

## REFLETINDO SOBRE APREENSÕES FIGURAIS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS: PERSPECTIVAS DE ALUNOS DO 8.º ANO

### REFLECTING ON FIGURAL APPREHENSIONS IN SOLVING GEOMETRIC PROBLEMS: PERSPECTIVES FROM 8TH-GRADE STUDENTS

Antônio Alexandre Aparecido da Silva  
Colégio Domus  
[alex01166@gmail.com](mailto:alex01166@gmail.com)

Angelica da Fontoura Garcia Silva  
Unopar – Anhanguera  
[angelicafontoura@gmail.com](mailto:angelicafontoura@gmail.com)

Ruy Cesar Pietropaolo  
Unopar – Anhanguera  
[rpietropaolo@gmail.com](mailto:rpietropaolo@gmail.com)

#### Resumo

Esta pesquisa teve como objetivo investigar possibilidades de apreensões figurais mobilizadas durante a resolução de problemas geométricos por alunos do 8.º ano do Ensino Fundamental. Utilizaram-se os estudos de Duval (1994, 1995, 2006, 2012, 2018) sobre apreensões para conduzir esta investigação – de caráter qualitativo e com características intervencionistas –, envolvendo 23 estudantes de uma escola particular em São Paulo. A coleta de dados incluiu protocolos de tarefas respondidas pelos participantes, observações e registros escritos e gravados em vídeo e áudio. Os resultados destacaram que a manipulação direta com figuras potencializa o desenvolvimento das apreensões figurais, em especial para compreender conceitos geométricos; incentiva a exploração de estratégias; estimula a visualização espacial e o raciocínio dedutivo; proporcionando aos alunos uma aprendizagem mais significativa. A sistematização dessas estratégias e o uso de materiais manipulativos desempenharam um papel relevante no desenvolvimento das habilidades matemáticas dos alunos, preparando-os para enfrentar situações-problema com confiança e criatividade. Salienta-se, assim, a relevância das apreensões e manipulações figurativas como elementos potencialmente ricos no ensino de Geometria.

**Palavras-chave:** Ensino e aprendizagem de Matemática. Ensino Fundamental. Apreensão Figural. Resolução de Problemas. Materiais Manipuláveis.

#### Abstract

This research investigated the possibilities of figural apprehensions mobilized during geometry problem solving by elementary school students in the 8th grade. Based on Duval's studies (1944, 1995, 2006, 2012, 2018) on apprehensions, this qualitative research with interventionist

characteristics involved 23 students from a private school in São Paulo. Data collection included protocols of tasks completed by participants, observations, written registers, and video and audio records. The results highlighted that manipulating figures enhances the development of figural apprehensions and provides students with more meaningful learning, stimulating spatial visualization, and deductive reasoning. Direct interaction with manipulative materials encouraged students to explore different approaches using the apprehensions, contributing to a deeper understanding of geometric concepts. The importance of figural apprehensions and manipulations as strategic elements in geometry teaching is highlighted. The systematization of these approaches and the use of manipulative materials can play a relevant role in developing students' mathematical skills, preparing them to face contemporary challenges with confidence and creativity.

**Keywords:** Mathematics Teaching and Learning. Elementary School. Figural Apprehension. Problem solving. Manipulative Materials

## INTRODUÇÃO

A figura desempenha um papel central dentre os recursos disponíveis para um estudante resolver uma situação-problema envolvendo conceitos geométricos, pois pode permitir a análise de possibilidades distintas para o desenvolvimento de estratégias que conduzem à solução do problema.

Uma figura pode ser ampliada, reduzida, movimentada, ou ter partes destacadas e isoladas para estudo, bem como ser inserida em um contexto mais amplo como parte de uma figura maior. Pode também ser dividida de acordo com a necessidade imposta pelo problema e de forma que as subfiguras obtidas recebam tratamento individual ou sejam recombinadas, originando novas figuras que preservam propriedades da figura inicial, como a área por exemplo.

O exemplo do fracionamento da figura é uma das possibilidades de operações de modificações figurais, estudadas por Raymond Duval, pesquisador francês, pioneiro no estudo da semiótica no contexto matemático. Duval (1994) afirma que a visualização de uma figura, no âmbito da resolução de problemas, é complexa e não ocorre de maneira imediata. Uma figura pode ser vista e descrita de formas distintas que dependem de fatores internos da própria figura (como a capacidade de apresentar elementos que contribuam para encontrar a solução do problema) e fatores externos (que podem estar associados às habilidades de percepção de quem resolve o problema). Neste estudo analisaremos os dados nessas duas perspectivas.

Diversos artigos do autor (Duval, 1994, 1995, 2006, 2012, 2018) discutem as possibilidades de se explorar uma figura em busca de revelar alternativas para a solução de

um problema ou apontar um caminho que conduza a ela. Destaca igualmente os obstáculos encontrados no desenvolvimento das apreensões e considera fatores que dificultam o desenvolvimento das apreensões que podem auxiliar o professor na construção de estratégias de resolução dos problemas.

Este artigo foi escrito a partir da análise dos dados coletados na tese de Silva (2023). Nosso propósito foi investigar as possibilidades de apreensões figurais mobilizadas durante a resolução de problemas geométricos por alunos do 8.º ano do Ensino Fundamental. A questão norteadora deste artigo é: *quais são as possibilidades de apreensão proporcionada a estudantes que resolveram um determinado problema geométrico?*

Para respondê-la, expomos aqui as estratégias e os comentários utilizados pelos estudantes em uma das sessões de estudos na qual eram convidados a resolver uma situação-problema.

