Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática

https://doi.org/10.34179/revisem.v9i4.20692

SOBRE A SEQUÊNCIA PADOVAN PONDERADA VIA OPERADORES DIFERENCIAIS FRACIONÁRIOS DE BALIARSINGH

Lucas Machado Fernandes
Universidade Regional do Cariri
lucasmachadofernandes2@gmail.com

Andrea Machado Fernandes Aquino
Rede Pública de Ensino em Milagres - CE
andreamachado.lp@gmail.com

Resumo

Este artigo investiga as propriedades qualitativas das classes de sequências Padovan ponderadas e apresenta estimativas para a função geradora associada à sequência diferencial de (k_n)-Padovan utilizando o operador fracionário de Baliarsingh.

Palavras-chave: Sequência (k_n)-Padovan; Função geradora; Operador fracionário de Baliarsingh.

Abstract

This article investigates the qualitative properties of the weighted Padovan sequence classes and presents estimates for the generating function associated with the (k_n)-Padovan differential sequence using the Baliarsingh fractional operator.

Keywords: Sequence (k_n)-Padovan; Generating function; Baliarsingh Fractional Operator.

1 Introdução

O estudo da sequência de Padovan é um objeto de pesquisa relativamente recente e está intimamente relacionado com o comportamento do número irracional

$$\rho := \sqrt[3]{\frac{9+\sqrt{69}}{18}} + \sqrt[3]{\frac{9-\sqrt{69}}{18}},$$

cuja aproximação decimal é $1,3247$, aproximadamente. O pioneiro dessas ideias foi o holandês H. van der Laan, o qual estudou Arquitetura na *Technische Hogeschool* de Delft entre 1923 e 1926, porém foi durante seu período como monge beneditino que obteve suas principais descobertas, ao desenvolver um sistema de medidas inovador baseado em ρ, o qual foi denominado *Número Plástico*.

Em meados da década de 1980, o arquiteto britânico R. Padovan demonstrou grande interesse por essa temática e ajudou no processo de tradução da obra "*Architectonic Space: Fifteen lessons on the disposition of the human habitat*", de autoria de H. van der Laan [18]. Seu envolvimento levou-o a ser homenageado com o nome da sequência

$$P_{1,n} := \begin{cases} 1, \text{ se } 0 \leq n \leq 2 \\ P_{1,n-2} + P_{1,n-3}, \text{ se } n \geq 3, \end{cases}$$

onde ρ é o limite de sua razão áurea.

Ao longo da história, a sequência de Padovan passou por diversas generalizações. Uma delas é a variação k-Padovan, onde k é um parâmetro arbitrário em $\mathbb{R}$. A sequência de k-Padovan, denotada por $(P_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$, é definida recursivamente da seguinte forma:

$$P_{k,n} := \begin{cases} 1, \text{ se } 0 \leq n \leq 2 \\ kP_{k,n-2} + P_{k,n-3}, \text{ se } n \geq 3. \end{cases}$$

Diversas propriedades desse assunto têm sido estudadas até os dias atuais, como destacado em [2, 3].

Neste trabalho, exploramos a troca da constante $k \in \mathbb{R}$ por um peso real variável $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à equação de recorrência descrita acima e investigamos o comportamento das suas respectivas funções geradoras de sequências do tipo (k_n)-Padovan, usando operadores diferenciais de Baliarsingh.

A estrutura dos tópicos apresentados neste artigo é a seguinte: na segunda seção, exibiremos algumas preliminares básicas que serão usadas ao longo do trabalho. Na terceira seção, algumas propriedades das sequências (k_n)-Padovan relacionadas aos números plástico e de ouro. Na quarta e quinta seção, definiremos o operador diferencial de Baliarsingh e provaremos estimativas pontuais de funções geradoras de sequências diferenciais desses operadores. Por fim, apresentaremos algumas conclusões.

2 Preliminares

No século XVII, foi introduzido um conceito fundamental que desempenhou um papel crucial no desenvolvimento da matemática: as funções geradoras. Amplamente difundidas por P. Laplace em 1812, em sua obra sobre cálculo de probabilidades, as funções geradoras possibilitaram a aplicação eficiente da álgebra dos espaços de funções na resolução de problemas.

