Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática

https://doi.org/10.34179/revisem.v10i2.20986

CENTRALIDADE DE JORDAN

JORDAN CENTRALITY

Lucas Hiroshi dos Santos Nakagawa
Universidade Federal de Alagoas
lucas.nakagawa@im.ufal.br

Alan Anderson da Silva Pereira
Universidade Federal de Alagoas
alan.pereira@im.ufal.br

Handled by A. Viana

Resumo

Neste texto definiremos o conceito de centralidade de Jordan de um vértice de uma árvore. Em seguida mostraremos, utilizando métodos combinatoriais diretos, que esta quantidade é minimizada por no máximo dois vértices distintos. No fim, apresentaremos um algoritmo teórico para encontrar vértices que minimizam a centralidade de Jordan.

Palavras–chave: Centralidade; Árvore; Centroide; Jordan.

Abstract

In this text, we will define the concept of Jordan centrality for a vertex in a tree. We will then show, using direct combinatorial methods, that this quantity is minimized by at most two distinct vertices. Finally, we will present a theoretical algorithm for finding vertices that minimize Jordan centrality.

Keywords: Centrality; Tree; Centroid; Jordan.

1 Introdução

Determinar o centro de uma estrutura complexa é um problema que atrai a atenção do ser humano por diversas razões. Desde a motivação artística da percepção da simetria, até razões práticas como determinar o melhor local para o comércio de uma cidade. No contexto de teoria dos grafos, muitas formas de centralidade para um grafo foram criadas, cada uma delas com utilidades particulares, que quando bem exploradas trazem

This open access article is licensed under
a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0.

bons frutos. Umas das primeiras formas de determinar o centro de uma árvore foi estabelecida no artigo seminal de Jordan [3], onde ele definiu um tipo de centralidade a partir dos ramos de uma árvore (grafo conexo sem ciclos).

Vários trabalhos posteriores trouxeram outras formas de centralidade para grafos, que muitas vezes são comparadas com o centralidade definida por Jordan. A título de exemplos temos [7] que define a *swichboard centrality*, [9] com a *rumor centrality* entre tantas outras.

Além do seu valor intrínseco, a centralidade de ramificação, ou centralidade de Jordan, tem um expressivo valor prático. Esta centralidade pode nos ajudar a fazer o estudo de arqueologia de redes, isto é, a obter informação sobre o passado de redes aleatórias dinâmicas, a partir de informações do presente. Esse tipo de ideia foi explorada nos artigos [1] no qual a centralidade de Jordan é utilizada para determinar o vértice original de uma árvore gerada por meio de anexação uniforme e [6] no qual a ideia é generalizada para encontrar um conjunto maior de vértices iniciais. Esse tipo de estratégia se mostra eficiente por duas razões. A primeira é o fato de que os vértices mais centrais no sentido de Jordan são persistentes, isto é, o conjunto de tais vértices é constante a partir de um momento, como foi provado em [2]. E a segunda razão é que um processo de busca em profundidade nos permite calcular facilmente as centralidade de Jordan de todos os vértices de uma árvore em tempo linear, como demonstrado em [4].

Este artigo apresenta uma demonstração alternativa do teorema de Jordan [3]. O artigo supracitado, escrito em 1869, tem características que podem dificultar a sua leitura. Além do artigo estar em francês, a maneira como ele expressa a definição de grafo, a partir de forma quadrática, não é nada usual nos nossos dias, onde prevalece uma linguagem combinatorial na área. A demonstração do Jordan já foi reproduzida em outros textos, tais como [4] e [2]. Os três textos citados acima apresentam uma demonstração direta sem um desenvolvimento muito profundo da teoria que permeia a construção. Já no presente texto, são apresentadas proposições intermediárias que são de grande importância, tanto para se obter uma intuição com respeito ao resultado, quanto no desenvolvimento de aplicações, como é o caso dos teoremas relacionados com arqueologia de redes, vide [1] e [6]. Além disso, este artigo une ideias de vários outros textos que permitem uma visão mais ampla do assunto.

2 Centralidade de Jordan

Nós iniciaremos introduzindo a noção de centralidade em árvores, assim como os modelos probabilísticos de árvores aleatórias crescentes que estudaremos neste texto.