Para desenvolver este estudo, aprofundamos questões relacionadas à fundamentação teórica, descrevemos os procedimentos metodológicos utilizados na pesquisa, expomos a discussão e a análise dos dados e, ao final, tecemos nossas considerações acerca dos dados analisados.

## **FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA**

Duval (1994, 2012) contribui para a compreensão do papel das figuras na resolução de problemas geométricos, ressaltando os motivos pelos quais elas conseguem ou não auxiliar na resolução dos problemas. O autor considera de fundamental importância desenvolver a capacidade de criar registros semióticos, de modo a representar esses objetos e resolver as situações em que se inserem. Ele define que a apreensão de um objeto matemático decorre da “descoberta pelo próprio sujeito do que até então ele mesmo não supunha, mesmo que outros lhe houvessem explicado” (Duval, 1994, p. 41).

Duval (1994, 2012) discute sobre as possibilidades de apreensões consideradas relevantes e as denomina: perceptiva, discursiva, sequencial e operatória. Considera ainda o tratamento cognitivo correspondente a cada uma delas, que é a função psicológica presente na aquisição do conhecimento, e a correspondente função epistemológica, que é o conhecimento científico associado a cada apreensão, conforme apresentado no Quadro 1.

**Quadro 1:** Tipos de apreensão das figuras geométricas

Fonte: Elaborados pelos autores, inspirado nos estudos de Duval (1994).

A apreensão perceptiva se dá de forma imediata e automática, quando se observa uma figura geométrica desenhada no papel, e ela está associada à identificação dos objetos, independentemente do enunciado. Duval (2012) explica que os objetos revelados pela figura por meio dessa apreensão podem ser diferentes dos tipos de objetos que a situação necessita.

Duval (2012) descreve a apreensão discursiva da figura como sendo o ato de ler o enunciado, recorrer à figura e, a seguir, valer-se desses dois registros para explicar outras propriedades ou elaborar hipóteses. Segundo o autor, a atitude de ler o enunciado e procurar integrá-lo à figura é favorecida pela congruência semântica entre o enunciado do problema e a figura apresentada, ou seja, pela correspondência entre os elementos do enunciado e da figura. A apreensão discursiva de uma figura, segundo Duval, possibilita explicitar ou demonstrar as propriedades matemáticas indicadas, às vezes, por uma legenda ou pelas hipóteses identificadas no enunciado do problema. Essa apreensão corresponde a inserir uma figura geométrica em uma rede de relações conceituais, o que exige organizar as informações para estabelecer conexões entre elas.

A apreensão sequencial de uma figura é aquela demandada na sua construção auxiliada por instrumentos de desenho (régua, compasso, software). Segundo Duval (2012), a formulação das instruções no processo de construção deve respeitar três princípios que permitem a um estudante construir uma figura: não fornecer mais que uma informação por frase, na medida do possível; evitar ambiguidades no enunciado de cada instrução; e definir um quadro de referência autônoma, permitindo uma descrição de tudo que é simplesmente apresentado.

A apreensão operatória, segundo Duval (1994), está relacionada às modificações e/ou às reconfigurações da figura, por meio de sua função de exploração, denominada de epistemológica heurística: as modificações posicionais (que envolvem o deslocamento da figura no plano); as modificações óticas (que articulam a ampliação, diminuição ou deformação da figura) e, por fim, as modificações denominadas mereológicas<sup>1</sup> que trabalham a relação entre as partes e o todo.

Essas modificações mereológicas podem ser de natureza global, ao centrar-se na divisão de toda a figura inicial; ou analítica, ao centrar-se nas partes elementares da figura. As modificações globais consistem em dividir uma figura em subfiguras e, por meio do reagrupamento dessas partes elementares, originar uma operação de reconfiguração intermediária. Segundo Duval (2012), uma operação ligada à apreensão operatória é o mergulhamento que, apoiada em uma modificação mereológica, consiste em inserir uma figura em outra figura, a fim de que a primeira se torne subfigura da nova figura construída.

As modificações, tidas por Duval (1994) “heurísticamente relevantes”, são aquelas que objetivam expor a ideia da solução ou da demonstração, mesmo supondo que há congruência semântica entre a apreensão operatória e um tratamento matemático do problema. Em qualquer das situações consideradas, observa-se que as modificações sofrem influências de fatores que tanto podem favorecê-las quanto inibi-las, os quais, por sua vez, dependem de outros aspectos associados à organização interna da figura. Duval (1994) explica que os conceitos não são os principais fatores que dificultam a aprendizagem da Geometria. Uma grande dificuldade é a proximidade entre tratamentos relevantes e irrelevantes dentro de um mesmo registro. Segundo o autor, os tratamentos relevantes são as modificações promovidas na figura que aproximam da resolução, enquanto os tratamentos irrelevantes afastam o estudante desse objetivo.

O estudo das apreensões na perspectiva de Duval é importante para compreender o processo de resolução de problemas em Geometria, conforme evidenciado por pesquisas como as de Barroso (2015), Gridos *et al.* (2022), Karpuz e Atasoy (2019), Karpuz e Güven (2022), Moretti e Cans (2024) e Pirola (2012). Essas pesquisas reiteram a importância das

---

<sup>1</sup> A palavra "mereologia" tem sua origem no grego antigo, derivando de "meros", que significa "parte", e "logia", que denota "estudo". Portanto, a Mereologia seria um campo de estudo dedicado às relações lógicas entre as partes e o todo.

ideias de Duval no desenvolvimento teórico e metodológico do ensino de Geometria, enfatizando a utilização de diferentes registros de representação semiótica e a compreensão das apreensões figurais. Ao abordar as dificuldades dos professores, a competência heurística dos estudantes e a influência das ideias de Duval na resolução de problemas geométricos, esses estudos corroboram a relevância das apreensões perceptivas, discursivas, sequenciais e operatórias na aprendizagem em Geometria.

