Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática

https://doi.org/10.34179/revisem.v9i4.20843

UM ESPAÇO DE RANDERS ESPECIAL COMO MODELO CONCRETO DE GEOMETRIA NÃO EUCLIDIANA PLANA: AXIOMA DA RÉGUA INFINITA DE RANDERS

Marcelo Souza
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal de Goiás - UFG
msouza_2000@yahoo.com
Newton Mayer Solórzano Chávez
Universidade Federal da Integração Latino-Americana (UNILA), Instituto Latino-Americano de Ciências da Vida e da Natureza (ILACVN)
nmayer159@gmail.com

Resumo

Neste trabalho estudamos um modelo específico de Geometria não euclidiana, onde o plano cartesiano é dotado de uma métrica de Randers especial. A forma de medir distâncias nesta nova geometria não é simétrica. Aqui as geodésicas continuam sendo linhas retas e devido a não simetria desta métrica perturbada, obtemos duas noções do axioma da régua infinita.

Keywords: Axioma da Régua, Métrica de Randers, Geometria Plana.

1 Introdução

Euclides 300 aC escolheu um conjunto de Axiomas (e Postulados), provou mais de 400 Teoremas, organizou e escreveu *Os Elementos*, uma das mais importantes obras já escritas, que serviu como ponto de partida para a construção da geometria euclidiana e outras teorias. Na formação de um Matemático, a Geometria tem um papel de exercitar a leitura matemática, levando o aluno a ler, pensar, interagir com os elementos matemáticos partindo de termos simples (elementos primitivos, pontos, retas) definindo os termos derivados (segmentos, ponto médio, etc.) e estabelecendo as relações e medidas destes novos elementos.

Modelos concretos de Geometria bidimensional não euclidianos são importantes para um melhor entendimento de axiomas e da própria Geometria euclidiana. Se queremos que certos fatos ocorram na geometria bidimensional é necessário fixar certos axiomas.

Assim, neste trabalho, estudaremos o Axioma da Régua, usado para medir comprimento, num espaço não euclidiano, chamado espaço de Randers, que é um caso particular das variedades de Finsler. Uma métrica de Randers é da forma $\alpha + \beta$, onde α é uma métrica Riemanniana e β uma 1-forma (ver [6, 2] para mais informações).

A ideia de medir distância nos espaços de Randers tem uma relação direta com o problema de minimizar tempo de viagem de um ponto a outro considerando forças externas. Para um melhor entendimento disto vamos citar o Problema de Navegação de Zermelo, o qual foi proposto em 1931. O Problema da Navegação de Zermelo é um problema clássico de otimizar rotas de viagem. Este problema lida com um barco partindo de um ponto P em certa direção. O barco possui certa velocidade máxima, e queremos encontrar o melhor caminho possível para alcançar um ponto de destino Q, no menor tempo possível. Descartando-se forças externas como a correnteza e o vento, o caminho ótimo é um segmento de reta de P até Q. Agora, considerando a correnteza e o vento, o caminho ótimo de P até Q nem sempre é uma linha reta. Embora seja impossível encontrar soluções exatas na maioria dos casos, o problema geral foi resolvido por Zermelo na forma de Equação diferencial parcial, conhecido como Equação de Zermelo, que pode ser numericamente resolvido (ver [8]).

Em [1] os autores estudaram e resolveram o problema de Zermelo no caso riemanniano usando a geometria de Randers, tendo mostrado que as geodésicas das métricas de Randers são as trajetórias que minimizam tempo de viagem de um ponto a outro numa variedade riemanniana.

Inspirados em [7], no presente trabalho foi considerada a métrica de Randers $F(y)$ sendo da forma $\|y\| + \varepsilon\pi_2(y)$ (ver Definição 2.7).

Por outro lado, uma métrica de Finsler $F = F(x, y)$ sobre $U \subset \mathbb{R}^n$ (ver Definição 2.6), onde $x = (x_1, \ldots, x_n) \in U,\ y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, é dita *projetivamente flat*, se todas as suas geodésicas são linhas retas. Sabe-se que uma métrica de Finsler $F = F(x, y)$ sobre $U \subset \mathbb{R}^2$ é *projetivamente flat* se, e somente se, F satisfaz a seguinte Equação de Hamel (ver página 22 em [3]),

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial y_1} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial y_2}. \tag{1.1}$$

Verificamos que a métrica de Randers considerada neste artigo satisfaz a Equação de Hamel, o que simplifica consideravelmente as contas, pois a distância perturbada é atingida por linhas retas.

Na Seção 2, damos algumas definições e resultados clássicos de geometria que serão de utilidade para o desenvolvimento do artigo. Na Seção 3, definimos comprimento de arco ε-perturbado, e calculamos pontos médios. Na Seção 4, estudamos o axioma da régua infinita ε-perturbada. Na Seção 5, generalizamos o conceito de integral de linha.

