν	0,00	0,00
		w/h	0,0569	0,0142
Engastada e apoiada (CS)	Presente	ν	0,39	0,29
		w/h	0,0072	0,0049
	Couple Stress	ν	0,29	0,18
		w/h	0,0172	0,0107
	Clássico	ν	0,00	0,00
		w/h	0,1008	0,0252
Engastada e livre (CF)	Presente	ν	0,39	0,29
		w/h	0,0682	0,0525
	Couple Stress	ν	0,29	0,18
		w/h	0,1892	0,1193
	Clássico	ν	0,00	0,00
		w/h	1,1234	0,2808

Tabela 3: Pontos extremos de deflexões para todas as vinculações

Vinculação	Modelo	Variável	$h = l$	$h = 2l$
Simplesmente apoiada (SS)	Presente	ν	0,37	0,29
		$\phi(10^{-3})$	1,9513	1,5518
	Couple Stress	ν	0,29	0,18
		$\phi(10^{-3})$	5,5940	3,5574
	Clássico	ν	0,00	0,00
		$\phi(10^{-3})$	33,6294	8,4070
Duplamente engastada (CC)	Presente	ν	0,39	0,29
		$\phi(10^{-3})$	0,4939	0,3927
	Couple Stress	ν	0,29	0,18
		$\phi(10^{-3})$	1,3904	0,8968
	Clássico	ν	0,00	0,00
		$\phi(10^{-3})$	8,5321	2,1328
Engastada e apoiada (CS)	Presente	ν	0,37	0,29
		$\phi(10^{-3})$	0,8079	0,6422
	Couple Stress	ν	0,29	0,18
		$\phi(10^{-3})$	2,2927	1,4709
	Clássico	ν	0,00	0,00
		$\phi(10^{-3})$	13,9562	3,4887
Engastada e livre (CF)	Presente	ν	0,37	0,29
		$\phi(10^{-3})$	3,9383	3,1335
	Couple Stress	ν	0,29	0,18
		$\phi(10^{-3})$	11,3756	7,1997
	Clássico	ν	0,00	0,00
		$\phi(10^{-3})$	67,9189	16,9796

Tabela 4: Pontos extremos de rotações para todas as vinculações

A Fig. 7a-d ilustra os deslocamentos axiais na viga para todas as vinculações, enquanto que a Fig. 8a-d expõe os deslocamentos transversais. Ambos os campos de estudo foram obtidos considerando $h = l$ para o presente modelo, que incorpora três parâmetros de escala à formulação e apresenta resultados mais precisos para estruturas em escala micro. As figuras apresentam curvas de nível que ilustram o comportamento dos deslocamentos em duas dimensões: longitudinal e transversal. Enquanto que os deslocamentos axiais são nulos no eixo centroidal da viga, os deslocamentos transversais são nulos onde há vinculação, o que condiz com os princípios da estática.

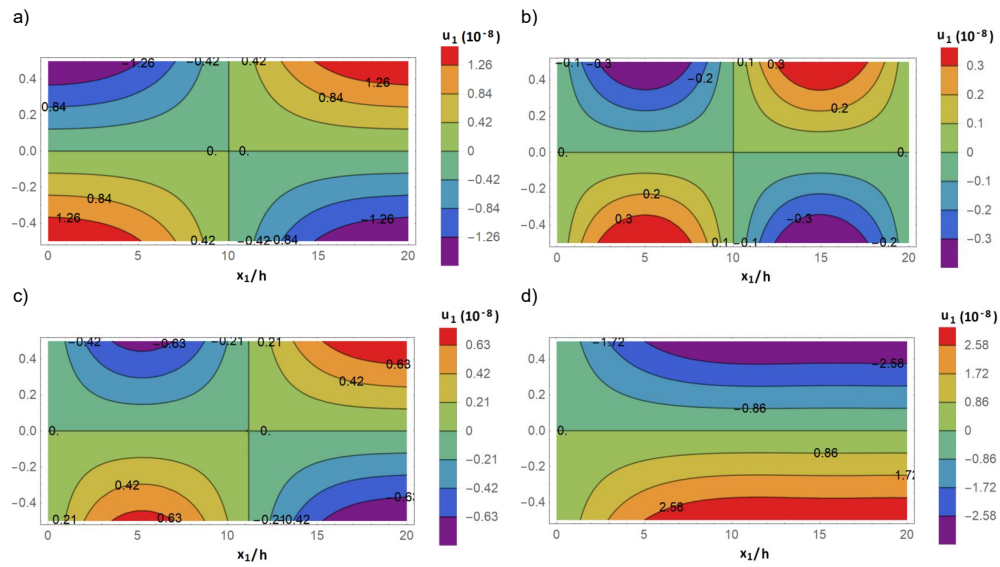


Figura 7: Deslocamentos axiais para viga a) simplesmente apoiada, b) duplamente engastada, c) engastada e apoiada, d) engastada e livre