Esse entendimento embasa a escolha de utilizar materiais manipuláveis como recurso didático, conforme será discutido em estudos subsequentes. Esses materiais não apenas promovem a visualização e a representação de figuras geométricas, mas também facilitam a compreensão dos processos cognitivos envolvidos na resolução de problemas. A utilização de materiais manipuláveis na educação matemática é amplamente respaldada pela literatura, destacando-se sua importância na promoção do desenvolvimento de habilidades visuais e espaciais nos alunos. Pesquisas nacionais e internacionais, como as de Clements (1999, 2004), Bartolini e Martignone (2020), Matos e Serrazina (1996), Passos (2010) e Weiss (2006), têm comprovado a eficácia dos materiais manipuláveis em processos de ensino e aprendizagem da Matemática. Como destacado por Bartolini e Martignone (2020) e Galvão e Panossian (2022), os estudantes necessitam de habilidades não apenas para criar, manipular e interpretar imagens mentais, mas também para compreender informações espaciais e quantitativas apresentadas visualmente. A manipulação de materiais concretos, conforme defendido por Duval (1994, 1995, 2006, 2012, 2018), facilita compreender os conceitos matemáticos e confere um aspecto dinâmico ao processo de aprendizagem, permitindo ao aluno explorar e investigar propriedades e possibilidades de forma mais efetiva.

## **PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS**

Esta pesquisa, de natureza qualitativa, discute e amplia discussões dos resultados do estudo de doutorado do primeiro autor Silva (2023). Para o seu desenvolvimento foi solicitada avaliação ética pelo sistema CEP/CONEP CAAE: 45236821.3.0000.5493. A investigação foi desenvolvida no decorrer do segundo semestre de 2021, em quatro sessões de estudo, realizadas no turno oposto das atividades escolares.

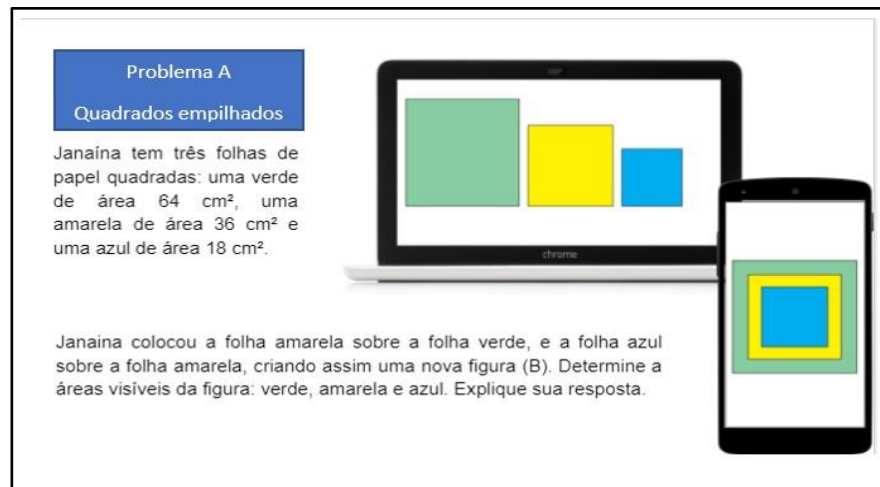
A investigação ocorreu com 23 estudantes do 8.º ano, de uma escola particular da

cidade de São Paulo, os quais aceitaram dela participar. Para proteger a identidade dos participantes, decidimos substituir os nomes individuais por nomes de flores.

A sessão ocorreu de forma híbrida, na qual os estudantes participaram presencialmente e *on-line*, uma vez que estávamos impactados com a Pandemia Covid-19. Para essa coleta, foram utilizados os seguintes instrumentos: observações com registros escritos e gravados em vídeos e áudios, protocolos da resolução dos estudantes. Para este artigo, analisaremos os dados da resolução de um problema geométrico, apresentado na primeira sessão de estudo.

A seleção desse problema (Figura 1) para iniciar a discussão se deu por considerarmos que ele poderia gerar diferentes apreensões.

**Figura 1:** Situação-problema proposta aos estudantes



Fonte: Situação apresentada na OBMEP 2018 – N2, Q03, F2

Notamos que, na situação-problema, estava presente a ideia manipulativa de sobreposição de peças. Além disso, apoiados em Passos (2010), no transcorrer da sessão, estimulamos que os estudantes se utilizassem de materiais manipuláveis, pois, muitas vezes, eles não relacionam as experiências concretas com a matemática formal, por enxergarem diferentes possibilidades das que os elaboradores e/ou professores tinham, ao selecionarem os materiais.

Para proceder a análise dessa experiência, recorremos a Bardin (2011). Assim, inicialmente, realizamos uma pré-análise, denominada pela autora como leitura flutuante, que é quando ocorre o primeiro contato com os dados. Foi, nesse momento, que surgiram as hipóteses e as informações provisórias. Em seguida, houve a etapa mais longa,

denominada exploração do material, a qual permitiu organizar os dados de forma a agrupá-los em torno de categorias das apreensões previstas por Duval (1994). Por fim, na etapa de interpretação dos dados, buscamos os significados, em profundidade, das interpretações dos estudantes, e esses dados nos permitam compreender nosso objeto de estudo.