2 Preliminares

Nesta seção, serão apresentadas algumas definições e resultados clássicos da literatura que facilitarão a compreensão do trabalho. A seguir $\mathbb{R}^2$ denotará o plano cartesiano que é o conjunto de pares ordenados (x_1, x_2), onde $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Definição 2.1 (Produto interno e norma euclidiana em $\mathbb{R}^2$)**.** *Sejam $x = (x_1, x_2)$ e $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ pontos de $\mathbb{R}^2$, o produto interno euclidiano entre x e $\tilde{x}$, denotado por $\langle x, \tilde{x}\rangle$, é o número definido por:*

$$\langle x, \tilde{x}\rangle = x_1\tilde{x}_1 + x_2\tilde{x}_2.$$

A norma euclidiana de x, denotada por $\|x\|$ é definida por:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

Definição 2.2 (Campo vetorial)**.** *Um campo vetorial em um subconjunto aberto Ω de $\mathbb{R}^2$ é uma aplicação $W : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que, associa a cada ponto $x \in \Omega$ um vetor $W(x)$ de $\mathbb{R}^2$.*

Para não carregar a notação, o campo vetorial $W(x)$ será denotado por W_x.

Definição 2.3. [4](Curva diferenciável parametrizada regular em $\mathbb{R}^2$)*Uma curva parametrizada em $\mathbb{R}^2$ é uma aplicação $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ definida em um intervalo I de $\mathbb{R}$. Uma curva parametrizada α é chamada diferenciável se α for de classe C^k para todo $k = 1, 2, \ldots$, isto é, cada coordenada de α é de classe C^k. Dizemos que uma curva parametrizada é suave se é de classe C^k para todo $k = 1, 2, \ldots$. Uma curva parametrizada diferenciável α é chamada regular em I se $\alpha'(t) \neq (0, 0)$ para todo $t \in I$. Uma curva parametrizada α é dita regular por partes se existem $t_1, t_2, \ldots, t_n \in I$ tal que $\alpha|_{]t_i,t_{i+1}[}$ é regular em $]t_i, t_{i+1}[$, para cada $i = 1, \ldots, n-1$.*

Para a seguinte definição, consideremos que a curva possua primeira derivada e que esta seja contínua, isto é, a curva é de classe C^1.

Definição 2.4. *Seja $\alpha :]a, b[\to \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada regular de classe C^1. O comprimento de arco de α, denotado por $\mathcal{L}(\alpha)$, é definida por:*

$$\mathcal{L}(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(\tau)\| \, \mathrm{d}\tau \,.$$

Para quaisquer par de pontos $P, Q \in \mathbb{R}^2$, definimos a distância euclidiana usual de P até Q como:

$$d(P, Q) := \|Q - P\|, \tag{2.1}$$

A definição da distância acima é uma simplificação da seguinte definição alternativa

$$d(P,Q) := \inf_\alpha \mathcal{L}(\alpha), \tag{2.2}$$

onde o ínfimo é tomado sobre o conjunto de todas as curvas regulares por partes α tais que $\alpha(a) = P$ e $\alpha(b) = Q$. A simplificação deve-se ao fato de que o ínfimo em (2.2) é atingido por qualquer reta $\alpha(t)$, em particular, podendo ser considerado $\alpha(t) = tQ + (1-t)P$.

Observação 2.5. Note que a integral na Definição 2.4 é aplicada sobre uma função vetorial dada pela norma $\|\cdot\| : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que por sua vez é aplicada sobre vetores tangentes $y(t) = (y_1(t), y_2(t)) = \alpha'(t)$. Isto nos motiva fazer a seguinte pergunta: O que acontece se esta norma for perturbada?

A seguinte definição de métrica de Finsler sobre um aberto de $\mathbb{R}^n$ é uma simplificação da definição usual. Para maiores detalhes de métricas de Finsler sobre variedades ver [3, 2, 6].

Definição 2.6. Uma função $F : U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, onde $U \subset \mathbb{R}^n$, é dita métrica de Finsler sobre U, se para $x \in U$ e $y \in \mathbb{R}^n$, F satisfaz as seguintes propriedades:

1. $F(x,y)$ é de classe C^∞ para todo $x \in U$ e $y \neq 0$;
2. $F(x,y) > 0$, para todo $x \in U$ e $y \neq 0$;
3. $F(x,\lambda y) = \lambda F(x,y)$, onde λ é qualquer número real positivo (positiva homogênea).
4. A Hessiana de $\frac{1}{2}F^2$, denotada por $[g_{ij}]$,

$$[g_{ij}] = \left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial y_i \partial y_j}\right]$$

   é positiva definida.

Definição 2.7 (Métrica $\varepsilon-$perturbada)**.** *Seja ε uma constante real com $0 \leq \varepsilon < 1$ e $y \in \mathbb{R}^2$. Definimos a métrica $\varepsilon-$perturbada sendo*

$$F_\varepsilon(y) = \|y\| + \varepsilon \pi_2(y), \tag{2.3}$$

onde $\|\cdot\|$ é a norma euclidiana usual e $\pi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é a projeção na segunda coordenada.

Na definição anterior fizemos uma perturbação da função norma por uma aplicação linear. Considerando $F(x,y) = F_\varepsilon(y)$, pode ser verificado que a função (2.3) é uma métrica de Finsler. Isto justifica o uso da Equação de Hamel (1.1).