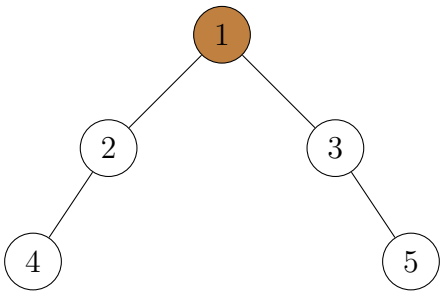
2.1 Árvore com raiz e árvore baixada

Uma *árvore* $T = (V(T), E(T))$ é um grafo conexo sem ciclos. Dada T uma árvore e $u \in V(T)$, a *vizinhança* do vértice u é definida como sendo o conjunto dos vértices vizinhos de u. Em símbolos,

$$N(u) = \{v \in V(T) : u \sim v\}.$$

Definição 2.1. Uma *árvore com raiz* é um par (T, u), onde T é uma árvore e $u \in V(T)$.

Exemplo 2.1 (Grafo enraizado)**.** Abaixo temos a representação de uma árvore cuja a raiz é o vértice 1.

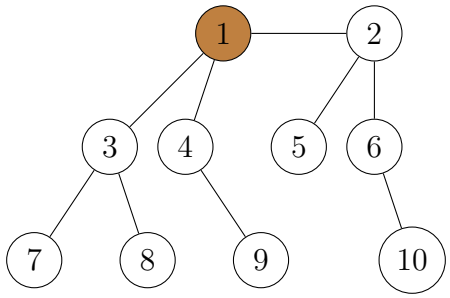


Um fato importante e bastante conhecido de árvores é que dados dois vértices numa árvore u e v, existe um único caminho ligando u e v.

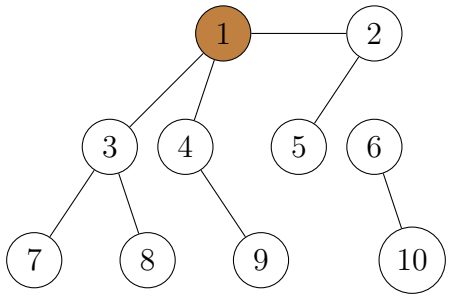
Definição 2.2. Sejam (T, u) uma árvore com raiz e $v \in V(T)$. A *subárvore baixada de* v em (T, u), denotada por $(T, u)_{v\downarrow}$, é a componente conexa de v que se obtém removendo a aresta wv de T, onde w é o vizinho de v, no único caminho (fechado) ligando u a v.

Intuitivamente, é a subávore que começa de v e se distancia de u. Diremos também que $(T, u)_{u\downarrow}$ é a própria árvore T.

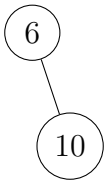
Exemplo 2.2. Considere a árvore $(T, 1)$



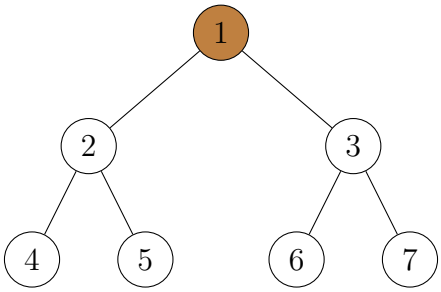
Removendo a aresta que liga o vértice 2 ao vértice 6, temos as duas componentes conexas:



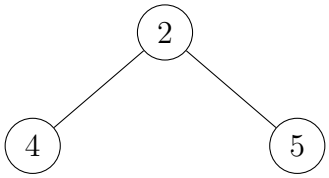
Assim, a árvore $(T, 1)_{6\downarrow}$ é dada por



Exemplo 2.3. Considere a árvore com raiz $(T, 1)$ abaixo

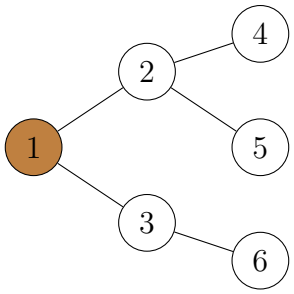


Temos que $(T, 1)_{2\downarrow}$ é a árvore



Definição 2.3. Seja T uma árvore, $H \subset T$ uma subárvore e $v \in V(T)$. Dizemos que, v é *vizinho* de H, denotando $v \sim H$, se existe $u \in V(H)$ com $u \sim v$.