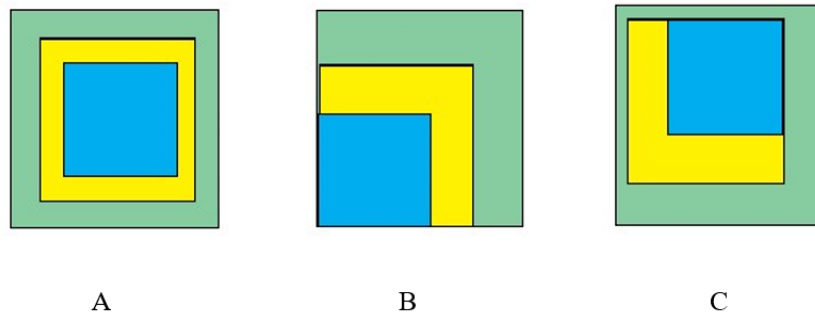
## ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

Antes de descrever e analisar o ocorrido na sessão, consideramos fundamental discutir sobre o potencial heurístico da figura do problema.

### Potencial heurístico das figuras do problema

Considerando a discussão apresentada por Duval (1994), que enfatiza a necessidade de um conhecimento detalhado dos fatores envolvidos e sua influência na visibilidade das operações, notamos que o problema possibilita mobilizar a apreensão perceptiva, permitindo a identificação imediata de uma forma ou objeto. Essa apreensão possibilita reconhecer uma figura composta por três quadrados coloridos, bem como outra figura formada pela sobreposição desses quadrados. Ao ler o enunciado, é possível confirmar que as três peças são quadradas e que foram sobrepostas para criar a figura a ser analisada. A leitura do enunciado igualmente promove a apreensão discursiva, destacando que as figuras são quadradas, fornecendo informações sobre suas áreas e o propósito do cálculo. A abordagem da situação, utilizando material manipulativo, viabiliza aos estudantes constatarem, por exemplo, que as figuras não precisam estar na posição indicada no problema. É importante observar a invariância das áreas visíveis, independentemente da posição dos quadrados na sobreposição das figuras (Figura 2).

**Figura 2:** Algumas possibilidades de sobreposição dos quadrados



Fonte: Elaboração dos pesquisadores a partir de OBMEP 2018 – N2, Q03, F2



Há diversas formas de apreender uma figura em um contexto geométrico e, para cada tipo de apreensão, é mobilizada uma aprendizagem específica, que vislumbra e se apoia em uma maneira matemática de olhar uma figura em Geometria, como propõe Duval (1994). Assim, a exploração desse problema poderia fornecer-nos indícios das apreensões mobilizadas pelos estudantes e, inclusive, favorecer, eventualmente, a ampliação do repertório dos participantes para que as utilizassem em estratégias de resolução de outros problemas.

### Discussão e análises do ocorrido na sessão de estudos

Durante a primeira etapa, foi concedido um tempo para que os 23 alunos presentes resolvessem o Problema A. O Quadro 1 ilustra a quantidade de alunos que realizaram ou não o registro da resolução, além daqueles que conseguiram resolver corretamente ou não.

**Quadro 2:** Registro quantitativo da resolução da situação-problema

Problema		Estudantes		
		Total	Usou a figura na resolução	Não usou a figura na resolução
A	Acertou	15	4	11
	Não acertou	7	1	6
	Não resolveu	1		
	Total	23		

Fonte: Elaboração dos pesquisadores

Ao final da primeira etapa, o pesquisador perguntou quem gostaria de comentar o trabalho. Os comentários sobre as dificuldades encontradas na resolução da situação se concentraram na compreensão do enunciado, em saber o que deveria ser feito e sobre os conceitos usados, conforme os depoimentos exemplares, expostos a seguir:

Rosa: *No começo achei meio confuso, demorou um pouco para entender.*

Tulipa: *A primeira vez que li, entendi o que era para fazer, mas não consegui fazer por que não ficou muito claro como fazer, tive que ler mais vezes.*

Begônia: *Tive dificuldade na compreensão de área visível (conceito).*

Mesmo considerando difícil entender o enunciado, alguns estudantes ponderaram

que seus processos de visualização de representações contribuíram para elaborar uma estratégia de resolução:

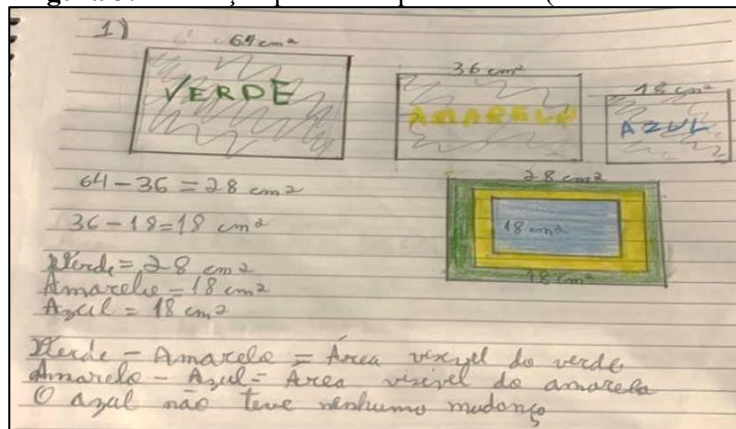
*Crisântemo: Eu achei o exercício até que fácil, demorei um pouco para raciocinar, só vi que usando a figura me ajudaria a pensar.*