3 Comprimento de arco ε-perturbado

Duas curvas regulares $c : I \to \mathbb{R}^2$ e $\overline{c} : \overline{I} \to \mathbb{R}^2$ são ditas *equivalentes* se existe uma aplicação suave por partes $\phi : I \to \overline{I}$ tal que $\phi'(t) > 0$ e $\overline{c}(\phi(t)) = c(t), \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i]$.

Uma curva C regular em $\mathbb{R}^2$ é uma classe de equivalência de curvas regulares em $\mathbb{R}^2$. Podemos estender esta definição para curvas regulares por partes de maneira natural. Por simplicidade, não distinguiremos C e $c = c(t)$, a menos que seja necessário. Dada uma curva regular (representada por) $c : I = [a, b] \to M$, seu reverso $c_- : I \to M$ é definido por $c_-(t) := c(b+a-t)$. Então a classe representada por c_- é distinta da classe que representa c.

Estas definições nos levam a ter em consideração a orientação das curvas. Isto é, todas as curvas serão orientadas. O que tem sentido se pensarmos no Problema de Navegação de Zermelo, que exige escolher uma direção e sentido, de P para Q.

Definição 3.1 (Comprimento de arco $\varepsilon-$perturbado)**.** Seja C uma curva regular por partes C^∞ de P para Q representada por $c = c(t)$ com $c(a) = P$ e $c(b) = Q$. O *comprimento de arco $\varepsilon-$perturbado de C* é definido por:

$$\mathcal{L}_\varepsilon(C) := \int_a^b F_\varepsilon(c'(t))dt$$

onde F_ε é a função definida na Definição 2.7. Assim de (2.3) temos

$$\mathcal{L}_\varepsilon(C) = \int_a^b \left[\|c'(t)\| + \varepsilon\pi_2(c'(t))\right] dt. \tag{3.1}$$

Vamos mostrar que $\mathcal{L}(C)$ está bem definida. Suponha que $\overline{c} : [\overline{a}, \overline{b}] \to \mathbb{R}^2$ é equivalente a curva c, então existe ϕ tal que $\phi' > 0$, $\overline{t} = \phi(t)$ com $\overline{a} = \phi(a)$ e $\overline{b} = \phi(b)$. Assim

$$d\overline{t} = \phi'(t)dt, \quad c'(t) = \overline{c}'(\overline{t})\phi'(t).$$

e portanto,

$$\begin{aligned}
\int_a^b F_\varepsilon(c'(t))dt &= \int_a^b F_\varepsilon\left(\overline{c}(\overline{t})'\phi'(t)\right) dt \\
&= \int_a^b \left[\|\overline{c}'(\overline{t})'\phi'(t)\| + \varepsilon\pi_2\left(\overline{c}'(\overline{t})'\phi'(t)\right)\right] \mathrm{dt} \\
&= \int_a^b \left[\|\overline{c}'(\overline{t})'\| + \varepsilon\pi_2\left(\overline{c}'(\overline{t})\right)\right] \phi'(t)\,\mathrm{dt} \\
&= \int_{\overline{a}}^{\overline{b}} F\left(\overline{c}(\overline{t})\right) d\overline{t}.
\end{aligned}$$

Agora podemos definir distância entre pontos de uma reta orientada, como segue: a distância de um ponto a outro é o menor dos comprimentos de arco de todas as curvas C que ligam estes pontos.

$$d_F(P,Q) := \inf_C \mathcal{L}_\varepsilon(C).$$

A Equação de Hamel, nos diz que as geodésicas (caminhos ótimos) no modelo considerado $F_\varepsilon(y) = \|y\| + \varepsilon\pi_2(y)$ dada em (2.3) são linhas retas.

Seja $c(t) = P + (Q-P)t, \quad 0 \le t \le 1$, com $c'(t) = Q - P$, a geodésica de $P = (p_1, p_2)$ até $Q = (q_1, q_2)$. A distância ε-perturbada de P até Q é dada por:

$$\begin{aligned} d_\varepsilon(P,Q) &= \int_0^1 F(c'(t))dt \\ &= \int_0^1 (\|Q-P\| + \varepsilon\pi_2(Q-P))\, \mathrm{dt} \\ &= \|Q-P\| + \varepsilon\pi_2(Q-P). \end{aligned} \tag{3.2}$$

De maneira análoga, a distância de Q até P é dada por

$$d_\varepsilon(Q,P) = \|P-Q\| + \varepsilon\pi_2(P-Q). \tag{3.3}$$

Observação 3.2. Note que se $\varepsilon \neq 0$, a distância ε-perturbada não sempre satisfaz $d_\varepsilon(P,Q) = d_\varepsilon(Q,P)$. Isto quer dizer que a métrica d_ε é não Euclidiana.