Desde então, diversos pesquisadores contribuíram de maneira significativa para o avanço dessa importante ferramenta. Destacam-se os trabalhos de P. MacMahon, J. Riordan e R. Stanley, que aprofundaram o entendimento destas aplicações [12, 16, 17].

Definição 2.1. Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais. A aplicação $\mathcal{G} : \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x, x^2, x^3, \ldots]$ dada por

$$\mathcal{G}(x) = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i x^i$$

é a *função geradora* de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Nesta perspectiva, dadas funções geradoras $\mathcal{G}, \mathcal{H} : \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x, x^2, x^3, \ldots]$ com relação as respectivas sequências $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, são definidas as seguintes operações conformes de soma e produto:

$$\left(\mathcal{G} + \mathcal{H}\right)(x) = \sum_{i\in\mathbb{N}} (a_i + b_i) x^i \quad \text{e} \quad (\mathcal{G} \cdot \mathcal{H})(x) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \left(\sum_{j=0}^{i} a_j b_{j-i} \right) x^i.$$

Exemplo 2.2. Seja $(P_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$ a sequência de k-Padovan. Sua função geradora $\mathcal{G} : \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x, x^2, \ldots]$ é dada por

$$\mathcal{G}(x) = \frac{1 + x + (1-k)\,x^2}{1 - kx^2 - x^3}.$$

Para obter os detalhes técnicos, consulte a referência [2].

Nas próximas seções, estamos interessados em estudar uma sequência cujo termo geral é dado pela relação de recorrência

$$\mathcal{P}_n := \begin{cases} 1, \text{ se } 0 \leq n \leq 2 \\ k_n \mathcal{P}_{n-2} + \mathcal{P}_{n-3}, \text{ se } n \geq 3, \end{cases}$$

onde $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaz as condições iniciais $k_0 = k_1 = k_2 = 1$. Ao longo deste artigo, chamaremos $(\mathcal{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como sendo a *sequência* (k_n)*-Padovan*.

Exemplo 2.3. Seja a sequência $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por

$$k_n := \begin{cases} 1, \text{ se } 0 \leq n \leq 2 \\ 1/n, \text{ se } n \geq 3. \end{cases}$$

Dessa forma, segue que

$\mathcal{P}_0$	$\mathcal{P}_1$	$\mathcal{P}_2$	$\mathcal{P}_3$	$\mathcal{P}_4$	$\mathcal{P}_5$	$\cdots$
1	1	1	4/3	5/4	23/15	$\cdots$

Em particular, é importante observar que a sequência $(1/n)$-Padovan apresenta um crescimento mais lento em comparação com $(P_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$.

3 Propriedades da sequência (k_n)-Padovan

O número plástico, tradicionalmente denotado por ρ, é um irracional que possui fortes vínculos com a sequência de Padovan e a proporção áurea. Sua definição é dada pela seguinte expressão:

$$\rho := \sqrt[3]{\frac{9+\sqrt{69}}{18}} + \sqrt[3]{\frac{9-\sqrt{69}}{18}} \approx 1,3247.$$

Apesar de sua aparente complexidade, o número plástico exibe propriedades matemáticas únicas e elegantes, que o tornam um objeto de estudo e fascínio entre matemáticos, cientistas e entusiastas da beleza geométrica [4, 11, 15].

Teorema 3.1. Existe ao menos uma sequência (k_n)-Padovan tal que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathcal{P}_n = \rho,$$

onde ρ é o número plástico.