*Dália: No início há muitas palavras repetidas, achei confuso, também não entendi de cara o que fazer, mas depois de reler algumas vezes entendi que era fácil. No começo não percebi que a figura me ajudaria, aí prestei mais atenção e vi que ela ajudou a entender o que pedido. Resolvi sem problemas no fim.*

Apesar das dificuldades iniciais expostas, observamos que apenas um estudante não resolveu a situação, justificando-se não ter entendido o que “era para fazer”. A discussão inicial sobre a situação revela ao pesquisador que os estudantes compreenderam o que foi solicitado, e a maioria conseguiu resolver o problema de maneira correta, e um deles até não se utilizou da figura na resolução: “Eu tive dificuldades no começo, mas depois de ler e entender o que estava sendo pedido, foi fácil, eu até fiz de cabeça, mas foi legal eu ter que escrever o que eu pensei” (Estudante Cravo), como mostra a Figura 3.

Em seguida, os alunos se agruparam para resolver o problema A novamente, desta vez, utilizando material manipulativo. Para favorecer um outro “olhar” para as apreensões, o pesquisador discutiu com eles, tendo por base as contribuições apresentadas na etapa inicial, possibilidades de utilizar as figuras na resolução dos problemas. Inicialmente, o pesquisador retomou as discussões desenvolvidas com os estudantes Cravo e Rosa que conduziam às subfiguras, apresentadas na Figura 3.

**Figura 3:** Resolução padrão do problema A (Estudante Cravo)

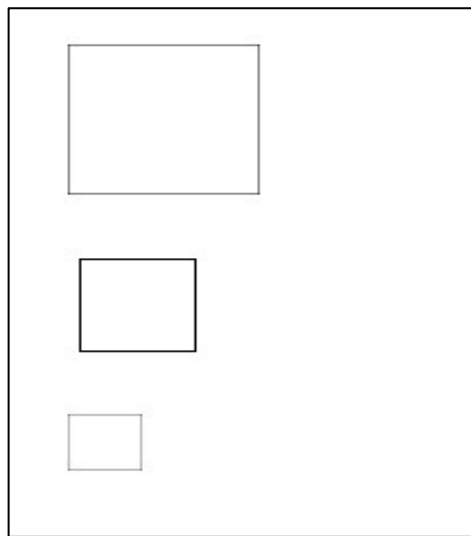


Fonte: Acervo da Pesquisa

Nesse momento, para que todos os estudantes vivenciassem as ações e realizassem os cálculos para obter os resultados, lhes entregamos uma ficha: para os estudantes que participavam presencialmente, ela estava impressa com os modelos dos três quadrados para serem utilizados de modo manipulativo na resolução do problema (Figura 4). Para os alunos que participavam de maneira remota, a mesma ficha foi enviada digitalmente pela plataforma do *Google Sala de Aula*, assim todos os estudantes teriam acesso ao mesmo material manipulativo.

Os estudantes foram orientados a pintar, a recortar e a usar os quadrados para montar as subfiguras descritas nas discussões, além de calcular as áreas sobrepostas e fazer um novo comentário sobre a abordagem, então com a manipulação de figuras.

Figura 4 : Ficha com quadrados



Fonte: Elaborado pelos pesquisadores

Por fim, na etapa seguinte, as resoluções foram apresentadas e discutidas coletivamente, permitindo destacar diferentes estratégias e verificar a compreensão dos participantes.

Por meio dos comentários, o pesquisador pôde constatar que a dinâmica de trabalho com as apreensões e material manipulativo ampliou a compreensão tanto dos estudantes que já tinham resolvido corretamente a situação como dos demais. Lirio e Acácia, por exemplo, já tinham interpretado e resolvido corretamente a situação, mas avaliaram que o

processo os ajudou a ampliar seu conhecimento:

Lírio: *Depois da discussão na aula descobri mais uma maneira de resolver o problema.*

Acácia: *Compreendi melhor o enunciado, consegui resolver mais rápido e expliquei melhor a resposta.*

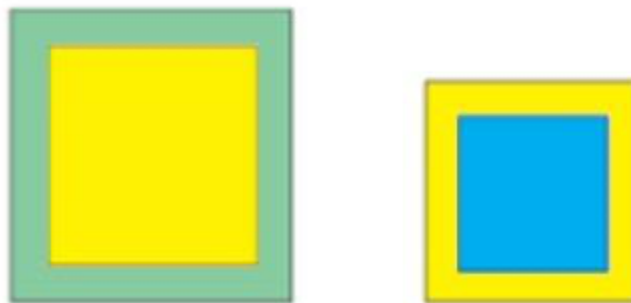
Já Rosa que declarou, inicialmente, ter achado o problema “*meio confuso*”, ao ser questionada sobre a utilização do material, afirmou: “*Entendi melhor o que era para fazer, ficou mais fácil quando eu mexi com as figuras de papel.*” (Rosa).