Observação 3.3. A distância ε-perturbada é invariante por translações, pois para quaisquer translação $\mathcal{T}_T(X) = X + T$ temos

$$\begin{aligned} d_\varepsilon(P,Q) &= \|Q-P\| + \varepsilon\pi_2(Q-P) \\ &= \|Q-T+T-P\| + \varepsilon\pi_2(Q-T+T-P) \\ &= d_\varepsilon(\mathcal{T}_T(P), \mathcal{T}_T(Q)). \end{aligned}$$

Observação 3.4. A distância ε-perturbada para $\varepsilon \neq 0$ é não invariante por rotações, pois considerando, por exemplo, a rotação $\mathcal{R}_\pi(x,y) = (x,-y)$ temos que,

$$d_\varepsilon((0,0),(0,1) = 1 + \varepsilon \neq 1 - \varepsilon = d_\varepsilon((0,0),(0,-1)).$$

Proposição 3.5 (Desigualdade triangular). *Sejam A, B e C pontos distintos do plano, então*

$$d_\varepsilon(A,C) \le d_\varepsilon(A,B) + d_\varepsilon(B,C).$$

Demonstração. De (3.2) e a desigualdade triangular na métrica Euclidiana temos,

$$\begin{aligned} d_\varepsilon(A, C) =& \|C - A\| + \varepsilon\pi_2(C - A) \\ \leq& \|B - A\| + \|C - B\| + \varepsilon\pi_2(C - B + B - A) \\ =& d_\varepsilon(A, B) + d_\varepsilon(B, C). \end{aligned}$$

□

Note que na demonstração acima, a igualdade é atingida quando B está entre A e C numa mesma linha reta.

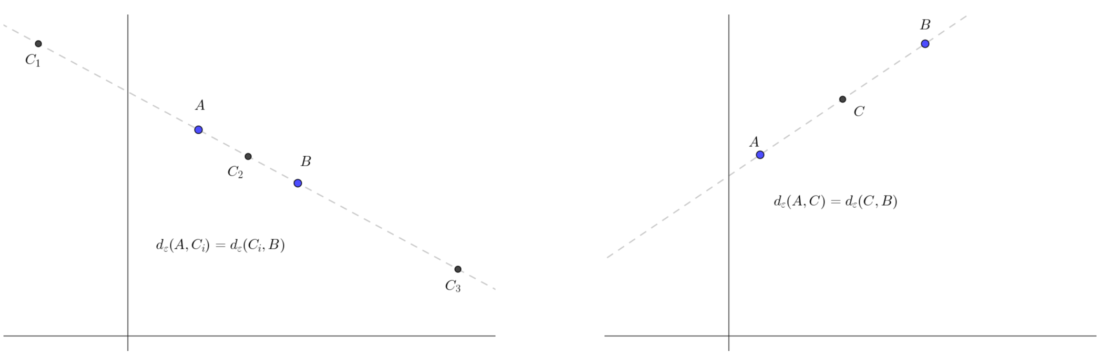
Proposição 3.6. *Se, em uma semirreta S_{AB}, consideramos o segmento AC com $d_\varepsilon(A, C) < d_\varepsilon(A, B)$, então, o ponto C estará entre A e B.*

Demonstração. Seja $t_C \in \mathbb{R}^+$ tal que $C = A + t_C(B - A)$, então da hipótese $d_\varepsilon(A, C) < d_\varepsilon(A, B)$ e (3.2) temos,

$$\begin{aligned} \|t_C(B - A)\| + \varepsilon t_C \pi_2(B - A) &< \|(B - A)\| + \varepsilon\pi_2(B - A) \\ (t_C - 1)d_\varepsilon(A, B) &< 0. \end{aligned}$$

Logo, $0 < t_C < 1$. □

A proposição anterior poderia nos induzir a pensar que existe um único ponto médio, como no caso Euclidiano, mas isto não ocorre como veremos a seguir (ver Figura 1). Devido a não simetria da distância d_ε temos 3 noções distintas de ponto médio.



(a) Caso: $\pi_2(B - A) < 0$. (b) Caso: $\pi_2(B - A) \geq 0$.

Figura 1: Pontos médios tipo 1.

Definição 3.7. Dizemos que um ponto C é ponto médio do segmento AB se C está na reta contendo AB e satisfaz uma das seguintes propriedades:

$(C1)$ $d_\varepsilon(A,C) = d_\varepsilon(C,B)$;

$(C2)$ $d_\varepsilon(A,C) = d_\varepsilon(B,C)$;

$(C3)$ $d_\varepsilon(C,A) = d_\varepsilon(C,B)$;

O ponto C que verifica a propriedade (Ck) é chamado **ponto médio do tipo $\boldsymbol{k}$**, onde $k = 1, 2, 3$.

Na continuação, caracterizamos os pontos médios definidos acima.