Demonstração. De fato, considerando a sequência de Padovan $(P_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$, defina $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por

$$k_n := \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \le n \le 3, \\ \dfrac{P_{1,n} - \mathcal{P}_{n-3}\cdot P_{1,n-1}}{P_{1,n-1}\cdot \mathcal{P}_{n-2}}, & \text{se } n \ge 4. \end{cases}$$

Portanto, devido ao Teorema 14 em [11], concluímos que

$$\mathcal{P}_n = k_n\mathcal{P}_{n-2} + \mathcal{P}_{n-3} = \frac{P_{1,n} - \mathcal{P}_{n-3}\cdot P_{1,n-1}}{P_{1,n-1}\cdot \mathcal{P}_{n-2}} \cdot \mathcal{P}_{n-2} + \mathcal{P}_{n-3} = \frac{P_{1,n}}{P_{1,n-1}} \xrightarrow{n\to+\infty} \rho.$$

$\square$

Analogamente, a estratégia utilizada para definir o número plástico também pode ser empregada para garantir que

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,6180$$

seja o limite de uma adequada sequência (k_n)-Padovan, onde ϕ é o tradicional *Número de Ouro* (consulte [11, 14]). Para isto, basta considerar

$$k_n := \begin{cases} 1, \text{ se } 0 \leq n \leq 2, \\ \dfrac{F_n - \mathcal{P}_{n-3} \cdot F_{n-1}}{F_{n-1} \cdot \mathcal{P}_{n-2}}, \text{ se } n \geq 3, \end{cases}$$

onde $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é a sequência de Fibonacci.

4 Operador diferencial fracionário de Baliarsingh

Inicialmente, vamos definir um conceito amplamente utilizado na análise combinatória e no crescimento fatorial de séries hipergeométricas (veja [5], como por exemplo) devido a L. Pochhammer.

Definição 4.1. O *símbolo de Pochhammer* de $\alpha \in \mathbb{R}$ é dado por

$$(\alpha)_i := \begin{cases} \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+i-1), \text{ se } i \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \\ 1, \text{ se } \alpha = 0 \text{ ou } i = 0. \end{cases}$$

Exemplo 4.2. i. A família de *polinômios de Meixner*, introduzida por J. Meixner em meados de 1934, é expressa por:

$$M_n(x,\beta,\gamma) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{x}{k} k!(x-\beta)_{n-k}\gamma^{-k}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Esses polinômios têm uma variedade de aplicações, incluindo modelagem de distribuições probabilísticas discretas, como a distribuição de Poisson generalizada.

ii. A função hipergeométrica definida na bola aberta unitária por

$${}_2\mathcal{F}_1(a,b,c;z) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{(a)_n \cdot (b)_n}{n! \cdot (c)_n} z^n$$

é solução clássica da equação diferencial linear homogênea de segunda ordem:

$$z(1-z)\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}z^2} + [c - (a+b+1)z]\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z} - aby = 0.$$

A referência [6] apresenta um operador diferencial fracionário que tem sido objeto de estudo em várias pesquisas, incluindo os trabalhos mencionados em [7, 8]. Vejamos a sua definição:

Definição 4.3. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, $h \in \mathbb{R}_+$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais. O *n-ésimo diferencial fracionário de Baliarsingh* de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é dado por

$$\Delta_h^{a,b,c}(x_n) := \sum_{i=0}^{n} \frac{(-a)_i \cdot (-b)_i}{i!(-c)_i \cdot h^{a+b-c}} x_{n-i}.$$

Exemplo 4.4. Sejam $a \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ e $b = h = 1$. Neste caso, temos

$$\Delta_1^{a,1,c}(x_n) = x_n - \frac{a}{c} x_{n-1}.$$

5 Resultados

A partir deste ponto, consideraremos $a, b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ e $h \in \mathbb{R}_+$. Além disso, definimos os parâmetros

$$\mathfrak{C}_i := \frac{(-a)_i \cdot (-b)_i}{i!(-c)_i \cdot h^{a+b-c}}; \quad i = 1, \ldots, n$$

e a sequência $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cujo termo geral é:

$$k_n := \frac{\mathfrak{C}_n + \mathfrak{C}_{n-1}}{\mathfrak{C}_{n-2}} + 1. \tag{5.1}$$

A seguir, verificaremos que é possível estimar a função geradora de uma sequência diferencial de Padovan perturbada por sequências limitadas da forma (5.1). Em outras palavras, é possível garantir que as funções geradoras das sequências do tipo $\Delta_h^{a,b,c}(\mathcal{P}_n)$ são pontualmente limitadas inferiormente e superiormente por quocientes polinomiais que dependem exclusivamente de $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Para isto, começaremos provando o seguinte lema técnico:

Lema 5.1. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ e $h \in \mathbb{R}_+$. Então, para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$, tem-se

$$\Delta_h^{a,b,c}(\mathcal{P}_n) = k_n \Delta_h^{a,b,c}(\mathcal{P}_{n-2}) + \Delta_h^{a,b,c}(\mathcal{P}_{n-3}).$$

Demonstração. Com efeito, pela definição da sequência (k_n)-Padovan, temos

$$\begin{aligned}\Delta_h^{a,b,c}(\mathcal{P}_n) - k_n\Delta_h^{a,b,c}(\mathcal{P}_{n-2}) - \Delta_h^{a,b,c}(\mathcal{P}_{n-3}) &= \sum_{i=0}^{n}\mathfrak{C}_i\mathcal{P}_{n-i} - k_n\sum_{i=0}^{n-2}\mathfrak{C}_i\mathcal{P}_{n-i} - \sum_{i=0}^{n-3}\mathfrak{C}_i\mathcal{P}_{n-i}\\ &= \sum_{i=0}^{n-3}\mathfrak{C}_i\left(\mathcal{P}_{n-i} - k_n\mathcal{P}_{n-i-2} - \mathcal{P}_{n-i-3}\right)\\ &\quad + \mathfrak{C}_{n-2}(1-k_n) + \mathfrak{C}_{n-1} + \mathfrak{C}_{\mathfrak{n}}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Portanto, para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}$, concluímos o resultado. $\square$

Agora, para qualquer $m \in \mathbb{R}$, defina a aplicação $\mathcal{S}_m : \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x, x^2, \ldots]$ por

$$\mathcal{S}_m(x) = \frac{\mathfrak{C}_0 + (\mathfrak{C}_0 + \mathfrak{C}_1)x + (\mathfrak{C}_0 + \mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2 - k_2\mathfrak{C}_0)\,x^2}{1 - mx^2 - x^3},$$

onde k_2 é o segundo termo da sequência $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em (5.1).

Teorema 5.2. Se $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada, então a função geradora $\mathcal{G} : \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x, x^2, \ldots]$ de $\Delta_h^{a,b,c}(\mathcal{P}_n)$ satisfaz

$$\mathcal{S}_{\underline{k}}(x) \leq \mathcal{G}(x) \leq \mathcal{S}_{\overline{k}}(x),$$

onde $\underline{k} = \min_{n\in\mathbb{N}} k_n$ e $\overline{k} = \max_{n\in\mathbb{N}} k_n$.

Demonstração. Seja $(\mathcal{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequência (k_n)-Padovan. Uma vez que é válida a igualdade

$$\mathcal{G}(x) = \sum_{i\in\mathbb{N}}\Delta_h^{a,b,c}(\mathcal{P}_i)x^i,$$

segue que

$$x^2\mathcal{G}(x) = \sum_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ i\notin\{0,1\}}}\Delta_h^{a,b,c}(\mathcal{P}_{i-2})x^i \quad\text{e}\quad x^3\mathcal{G}(x) = \sum_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ i\notin\{0,1,2\}}}\Delta_h^{a,b,c}(\mathcal{P}_{i-3})x^i.$$