A melhora na compreensão relatada por Rosa pôde ser verificada em seu relato escrito sobre a segunda resolução:

Rosa: *Se colocarmos um em cima do outro, do maior para o menor, teria um centro, no meio ficaria o papel azul inteiro com  $18\text{ cm}^2$  [de área] e as laterais do papel amarelo com  $18\text{ cm}^2$  [de área] e do verde com  $28\text{ cm}^2$  [de área].*

De acordo com Duval (1995, p.147), “cada uma das diferentes modificações pode ser realizada mentalmente ou fisicamente por meio de várias operações”, como apresentado na Figura 5, que ilustra a utilização da apreensão operatória na obtenção da área visível verde e área visível amarela descritas pela estudante Rosa em seu relato escrito e nos comentários do estudante Cravo: Área visível verde = (área) verde – (área) amarela e área visível amarela = (área) amarela – (área) azul (Figura 2). Intuitivamente, e depois por manipulações de figuras, os estudantes se valeram da apreensão operatória para solucionar o problema.

**Figura 5:** Apreensão operatória descrita pelos estudantes Cravo e Rosa das áreas visíveis



Fonte: Elaboração do pesquisador a partir dos relatos dos estudantes Cravo e Rosa.

Apoiados em Duval (2006), percebemos que, para esta resolução, era preciso

observar também as subfiguras obtidas pela reconfiguração. Segundo o teórico: “a solução de certos problemas requer a comparação de certas subfiguras possíveis obtidas por reconfiguração e, portanto, a capacidade de discerni-las rapidamente na figura original” (Duval, 2006, p.117). As possibilidades de compreensão, proporcionadas pelas apreensões mobilizadas, a partir da leitura do enunciado e pela interpretação da figura, propiciaram mais confiança para os estudantes explicitarem e registrarem seu raciocínio. As evidências coletadas durante a aplicação da atividade confirmam que a descrição da situação e a exposição da figura funcionaram como uma ferramenta heurística na resolução do problema, o que está alinhado com o pensamento de Duval (2006).

O grupo entendeu como válido o uso do material manipulativo e houve relatos de não alteração da compreensão do modo de resolução do problema:

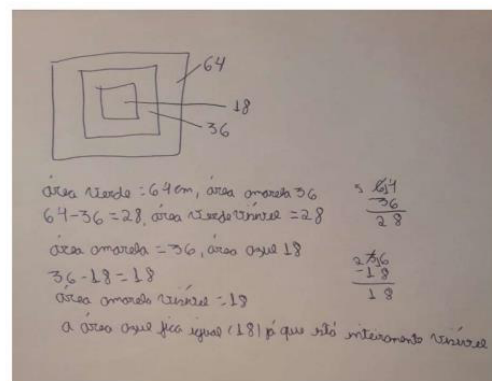
*Iris: Não tenho tanta coisa para comentar sobre a orientação do primeiro problema, já que na resolução depois da discussão não houve nenhuma mudança no jeito que eu tinha feito, o resultado e a forma de chegar ao resultado foram as mesmas, mas parece que fica muito mais fácil quando conseguimos mexer com as figuras [referindo-se à ação de manipular as figuras de papel].*

Durante a etapa 1, Iris utilizou as apreensões perceptiva e discursiva para desenvolver a resolução, como pode ser observado na Figura 6.

**Figura 6:** Anotações da estudante Iris sobre a resolução do problema A

**Comentários**

Para calcular a área depois que cada figura foi colocada uma em cima da outra, basta ver qual a área da figura que ficou “em cima” e subtraí-la da área da figura de baixo, ou seja Área verde=64cm, área amarela=36,  $64-36=28$ , área verde visível=28  
 Área amarela=36, área azul=18,  $36-18=18$   
 Área amarela visível=18  
 A área azul fica a mesma(18) já que está inteiramente visível  
 Quando eu ainda não tinha lido parecia difícil, mas na realidade é bem fácil.



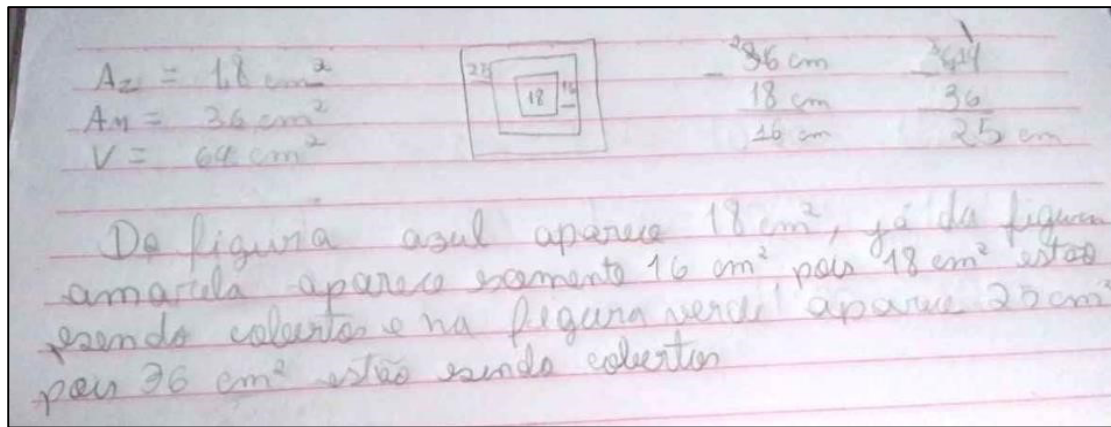
Fonte: Acervo da Pesquisa

Ao final, foi possível notar que, depois da utilização do material manipulativo, todos os alunos interpretaram corretamente a situação. Todavia quatro deles não encontraram a

solução esperada ou porque se utilizaram de medidas diferentes da apresentada na situação (Azaleia) ou porque se equivocaram nos procedimentos de cálculo (Violeta).