Proposição 3.8. *Sejam $A, B \in \mathbb{R}^2$. Então os pontos médios tipo 1, 2 e 3 são caracterizados, em cada caso, por*

1. *Tipo 1: Se $\pi_2(B-A) < 0$,*
$$C_1 = A + \frac{1}{2}\frac{d_\varepsilon(A,B)}{\varepsilon\pi_2(B-A)}(B-A), \quad C_2 = \frac{A+B}{2}, \quad C_3 = A + \frac{1}{2}\frac{d_\varepsilon(B,A)}{\varepsilon\pi_2(A-B)}(B-A),$$
e se $\pi_2(B-A) \geq 0$,
$$C = \frac{A+B}{2};$$
2. *Tipo 2:*
$$C = A + \frac{1}{2}\frac{d_\varepsilon(B,A)}{\|B-A\|}(B-A);$$
3. *Tipo 3:*
$$C = A + \frac{1}{2}\frac{d_\varepsilon(A,B)}{\|B-A\|}(B-A).$$

Demonstração. Seja a reta $c(t) = A + t(B-A)$, $t \in \mathbb{R}$ que passa por A e B, então existe t_c tal que $C = A + t_c(B-A)$. Com isto, $C - A = t_c(B-A)$ e $B - C = (1-t_c)(B-A)$.
Ponto médio tipo 1: Da igualdade $d_\varepsilon(A,C) = d_\varepsilon(C,B)$ temos

$$|t_c|\|B-A\| + t\varepsilon\pi_2(B-A) = |t_c - 1|\|B-A\| + (1-t_c)\varepsilon\pi_2(B-A)$$
$$\left(|t_c| - |t_c - 1|\right)\|B-A\| + (2t_c - 1)\varepsilon\pi_2(B-A) = 0, \tag{3.4}$$

da qual se desprendem 3 casos,

Caso 1: Se $t < 0$, de (3.4), temos que

$$-\|B-A\| + (2t_c - 1)\varepsilon\pi_2(B-A) = 0. \tag{3.5}$$

Se $\pi_2(B-A) \geq 0$ a equação (3.5) não tem solução. Por outro lado, se $\pi_2(B-A) < 0$ temos que,

$$t_c = \frac{\|B-A\| + \varepsilon\pi_2(B-A)}{2\varepsilon\pi_2(B-A)} = \frac{d_\varepsilon(A,B)}{2\varepsilon\pi_2(B-A)},$$

e

$$C = A + t_c(B-A).$$

Caso 2: Se $0 \leq t \leq 1$, de (3.4), temos que

$$(2t-1)\left[\|B-A\| + \varepsilon\pi_2(B-A)\right] = 0,$$

o que implica em que $t_c = 1/2$ e $C = \frac{A+B}{2}$.

Caso 3: Se $t > 1$, de (3.4), temos que

$$\|B-A\| + (2t-1)\varepsilon\pi_2(B-A) = 0.$$

Análogo ao caso 1 temos que se $\pi_2(B-A) > 0$ então, não existe t_c. E para $\pi_2(B-A) < 0$ temos que,

$$t_c = \frac{\|A-B\| + \varepsilon\pi_2(A-B)}{2\varepsilon\pi_2(A-B)} = \frac{d_\varepsilon(B,A)}{2\varepsilon\pi_2(A-B)},$$

e

$$C = A + t_c(B-A).$$

Ponto médio Tipo 2: Da igualdade $d_\varepsilon(A,C) = d_\varepsilon(B,C)$ temos

$$(|t_c| - |t_c - 1|)\,\|B-A\| + \varepsilon\pi_2(B-A) = 0, \tag{3.6}$$

Fazendo uma análise análoga ao caso 1 temos que a equação acima só tem solução quando $0 \leq t_c \leq 1$, e neste caso:

$$C = A + t_c(B-A),$$

onde

$$t_c = \frac{1}{2}\frac{d_\varepsilon(B,A)}{\|B-A\|}.$$

Ponto médio tipo 3: Da igualdade $d_\varepsilon(C,A) = d_\varepsilon(C,B)$ temos

$$(|t_c| - |t_c - 1|)\,\|B-A\| - \varepsilon\pi_2(B-A) = 0, \tag{3.7}$$

Fazendo uma análise análoga ao caso 1 temos que a equação acima só tem solução quando $0 \leq t_c \leq 1$, e neste caso:

$$C = A + t_c(B-A),$$

onde

$$t_c = \frac{1}{2}\frac{d_\varepsilon(A,B)}{\|B-A\|}.$$

$\square$

4 Axioma da régua infinita ε-perturbada.

O Axioma da Régua infinita de Euclides estabelece que existe uma bijeção f_s entre os pontos da reta s e os números reais, de modo que se considerarmos dois pontos P e Q sobre a reta s, teremos dois números associados biunivocamente a eles, a saber $a = f_s(P)$ e $b = f_s(Q)$, de tal modo que a distância cartesiana euclidiana é dada pela fórmula $d(A,B) = |a-b| = \max\{a-b, b-a\}$. Ao ponto onde s corta o eixo oy, ou o eixo ox (caso a s seja vertical) associamos o número zero.

Inspirados no Axioma da Régua infinita de Euclides, estabeleceremos o Axioma da Régua Infinita ε-perturbada:

Axioma da Régua Infinita ε-perturbada: Dada a função distância ε-perturbada $d_\varepsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Para cada reta s, e cada par de pontos A, B sobre a reta existem duas funções $f_s^+, f_s^- : s \to \mathbb{R}$, associadas com d_ε pela relação

$$d_\varepsilon(P,Q) = \max\{f_s^+(Q) - f_s^+(P), f_s^-(P) - f_s^-(Q)\}.$$

Para mostrar a afirmação anterior, procederemos a construir as funções f_s^+ e f_s^-. Para isto, dividiremos o estudo em dois casos.