Exemplo 2.4. Seja $(T, 1)$ a árvore enraizada abaixo



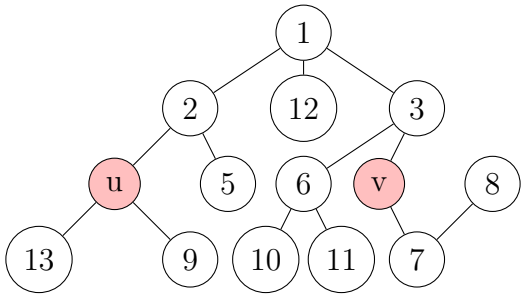
Sendo $H = (T, 1)_{2\downarrow}$, temos $1 \sim H$, pois $1 \sim 2$ e $2 \in V(H)$.

Definição 2.4. Sejam $\hat{T}$ e $\tilde{T}$ duas árvores disjuntas de T, $u \in \hat{T}$ e $v \in \tilde{T}$ dois vértices tais que $u \sim v$. Definimos a soma de $\tilde{T}$ com $\hat{T}$ denotada por $\tilde{T} + \hat{T}$, como sendo a árvore T' tal que $V(T') = V(\hat{T}) \cup V(\tilde{T})$ e $E(T') = E(\hat{T}) \cup \{uv\} \cup E(\tilde{T})$.

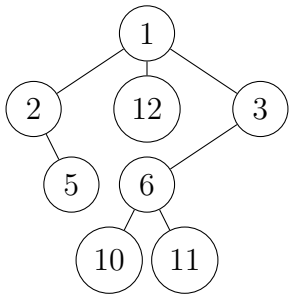
Definição 2.5. Seja $u, v \in V(T)$. Diremos que $P(u, v)$ é o caminho aberto ligando u a v, ou seja, é o caminho ligando u, v, porém sem conter u e v.

Definição 2.6. Dados uma árvore T e $u, v \in V(T)$. Definimos o *tronco* que liga u e v, $T_r(u, v)$, como sendo o conjunto dos vértices $w \in V(T)$ tais que u não está no caminho ligando v a w e v não está no caminho ligando u a w.

Exemplo 2.5. Considere T a árvore abaixo



Temos que $T_r(u, v)$ é dado por



Sendo determinado pelo conjunto $V(T_r(u,v)) = \{1,2,3,5,6,10,11,12\}$.

Proposição 1. *Seja T uma árvore e $u, v \in V(T)$. Podemos escrever $T = (T,u)_{v\downarrow} + (T,v)_{u\downarrow} + T_r(u,v)$*

Demonstração. Veja que, se $v \in V((T,u)_{v\downarrow})$ então $v \in V(T)$, se $v \in V((T,v)_{u\downarrow})$ então $v \in V(T)$ e finalmente se $v \in V(T_r(u,v))$ então $v \in V(T)$. Logo a soma deles estará em T. Agora, mostraremos que dado um vértice arbitrário em da árvore T, ele estará na árvore $(T,u)_{v\downarrow} + (T,v)_{u\downarrow} + T_r(u,v)$. Sejam $w \in V(T)$, $P(w,v)$ o caminho que liga w a v e $P(w,u)$ o caminho que liga w a v.

1. Se $u \notin P(w,v)$ e $v \notin P(w,u)$. Então, o caminho $w \in P(u,v) \subset T_r(u,v)$;
2. Se $u \notin P(w,v)$, então $P(v,w) \subset P(u,w)$. Assim, $(T,v)_{u\downarrow}$ contém w.
3. Se $u \in P(w,v)$, então $P(u,w) \subset P(v,w)$. Assim, $(T,u)_{v\downarrow}$ contém w.

□

Corolário 1. *Sejam T uma árvore e $u, v \in V(T)$, com $u \sim v$. Então $T = (T,u)_{v\downarrow} + (T,v)_{u\downarrow}$.*

Demonstração. Neste caso, como $u \sim v$, teremos $T_r(u,v)$ vazio. Logo, segue o resultado. □

2.2 Centralidade de Jordan

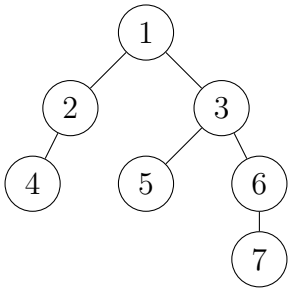
Dada uma árvore T, fixaremos a notação $|T| := |V(T)|$.