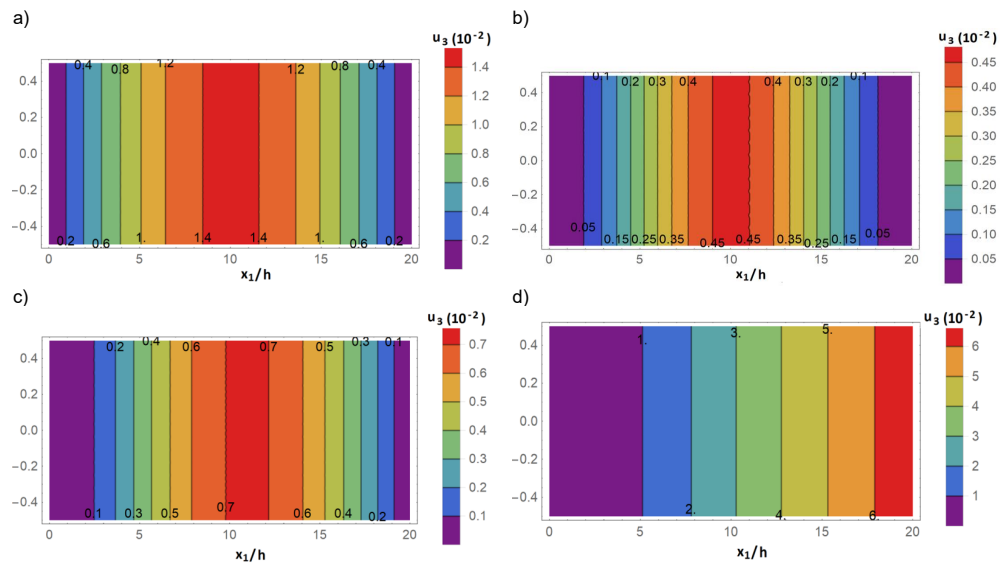


Figura 8: Deslocamentos transversais para viga a) simplesmente apoiada, b) duplamente engastada, c) engastada e apoiada, d) engastada e livre

Pode-se observar também que, para ambos os campos de deslocamentos, a vinculação engastada e apoiada apresenta deflexões intermediárias se comparadas às configurações de viga simplesmente apoiada e viga duplamente engastada. Isso porque o engaste confere à estrutura uma rigidez adicional, tornando-a menos deslocável. Nota-se que a viga engastada e livre apresenta os maiores deslocamentos entre todas as vinculações, ostentando valores significativos na região compreendida entre o ponto de aplicação da carga e a extremidade livre.

4 Conclusões

O presente estudo, por meio da teoria de viga de Timoshenko, aplicada à teoria do gradiente de deformação, abordou a lacuna apresentada pela teoria clássica em considerar os efeitos dependentes do tamanho. Com efeito, a incorporação dos parâmetros de escala no desenvolvimento permitiu uma análise abrangente desses efeitos nos campos de estudo relacionados à deflexão e rotação de vigas sob quatro diferentes configurações de vinculação: simplesmente apoiada, duplamente engastada, engastada e apoiada, engastada e livre.

A valer, as deflexões e rotações obtidas para cada tipo de vinculação no presente modelo foram comparadas com outros dois modelos presentes na literatura: clássico e *couple stress*. Observou-se que a disparidade entre as teorias se acentua consideravelmente em vigas de proporções muito esbeltas, em que a espessura se aproxima do parâmetro de comprimento característico do material. Do contrário, à medida que a espessura se afasta do referido parâmetro, os valores obtidos pelos diferentes modelos tendem a se aproximar, seja na análise de deflexão ou rotação, uma vez que os efeitos dependentes do tamanho se tornam menos significativos.

Por fim, pôde-se notar que os parâmetros de escala, presentes na teoria do gradiente de deformação, induzem à ocorrência de efeitos de Poisson não contemplados pela teoria clássica. Com efeito, tanto no modelo presente como no *couple stress* surgiram pontos extremos nas curvas que descrevem as máximas deflexões e rotações para valores de Poisson variáveis, o que atesta a relação de dependência entre esse coeficiente e o efeito escala.

Referências

- [1] Zervos, A. Finite elements for elasticity with microstructure and gradient elasticity. *Int. J. Numer. Methods Eng.* **73** (2008), 564-595.

- [2] Kim, K. S.; Piziali, R. L. Continuum models of materials with beam-microstructure. *International Journal of Solids and Structures*. **23** (1987), no. 11, 1563-1578.
- [3] Wang, B.; Zhao, J.; Zhou, S. A micro scale Timoshenko beam model based on strain gradient elasticity theory. *European Journal of Mechanics A/Solids*. **29** (2010), no. 4, 591-599.
- [4] Mindlin, R. D. Micro-structure in linear elasticity. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **16** (1964), 51-78.
- [5] Yang, F. et al. Couple stress based strain gradient theory for elasticity. *International Journal of Solids and Structures*. **39** (2002), no. 10, 2731-2743.
- [6] Lam, D. C. C. et al. Experiments and theory in strain gradient elasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. **51** (2003), no. 8, 1477-1508.
- [7] Kong, S. et al. Static and dynamic analysis of micro beams based on strain gradient elasticity theory. *International Journal of Engineering Science*. **47** (2008), no. 4, 487-498.
- [8] Cruz, G. G.; Souza, C. P. G. de. Análise Comparativa das Teorias de Euler-Bernoulli e Timoshenko via Método Das Diferenças Finitas com Implementação Computacional em Scilab. *Revista Tecnologia*. **39** (2018), no. 1, 1-12.
- [9] Timoshenko, S. On the correction for shear of differential equations for transverse vibrations of prismatic bars. *Philosophical Magazine Series*. **41** (1921), 744-746.
- [10] Tessler, A.; Sciuva, D. M.; Gherlone, M. *Refinement of Timoshenko Beam Theory for Composite and Sandwich Beams Using Zigzag Kinematics*. NASA-TP-2007-215086, National Aeronautics and Space Administration. Washington, D.C., 2007.

Recebido em 18 de Dezembro de 2023.

1^a Revisão 27 de Janeiro de 2024.

2^a Revisão 27 de Fevereiro de 2024.

Aceito em 17 de Março de 2024.