Azaleia, por exemplo, relatou: “*Eu tinha escrito um número errado, então minhas contas ficaram erradas, mas depois que arrumei ficou tudo certinho*”. Outros dois estudantes usaram as medidas indicadas na situação, mas erraram nos cálculos do valor da diferença como, por exemplo, a resolução de Violeta, mostrada na Figura 7.

Figura 7 : Resolução da estudante Violeta



Fonte: Acervo da Pesquisa

Apesar de todos os estudantes terem vivenciado a utilização do material manipulável, oito utilizaram a figura no processo resolutivo nessa etapa. Ao serem questionados o motivo da não utilização, eles relataram que não “*foi preciso*” ou que foi suficiente “*deixar as contas no papel*”. Pudemos inferir que a apreensão visual e a discursiva lhes ajudaram a compreender a situação.

Foi possível identificar nesta pesquisa diferentes maneiras de os estudantes apreenderem a figura geométrica apresentada no problema, como defendido por Duval (1994).

Além disso, a análise do problema, proposto à luz das ideias de Duval (1994), revela a mobilização de diferentes apreensões pelos estudantes. A percepção imediata da figura composta por três quadrados coloridos evidencia ter havido o desenvolvimento da apreensão perceptiva, enquanto a leitura do enunciado promoveu a apreensão discursiva,

fornecendo informações sobre as figuras e sua relação com o cálculo das áreas. A abordagem da situação com material manipulativo permitiu, por meio do desenvolvimento da apreensão operatória, constatar a invariância das áreas visíveis, independente da disposição dos quadrados na sobreposição das figuras. Assim com base nessas observações, alinhadas à perspectiva de Duval (2006), reconhecemos a diversidade de formas de apreensão de uma figura geométrica, cada uma demandando uma aprendizagem específica que se apoie numa visão matemática apropriada. Durante a resolução do problema, os estudantes revelaram dificuldades em entender o enunciado, mas também demonstraram processos de visualização que contribuíram para suas estratégias de resolução, como exemplificado pelos relatos dos alunos Crisântemo e Dália.

Na discussão posterior, ao utilizarem material manipulativo, os alunos puderam vivenciar as apreensões de forma mais concreta, ampliando sua compreensão e confiança na resolução do problema, situação discutida por Karpuz e Atasoy (2019), Karpuz e Güven (2022), Moretti e Cans (2024) e Pirola (2012). As evidências coletadas durante a atividade confirmam que a descrição da situação e a exposição da figura funcionaram como ferramentas heurísticas, como proposto por Duval (2006). Ao final, todos os alunos interpretaram corretamente a situação, com destaque para o papel do material manipulativo na facilitação desse processo. A experiência revelou que, embora nem todos tenham utilizado o material na resolução, a apreensão operatória e discursiva lhes facilitou alcançar a solução esperada.

## **CONSIDERAÇÕES FINAIS**

Neste estudo, buscamos analisar as diferentes apreensões que os estudantes mobilizaram, ao resolver um problema geométrico, especialmente explorando a figura apresentada na situação dos “quadrados empilhados”.

A presente pesquisa teve como objetivo investigar as possibilidades de apreensões figurais mobilizadas durante a resolução de problemas de Geometria por alunos do 8.º ano do Ensino Fundamental. Os resultados obtidos destacaram a relevância da manipulação de

figuras na potencialização do desenvolvimento das apreensões figurais. Foi evidenciado que a interação direta com materiais manipulativos estimulou os estudantes a explorarem diversas abordagens na resolução dos problemas geométricos, contribuindo significativamente para a aprendizagem dos estudantes.

Durante a análise dos dados, observamos que a utilização de figuras geométricas, como recursos visuais, desempenhou um papel importante na resolução dos problemas, favorecendo a mobilização das diferentes apreensões figurais, tais como a perceptiva, a discursiva, a sequencial e a operatória, conforme propõe Duval (1994, 2012). Essas apreensões possibilitaram aos alunos uma compreensão mais abrangente dos conceitos geométricos abordados, estimulando tanto a visualização espacial quanto o raciocínio dedutivo.

A congruência semântica entre o enunciado do problema e a figura apresentada facilitou a apreensão discursiva e operatória da figura, resultando numa compreensão mais clara e eficaz do problema pelos participantes da pesquisa.

A utilização de materiais manipuláveis, como recurso didático, também se mostrou relevante. Além de promover a visualização e a representação de figuras geométricas, tais materiais facilitaram a construção de estratégias de resolução de problemas. Os estudantes puderam explorar e investigar propriedades e possibilidades de forma mais efetiva, o que contribuiu para o desenvolvimento das diferentes apreensões.

Diante dos resultados obtidos, reforçamos a importância da manipulação de materiais como elementos estratégicos para o desenvolvimento das apreensões e o ensino de Geometria.

Finalmente, os resultados desta pesquisa enfatizam a importância de promover abordagens que facilitem a compreensão e a aplicação de conceitos visuais no contexto educacional, abrangendo diversos níveis de ensino, incluindo estudantes no final da Educação Básica. É importante reconhecer, ainda, a necessidade de uma abordagem abrangente para o desenvolvimento dessas habilidades tanto nos cursos de formação inicial quanto nos programas de formação continuada para professores. Os resultados deste estudo não apenas reforçam a relevância dessas práticas, mas também sugerem oportunidades para



futuras pesquisas explorarem estratégias mais eficazes e adaptáveis para promover a compreensão de conceitos visuais no ambiente escolar.