Definição 2.7. Seja T uma árvore, com $|V(T)| > 1$. A *centralidade* em T é a função $\psi_T : V(T) \to \mathbb{N}$ dada por

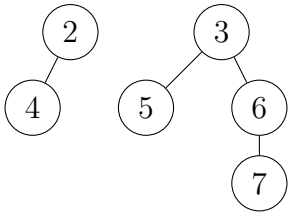
$$\psi_T(u) = \max_{v \in N(u)} |(T,u)_{v\downarrow}|, \tag{2.1}$$

Em palavras, $\psi_T(u)$ é o tamanho da maior subárvore de (T,u) baixada um vizinho de u.

Exemplo 2.6 (Centralidade de um vértice)**.** Considere a árvore T abaixo.



Vamos calcular a centralidade do vértice 1, i.e, $\psi_T(1)$. Observe que $N(1) = \{2, 3\}$ e que $(T, 1)_{2\downarrow}$ e $(T, 1)_{3\downarrow}$ são dadas por



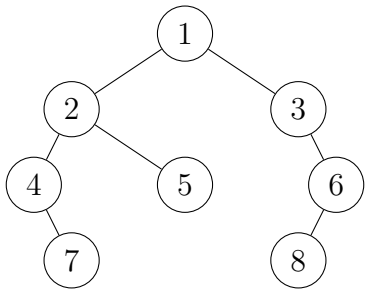
Veja que $|(T, 1)_{3\downarrow}| > |(T, 1)_{2\downarrow}|$. Como

$$\psi_T(1) = \max_{v \in N(1)} |(T, 1)_{v\downarrow}|,$$

segue que

$$\psi_T(1) = \max_{v \in N(1)} |(T, 1)_{v\downarrow}| = |(T, 1)_{3\downarrow}| = 4,$$

Exemplo 2.7 (Centralidade de uma folha)**.** Considere a árvore T dada por

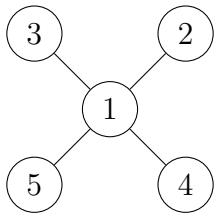


Calcularemos a centralidade do vértice 5, que é uma folha. Observe que $N(5) = \{2\}$, logo

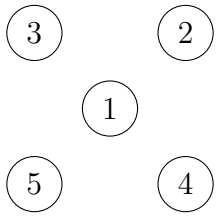
$$\psi_T(5) = \max_{v \in N(5)} |(T, 5)_{v\downarrow}| = |(T, 5)_{2\downarrow}| = 7.$$

No geral, podemos provar que dada uma árvore T com n vértices e u uma folha, $\psi_T(u) = n - 1$.

Exemplo 2.8 (Centralidade da estrela)**.** Observe a estrela



A priori, se quisermos calcular a centralidade da estrela, no caso o vértice 1, podemos olhar para o seguinte grafo



Veja que $|(T,1)_{v\downarrow}| = 1$ para qualquer $v \in N(1)$. Portanto $\psi_T(1) = 1$

Definição 2.8. Seja $v \in V(T)$ e dizemos que uma subárvore $T' \subset T$ *realiza a centralidade* de v se

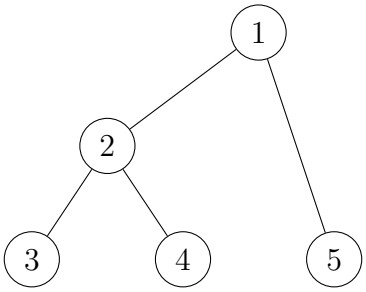
1. $v \sim T'$
2. $|T'| = \psi_T(v)$

Se a árvore que realiza a centralidade de um vértice v for única, a denotamos por $T^*(v)$. Neste caso, chamamos esta árvore de *árvore de Jordan de* v.

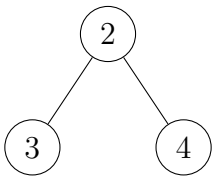
A grosso modo, a árvore que realiza a centralidade de v é a maior árvore baixada nos vizinhos de v. Observe que a diferença entre essa definição e a definição a de ψ é que aqui focaremos na árvore como um conjunto e na definição da ψ estamos focando em dizer qual o tamanho/cardinalidade desse conjunto.

Em certos casos, a árvore que realiza a centralidade é única, embora isso não ocorra sempre. Abaixo, apresentaremos dois exemplos, um em que a árvore é única e outro em que não é.