Caso 1: Considere a reta s é inclinada. Seja $s : x_2 = mx_1 + k$ uma reta que contenha os pontos $P = (p_1, p_2)$ e $Q = (q_1, q_2)$. Da definição de distância ε-perturbada temos que

$$\begin{aligned} d_\varepsilon(P,Q) &= \sqrt{(q_1-p_1)^2 + m^2(q_1-p_1)^2} + \varepsilon m(q_1-p_1) \\ &= |q_1-p_1|\sqrt{1+m^2} + \varepsilon m(q_1-p_1), \\ &= \begin{cases} (q_1-p_1)(\sqrt{1+m^2}+\varepsilon m), & \text{se } q_1 \geq p_1 \\ (p_1-q_1)(\sqrt{1+m^2}-\varepsilon m), & \text{se } q_1 < p_1. \end{cases} \end{aligned}$$

Sendo $\sqrt{1+m^2} \pm \varepsilon m > 0$ para quaisquer valores de $m \in \mathbb{R}$ e $0 \leq \varepsilon < 1$, temos que d_ε pode ser escrito como

$$d_\varepsilon(A,B) = \max\left\{\left(\sqrt{1+m^2}+\varepsilon m\right)(q_1-p_1), \left(\sqrt{1+m^2}-\varepsilon m\right)(p_1-q_1)\right\} \tag{4.1}$$

Isto nos motiva (ver Figura 2) a definir as funções $f_s^\pm : s \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como segue

$$f_s^\pm(x_1,x_2) := \left(\sqrt{1+m^2} \pm \varepsilon m\right) x_1. \tag{4.2}$$

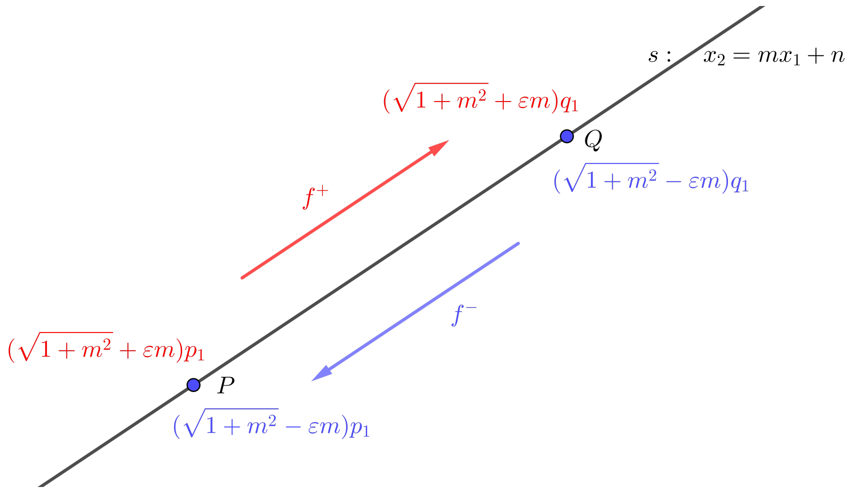


Figura 2: Régua infinita quando $q_2 > q_1$.

Com isto, $d_\varepsilon(P,Q) = \max\{f_s^+(Q) - f_s^+(P), f_s^-(P) - f_s^-(Q)\}$, o que verifica o axioma. Faltando mostrar que $f_s^+, f_s^- : s \to \mathbb{R}$ são bijetivas:

1. $f_s^\pm$ é injetiva, pois, suponha que $f_s^\pm(x_1,x_2) = f_s^\pm(\overline{x}_1,\overline{x}_2)$. Então $(\sqrt{1+m^2} \pm \varepsilon m)x_1 = (\sqrt{1+m^2} \pm \varepsilon m)\overline{x}_1$, de onde $x_1 = \overline{x}_1$ e $x_2 = mx_1 + n = m\overline{x}_1 + n = \overline{x}_2$. Portanto, $(x_1,x_2) = (\overline{x}_1,\overline{x}_2)$.

2. $f_s^\pm$ é sobrejetora, pois, dado um número real z, basta considerar
$$x_1 = \frac{z}{\sqrt{1+m^2} \pm \varepsilon m} \text{ e } x_2 = \frac{mz}{\sqrt{1+m^2} \pm \varepsilon m} + n,$$
para que
$$f_s^\pm(x_1,x_2) = (\sqrt{1+m^2} \pm \varepsilon m)x_1 = z.$$

Observação 4.1. O ponto $(0,k)$, onde a reta s corta o eixo oy corresponde à origem, pois $f_s^+((0,k)) = f_s^-((0,k)) = 0$.

Note também que se a reta s for horizontal então $f^+ = f^-$.