## REFERÊNCIAS

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. São Paulo: Edições 70, 2011. 229 p.

BARROSO, M. M. **As Apreensões Em Geometria: um estudo com professores da educação básica acerca de registros figurais**. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Estadual de Maringá, Programa de Pós- Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática UEM, Maringá, PR, Centro de Ciências Exatas, 2015. Disponível em: <http://repositorio.uem.br:8080/jspui/handle/1/4522> Acesso em: 01 jul. 2022.

BARTOLINI, M.G.; MARTIGNONE, F. Manipulatives in Mathematics Education. *In*: LERMAN, S. (eds). **Encyclopedia of Mathematics Education**. Springer, Cham, 2020. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0\\_93](https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_93) Acesso em: 01 jul. 2022.

CLEMENTS, D. Concrete manipulatives, concrete ideas. **Contemporary issues in early childhood**, v. 1, p. 45-60. 1999.

CLEMENTS, L. A model for understanding, using and connecting representations. **Teaching children mathematics**, v. 11, p. 97-101. 2004.

DUVAL R. Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. **Repères-IREM**, n.17, p. 121-138. English title: The different functions of figures in a geometrical sequence, 1994. Disponível em: [https://www.univ-irem.fr/reperes/articles/17\\_article\\_119.pdf](https://www.univ-irem.fr/reperes/articles/17_article_119.pdf). Acesso em: 01 jul. 2022.

DUVAL, R. Geometrical Pictures: Kinds of Representation and Specific Processings. *In*: SUTHERLAND, R.; MASON, J. (eds). **Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education. NATO ASI Series**, v. 138. Springer, Heidelberg, 1995. Disponível em: [https://doi.org/10.1007/978-3-642-57771-0\\_10](https://doi.org/10.1007/978-3-642-57771-0_10)

DUVAL, R. A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. **Educ Stud Math**, n. 61, 103–131, 2006. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z>.

DUVAL, R. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. **REVEMAT: Revista Eletrônica de matemática**, UFSC, Santa Catarina, v. 07, n. 1, p. 118-138, 2012. Disponível em: <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n1p118>.

DUVAL, R. Registers of Semiotic Representation. *In*: LERMAN, S. (eds). **Encyclopedia of Mathematics Education**. Springer, Cham, 2018. Disponível em:

[https://doi.org/10.1007/978-3-319-77487-9\\_100033-](https://doi.org/10.1007/978-3-319-77487-9_100033-)

GALVÃO, M. E. E. L.; PANOSSIAN, M. L. **Recursos didáticos em aulas de matemática** o proposto pelas pesquisas e o praticado. [Livro eletrônico]. Brasília, DF: SBEM Nacional, 2022. Formato PDF.

GRIDOS, P.; AVGERINOS, E.; MAMONA-DOWNS, J. *et al.* Geometrical Figure Apprehension, Construction of Auxiliary Lines, and Multiple Solutions in Problem Solving: Aspects of Mathematical Creativity in School Geometry. **Int J of Sci and Math Educ.**, 20, 619–636, 2022. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s10763-021-10155-4> Acesso em: 01 jul. 2022.

KARPUZ, Y.; GÜVEN, B. Are 9th grade students ready to engage in the theoretical discursive process in geometry. **REDIMAT– Journal of Research in Mathematics Education**, v.11, n. 1, p. 86-112, 2022. doi: 10.17583/redimat.3667. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.17583/redimat.3667> Acesso em: 01 jul. 2022.

KARPUZ, Y.; ATASOY, E. Investigation of 9th grade students' geometrical figure apprehension. **European Journal of Educational Research**, v. 8, n. 1, p. 285-300, 2019. doi:10.12973/eu-jer.8.1.285. Disponível em: [https://www.researchgate.net/publication/330398958\\_Investigation\\_of\\_9th\\_Grade\\_Students'\\_Geometrical\\_Figure\\_Apprehension](https://www.researchgate.net/publication/330398958_Investigation_of_9th_Grade_Students'_Geometrical_Figure_Apprehension). Acesso em: 01 jul. 2022.

MATOS, J.M.; SERRAZINA, L. **Didáctica da Matemática**. Lisboa: Universidade Aberta, 1996.

MORETTI, M. T.; CANS, A. Releitura das apreensões em geometria e a ideia de expansão figural a partir dos estudos de Raymond Duval. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 16, n. 3, p. 303-310, 2024. DOI: <https://doi.org/10.17921/2176-5634.2023v16n3p303-310>.

PASSOS, C. L. B. Materiais manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de matemática. In: LORENZATO, S. **Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associado, 2010. p. 77-92.

PIROLA, D. L. **Aprendizagem em geometria nas séries iniciais**: uma possibilidade pela integração entre as apreensões em geometria e as capacidades de percepção visual. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências da Educação. Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, 2012. Disponível em: <http://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/96199> Acesso em 04 maio 2024.

SILVA, A.A.A da. **Possibilidades de apreensões mobilizadas na manipulação de figuras na resolução de problemas de geometria**. 147 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Centro Universitário Anhanguera de São Paulo, São Paulo. 2023. Disponível em: <https://repositorio.pgsscogna.com.br/handle/123456789/67114> Acesso em 04 maio 2024.

WEISS, D. The rationale for using manipulatives in the middle grades. **Mathematics teaching in the middle school**, v. 11, n. 5, p. 238-242, 2006.

**Submetido em 23 de abril de 2024.**  
**Aprovado em 25 de junho de 2024.**