Nestas condições, de acordo com o Lema 5.1, temos

$$\begin{aligned}(1-\overline{k}x^2-x^3)\mathcal{G}(x) &= \sum_{i\in\mathbb{N}}\Delta_h^{a,b,c}(\mathcal{P}_i)x^i - \sum_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ i\notin\{0,1\}}}\overline{k}\Delta_h^{a,b,c}(\mathcal{P}_{i-2})x^i - \sum_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ i\notin\{0,1,2\}}}\Delta_h^{a,b,c}(\mathcal{P}_{i-3})x^i\\ &\leq \sum_{i\in\mathbb{N}}\Delta_h^{a,b,c}(\mathcal{P}_i)x^i - \sum_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ i\notin\{0,1\}}}k_i\Delta_h^{a,b,c}(\mathcal{P}_{i-2})x^i - \sum_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ i\notin\{0,1,2\}}}\Delta_h^{a,b,c}(\mathcal{P}_{i-3})x^i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \Delta_h^{a,b,c}(\mathcal{P}_0) + \Delta_h^{a,b,c}(\mathcal{P}_1)x + \left(\Delta_h^{a,b,c}(\mathcal{P}_2) - k_2\Delta_h^{a,b,c}(\mathcal{P}_0)\right)x^2 \\
&\quad + \sum_{\substack{i\in\mathbb{N} \\ i\notin\{0,1,2\}}} \left(\Delta_h^{a,b,c}(\mathcal{P}_i) - k_i\Delta_h^{a,b,c}(\mathcal{P}_{i-2}) - \Delta_h^{a,b,c}(\mathcal{P}_{i-3})\right) \\
&= \Delta_h^{a,b,c}(\mathcal{P}_0) + \Delta_h^{a,b,c}(\mathcal{P}_1)x + \left(\Delta_h^{a,b,c}(\mathcal{P}_2) - k_2\Delta_h^{a,b,c}(\mathcal{P}_0)\right)x^2.
\end{aligned}$$

Para finalizar, como

$$\Delta_h^{a,b,c}(\mathcal{P}_0) = \mathfrak{C}_0\mathcal{P}_0, \quad \Delta_h^{a,b,c}(\mathcal{P}_1) = \mathfrak{C}_0\mathcal{P}_1 + \mathfrak{C}_1\mathcal{P}_0 \quad \text{e} \quad \Delta_h^{a,b,c}(\mathcal{P}_2) = \mathfrak{C}_0\mathcal{P}_2 + \mathfrak{C}_1\mathcal{P}_1 + \mathfrak{C}_2\mathcal{P}_0,$$

podemos concluir que a função geradora $\mathcal{G} : \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x, x^2, \ldots]$ satisfaz

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(x) &\leq \frac{\Delta_h^{a,b,c}(\mathcal{P}_0) + \Delta_h^{a,b,c}(\mathcal{P}_1)x + \left(\Delta_h^{a,b,c}(\mathcal{P}_2) - k_2\Delta_h^{a,b,c}(\mathcal{P}_0)\right)x^2}{1 - \overline{k}x^2 - x^3} \\
&= \frac{\mathfrak{C}_0 + (\mathfrak{C}_0 + \mathfrak{C}_1)x + (\mathfrak{C}_0 + \mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2 - k_2\mathfrak{C}_0)\,x^2}{1 - \overline{k}x^2 - x^3}.
\end{aligned}$$

Analogamente, ao efetuarmos os mesmos cálculos, chegamos à conclusão de que

$$\begin{aligned}
(1 - \underline{k}x^2 - x^3)\mathcal{G}(x) &\geq \Delta_h^{a,b,c}(\mathcal{P}_0) + \Delta_h^{a,b,c}(\mathcal{P}_1)x + \left(\Delta_h^{a,b,c}(\mathcal{P}_2) - k_2\Delta_h^{a,b,c}(\mathcal{P}_0)\right)x^2 \\
&= \mathfrak{C}_0 + (\mathfrak{C}_0 + \mathfrak{C}_1)x + (\mathfrak{C}_0 + \mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2 - k_2\mathfrak{C}_0)\,x^2,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\mathcal{G}(x) \geq \frac{\mathfrak{C}_0 + (\mathfrak{C}_0 + \mathfrak{C}_1)x + (\mathfrak{C}_0 + \mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2 - k_2\mathfrak{C}_0)\,x^2}{1 - \underline{k}x^2 - x^3}.$$