Caso 2: Considerando a reta vertical $s : x_1 = c$, temos,

$$\begin{aligned} d_\varepsilon(P,Q) &= |q_2 - p_2| + \varepsilon(q_2 - p_2) \\ &= \begin{cases} (q_2-p_2)(1+\varepsilon), & \text{se } q_2 \geq p_2 \\ (p_2-q_2)(1-\varepsilon), & \text{se } q_2 < p_2. \end{cases} \end{aligned}$$

o que nos sugere,

$$f_s^\pm(c,x_2) := (1 \pm \varepsilon)x_2. \tag{4.3}$$

Exemplo 4.2. Sejam a reta $s : y = 2x + 1$ e os pontos $P = (0, 1)$ e $Q = (1, 3)$ sobre a reta. De (4.2) temos que $f^{\pm}(P) = 0$ e $f^{\pm}(Q) = \sqrt{5} \pm 2\varepsilon$. Portanto,

$$\begin{aligned} d_\varepsilon(P, Q) &= \max\left\{(\sqrt{5} + 2\varepsilon) - 0, 0 - (\sqrt{5} - 2\varepsilon)\right\} \\ &= \sqrt{5} + 2\varepsilon \\ &= |f_s^+(Q) - f_s^+(P)|. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} d_\varepsilon(Q, P) &= \max\left\{0 - (\sqrt{5} + 2\varepsilon), (\sqrt{5} - 2\varepsilon) - 0\right\} \\ &= \sqrt{5} - 2\varepsilon \\ &= |f_s^-(P) - f_s^-(Q)|. \end{aligned}$$

De maneira geral, quando $p_1 \leq q_1$ pode se fazer uso da Figura 2 para reconhecer as direções em que f_s^+ ou f_s^- possam ser usados. Com isto, temos as seguintes relações:

$$d_\varepsilon(P, Q) = |f_s^+(Q) - f_s^+(P)|$$

e

$$d_\varepsilon(Q, P) = |f_s^-(Q) - f_s^-(P)|$$

Exemplo 4.3. Sejam a reta $s : y = -2x + 1$ e os pontos $P = (0, 1)$ e $Q = (1, -1)$ sobre a reta. De (4.2) temos que $f^{\pm}(P) = 0$ e $f^{\pm}(Q) = \sqrt{5} \mp 2\varepsilon$. Com ajuda da Figura 3 temos as seguintes relações

$$\begin{aligned} d_\varepsilon(P, Q) &= |f_s^+(Q) - f_s^+(P)| \\ &= |\sqrt{5} - 2\varepsilon - 0| \\ &= \sqrt{5} - 2\varepsilon. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} d_\varepsilon(Q, P) &= |f_s^-(P) - f_s^-(Q)| \\ &= |\sqrt{5} + 2\varepsilon - 0| \\ &= \sqrt{5} + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

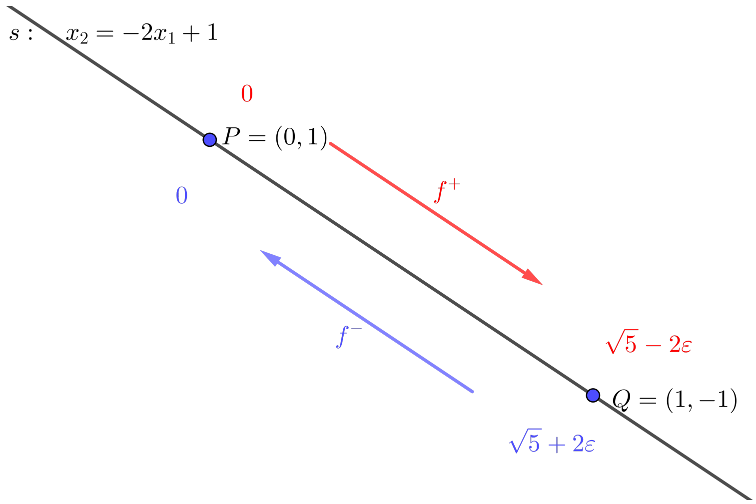


Figura 3: Régua infinita.

Exemplo 4.4. Sejam a reta vertical $s : x_1 = 1$ e os pontos $P = (1, 0)$ e $Q = (1, 2)$, então $f_s^{\pm}(P) = 0$ e $f_s^{\pm}(Q) = 2(1 \pm \varepsilon)$ (ver Figura 4).

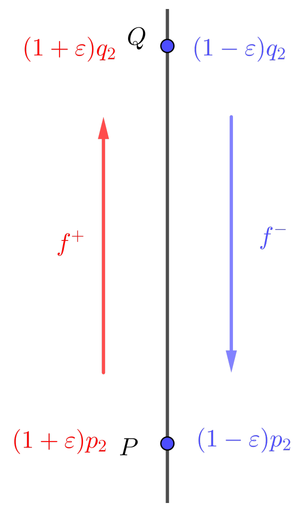


Figura 4: Régua infinita: reta vertical.

Assim,

$$\begin{aligned} d_\varepsilon(P, Q) &= |f_s^+(Q) - f_s^+(P)| \\ &= 2(1+\varepsilon), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} d_\varepsilon(Q,P) &= |f_s^-(Q) - f_s^-(P)| \\ &= 2(1-\varepsilon). \end{aligned}$$

5 Integral de linha ε-perturbada

A integral de linha usual, tem aplicações no cálculo de massa de um arame (ou fio), centro de massa e momento de inércia. A seguir introduzimos a integral de linha relativa ao comprimento de arco $\varepsilon-$perturbado.