Exemplo 2.9. Considere a árvore T

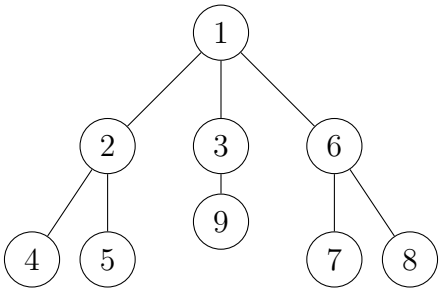


Note que a subárvore T' dada por



é a maior árvore tal que 1 se conecta. Logo T' é única árvore tal que $1 \sim T'$ e $|T'| = \psi_T(V)$.

Exemplo 2.10. Veja a seguinte árvore T



Assim como $|(T,1)_{2\downarrow}| = 3$, tem-se $|(T,1)_{6\downarrow}| = 3$. Daí $\psi_T(1) = 3$, mas não há somente uma árvore que realize sua centralidade.

Proposição 2 (Mudança da raiz)**.** *Sejam T uma árvore e $u, v \in V(T)$. Se $w \in V(T - (T,u)_{v\downarrow})$, então*

$$(T,u)_{v\downarrow} = (T,w)_{v\downarrow}$$

De modo geral, isso significa que se mudarmos a raiz para um vértice mais distante de onde a árvore é baixada, a árvore baixada continua a mesma.

Demonstração. Como $w \in V(T-(T,u)_{v\downarrow})$, teremos dois possíveis casos, ou $w \in (T,v)_{u\downarrow}$ ou $w \in T_r(u,v)$.

No primeiro caso, sejam P o caminho ligando w a v e P' o caminho ligando u a v. Observe que P necessariamente passa por u e por isso P' está contido em P. Logo existe um único $v_0 \in V(P) \cap V(P')$ tal que $v_0 \sim v$. Consequentemente removendo a aresta v_0v a componente conexa de v será a mesma independente tanto tomando u como referência quanto tomando w.

O segundo caso segue de modo análogo trocando os papéis de u com w.

□

Proposição 3. *Seja $v \in V(T)$ e $T' \subset T$ uma subárvore que realiza a centralidade de v. Se $u \in V(T)\backslash(V(T') \cup \{v\})$, então*

$$\psi_T(u) > \psi_T(v). \tag{2.2}$$

Demonstração. Como T' realiza a centralidade de v, $v \sim T'$ e $|T'| = \psi_T(v)$. Seja P o caminho que obtemos quando removemos u do caminho que liga u a v. Defina $\tilde{T} := (T,u)_{v\downarrow} + P$. Veja que $u \sim \tilde{T}$, além disso claramente $|\tilde{T}| > |T'|$. Portanto,

$$\psi_T(u) \geq |\tilde{T}| > |T'| = \psi_T(v).$$

□

Teorema 2.1 (Jog-Loh Lema 2.2 [2])**.** *Sejam T uma árvore e $u, v \in V(T)$. Se $\psi_T(u) = \psi_T(v)$, então*

$$|(T,u)_{v\downarrow}| = |(T,v)_{u\downarrow}|$$

Demonstração. Seja T' a árvore que realiza a centralidade de v. Se $u \notin V(T')$, então pela Proposição 3 segue que $\psi_T(u) > \psi_T(v)$, mas isso contradiz a nossa hipótese da igualdade das centralidades. Logo $u \in V(T')$. De modo análogo, v pertence a árvore que realiza a centralidade de u.

Defina T'' como a árvore que realiza a centralidade de u, mostraremos que $T' = T_r(u,v) + (T,v)_{u\downarrow}$ e $T'' = T_r(u,v) + (T,u)_{v\downarrow}$ donde poderemos concluir a igualdade que queremos.

Seja $w \in N(v)$ tal que $T' = (T,v)_{w\downarrow}$. Pelo Corolário 1, temos que $T = (T,v)_{w\downarrow} + (T,w)_{v\downarrow}$ e pela Proposição 2 (Mudança de raiz) segue que $T = (T,v)_{w\downarrow} + (T,u)_{v\downarrow}$. Além disso, pela Proposição 1 podemos escrever $T = (T,v)_{u\downarrow} + T_r(u,v) + (T,u)_{v\downarrow}$. Unificando as duas formas de escrita, teremos a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned}(T,v)_{w\downarrow} + (T,u)_{v\downarrow} &= (T,v)_{u\downarrow} + T_r(u,v) + (T,u)_{v\downarrow} \\ \Rightarrow (T,v)_{w\downarrow} &= T_r(u,v) + (T,v)_{u\downarrow}.\end{aligned}$$

Analogamente, existe $w' \in N(u)$ tal que podemos escrever $T'' = (T,u)_{w'\downarrow}$. Assim, chegando que $(T,u)_{w'\downarrow} = T_r(u,v) + (T,u)_{v\downarrow}$.