□

Observação 5.3. i. Sejam $a = b = 0$ e $0 < \varepsilon < 1$. Para qualquer $c = \varepsilon$, a sequência $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida em 5.1 é limitada, pois existe uma constante real $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$|k_n| = \left| \frac{(n-1)(n-2)^2}{n(\varepsilon+n-1)(\varepsilon+n-2)} + \frac{(n-2)^2}{(n-1)(\varepsilon+n-2)} + 1 \right| \leq C_\varepsilon,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

ii. Considerando $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como uma sequência constante, em vez da caracterização (5.1), segue pelas mesmas linhas da demonstração anterior que $\mathcal{S}_k : \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x, x^2, \ldots]$ é a função geradora de $\Delta_h^{a,b,c}(\mathcal{P}_n)$, onde

$$k = \min_{n\in\mathbb{N}} k_n = \max_{n\in\mathbb{N}} k_n.$$

6 Conclusão

O presente estudo introduziu o conceito de relação às sequências diferenciais ponderadas de (k_n)-Padovan. Foi conduzida uma investigação matemática detalhada dessas sequências, resultando em importantes propriedades, incluindo estimativas inferiores e superiores para as funções geradoras correspondentes. É relevante ressaltar que os resultados obtidos neste artigo podem ser estendidos para outras sequências, como as de Perrin, por exemplo. Para pesquisas futuras, o objetivo é continuar o estudo desses objetos e explorar suas potenciais aplicações.

Agradecimentos

Este trabalho recebeu apoio financeiro da Fundação de Apoio à Pesquisa do Estado da Paraíba (FAPESQ-PB), através do processo #1159/2021-07, Brasil.

Referências

[1] Alves, F. R. V. & Catarino, P.M.M.C., A Sequência de Padovan ou de Coordonier. Revista Brasileira de História da Matemática **22**(45) (2022), 21-43.

[2] Alves, F. R. V, Catarino, P. M. M. C. & Vieira, R. P. M., A Sequência diferencial de k-Padovan e k-Perrin. Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática **8**(1) (2023), 108-117.

[3] Alves, F., Catarino, P. & Vieira, R., The sequence of the hyperbolic k-Padovan quaternions. Malaya Journal of Matematik **11**(3) (2023), 324-331.

[4] Anderson, P., Horadam, A. & Shannon, A., The auxiliary equation associated with the plastic number. Notes on Number Theory and Discrete Mathematics **12**(1) (2006), 1-12.

[5] Andrews, L. C., & Phillips, R. L., *Mathematical techniques for engineers and scientists*. Spie Press, 2003.

[6] Baliarsingh, P., On a fractional difference operator. Alexandria Engineering Journal **55**(2) (2016), 1811-1816.

[7] Baliarsingh, P. & Nayak, L., A note on fractional difference operators. Alexandria Engineering Journal **57**(2) (2018), 1051-1054.

[8] Baliarsingh, P., Nayak, L. & Samantaray, S., On the domain of difference double sequence spaces of arbitrary orders. Analysis **41**(4) (2021), 257-270.

[9] Gogin, N. D. & Myllari, A. A., The Fibonacci-Padovan sequence and MacWilliams transform matrices. Programming and Computer Software **33** (2007), 74-79.

[10] Karaduman, E. & Tas, S., The Padovan sequences in finite groups. Chaing Mai J. Sci **41**(2) (2014), 456 - 462.

[11] Machado, A., *Uma abordagem sobre a sequência de Padovan e o ensino de proporções*. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal do Cariri, Juazeiro do Norte, 2019.

[12] MacMahon, P. A., *Combinatory analysis vol. I-II*. American Mathematical Soc., 2001.

[13] Manzoli, A. C., Salvador, J. A. & Sampaio, J. C. V., A sequência de Padovan generalizada, números harmoniosos e obras de arte. Revista Professor de Matemática Online **11**(4) (2023), 491-504.

[14] Moura, Y., A razão áurea e os números de Fibonacci. Revista Professor de Matemática Online **9**(2) (2021), 369-388.

[15] Padovan, R., *Dom hans van der laan and the plastic number*. Architecture and Mathematics from Antiquity to the Future: Volume II: The 1500s to the Future (2015), 407-419.

[16] Riordan, J., *An introduction to combinatorial analysis*. Princeton University Press, 2014.

[17] Stanley, R. P., *Enumerative Combinatorics*. Cambridge studies in advanced mathematics, 2011.

[18] Van der Lann, H., *Architectonic space: Fifteen lessons on the disposition of the human habitat*. Brill, 1983.

Recebido em 28 de Fevereiro de 2024.
Revisado em 13 de Junho 2024.
Aceito em 15 Outubro 2024.