Sejam $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função na forma $z = f(x_1, x_2)$ com domínio U no plano-x_1x_2 e $\alpha : [a,b] \to U$ uma curva regular contida no domínio de f.

Definição 5.1. Sejam $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ uma curva regular (pode ser de classe C^1), $s_\varepsilon = \mathcal{L}_\varepsilon(t) = \int_a^t F_\varepsilon(\alpha'(\tau))d\tau$ a função comprimento de arco ε-perturbada. A integral de linha ε-perturbada de uma função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ao longo da curva $\alpha([a,b]) \subset D$ é dada por

$$\begin{aligned} \int_\alpha f(x_1,\ldots,x_n)\,ds_\varepsilon &= \int_a^b f(\alpha(t))F_\varepsilon(\alpha'(t))\,dt \\ &= \int_a^b f(x_1(t),x_2(t))\left[\sqrt{[x_1'(t)]^2+[x_2'(t)]^2}+\varepsilon[x_2'(t)]\right]\,dt. \end{aligned}$$

Observação 5.2. Se $f(x_1,x_2) = 1$, a integral de linha ε-perturbada nos dá o comprimento de arco ε-perturbado de $\alpha(t)$.

5.1 Propriedades

1. Para qualquer constante $k \in \mathbb{R}$, temos
$$\int_\alpha kf(x_1,x_2)\,ds_\varepsilon = k\int_\alpha f(x_1,x_2)\,ds_\varepsilon,$$
2. $\int_\alpha [f(x_1,x_2) \pm g(x_1,x_2)]\,ds_\varepsilon = \int_\alpha f(x_1,x_2)ds_\varepsilon \pm \int_\alpha g(x_1,x_2)ds_\varepsilon$.

Exemplo 5.3. Seja $\alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $0 \le t \le 2\pi$. Então, $\alpha'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t)$. Portanto a integral de linha ε-perturbada de $f(x_1,x_2) = 1 + x_1$ sobre a curva α é

$$\begin{aligned} I = \int_\alpha f(x_1,x_2)ds_\varepsilon &= \int_0^{2\pi} f(\cos t, \operatorname{sen} t)\left(\|\alpha'(t)\| + \varepsilon(\operatorname{sen} t)'\right)\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} (1+\cos t)\left[1+\varepsilon\cos t\right]\,dt = (2+\varepsilon)\pi. \end{aligned}$$

6 Considerações finais

A métrica ε-perturbada, com $\varepsilon \neq 0$ considerada neste trabalho não é simétrica, logo não é Euclidiana, e sim uma métrica de Randers. Na Proposição 3.8 mostramos que podem existir 5 pontos distintos tais que possam ser chamados pontos médios. Em relação à versão do axioma da régua infinita considerando a métrica ε-perturbada, na Seção 4, concluímos que devem ser consideradas as direções para poder associar biunivocamente uma reta com os números reais. Por último, na Seção 5, generalizamos a definição de integral de linha considerando a nova métrica. Os exemplos proporcionados esclarecem e fixam bem as ideias desenvolvidas no presente trabalho. Para futuros trabalhos visa-se estudar as integrais de Fluxo considerando esta nova métrica, também o estudo de cônicas perturbadas com esta nova distância é um assunto interessante.

Agradecimentos

O segundo autor agradece o apoio financeiro da UNILA - Edital nro 121/2023/PRPPG - PAAP (Nro do Protocolo: 23422.026477/2023-54). Os autores agradecem também os comentários e sugestões dos revisores.

Referências

[1] Bao, D.; Robles, C.; Shen, Z., Zermelo navigation on riemannian manifolds, J. Differential Geom., 66(3): 377-435, 03 2004.

[2] Cheng, X.; Shen, Z., *Finsler Geometry: An approach via Randers spaces.* Beijing-Heidelberg: Science Press Beijing-Springer, 2012.

[3] Guo, E; Mo, X. *The geometry of spherically symmetric Finsler manifolds.* Springer, Singapore, 2018. viii+154 pp.

[4] Lima, E.L. *Análise Real. v. 1.* Coleção Matemática Universitária-IMPA. 12. ed., Rio de Janeiro, 2014. xiii+198 pp.

[5] Robles, C., Geodesics in Randers spaces of constant curvature. Transactions of the American Mathematical Society, 359 (4): 1633-1651, 2007.

[6] Shen, Z. - *Lectures on Finsler Geometry.* World Sci., Singapore (2001)

[7] Souza, M.; Tenenblat, K. , Minimal Surfaces of Rotation in a Finsler Space with a Randers Metric, Math. Ann. **325**, 625-642 (2003).

[8] Zermelo, E., Über das Navigations problem bei ruhender oder veränderlicher Windverteilung. ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik, 11(2): 114-124, 1931.

Recebido em 27 de Março de 2024.
Revisado em 10 de Julho 2024.
Aceito em 07 Agosto 2024.