Por hipótese $|T'| = |T''|$, ou seja,

$$|T_r(u,v) + (T,v)_{u\downarrow}| = |T_r(u,v) + (T,u)_{v\downarrow}|.$$

Segue que,

$$|T_r(u,v)| + |(T,v)_{u\downarrow}| = |T_r(u,v)| + |(T,u)_{v\downarrow}|.$$

Por fim,

$$|(T,v)_{u\downarrow}| = |(T,u)_{v\downarrow}|.$$

□

Isso significa que olhar para as árvores máximas a partir de qualquer vértice é a mesma coisa que olharmos para árvores máximas em vizinhos de v.

Proposição 4. *Seja T uma árvore e $u \in V(T)$. Então*

$$\psi_T(u) = \max_{v \in V(T)} |(T,u)_{v\downarrow}|.$$

Demonstração. Mostraremos que nenhum $v \notin N(u)$ realiza a centralidade, logo o vértice que realiza a centralidade deve pertencer a $N(u)$. Com efeito, tome $v \notin N(u)$. Observe que qualquer vértice diferente de u deve estar numa subárvore baixada de um vizinho de u, isto é, existe $v_0 \in N(u)$ que satisfaz $v \in H := (T,u)_{v_0\downarrow}$. Além disso, veja que dado $w \in (T,u)_{v\downarrow}$, existe um único caminho P que liga v_0 a w e esse caminho passa por v, logo $w \in P \subset H$. Assim, $(T,u)_{v\downarrow} \subset H$, daí $|H| > |(T,u)_{v\downarrow}|$.

□

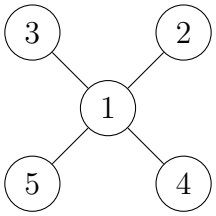
2.3 Centroide

Definição 2.9. Sejam T uma árvore e $u \in V(T)$. Dizemos que u é um *centroide* de T se

$$\psi_T(u) \leq \psi_T(v),$$

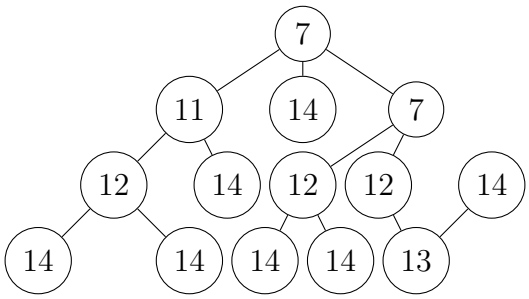
para todo $v \in V(T)$.

Exemplo 2.11 (Centroide de uma estrela)**.** Observe a seguinte estrela



Como calculamos anteriormente no Exemplo 2.2 a função ψ_T de cada vértice, concluímos que o centroide da estrela é o vértice 1.

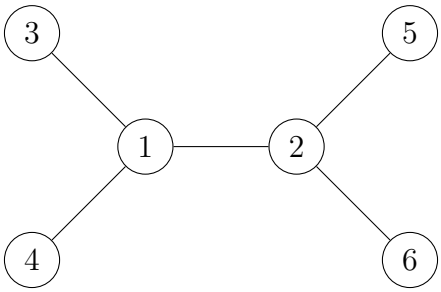
Exemplo 2.12. Considere a seguinte representação da árvore T, em que cada vértice está acompanhado de sua centralidade.



Definição 2.10. Para uma árvore T definimos $\mathcal{C}(T)$ como sendo o conjunto de centroides de T. Em símbolos,

$$\mathcal{C}(T) = \{v \in V(T) : v \text{ é centroide de } V(T)\}.$$

Exemplo 2.13. A seguir é possível ver uma árvore T com dois centroides:



Vemos que ambos os vértices 1 e 2 são tais que $\psi_T(1) = \psi_T(2) \leq \psi_T(v)$ tal que $v \in \{3, 4, 5, 6\}$. Portanto os vértices 1 e 2 são centroides.

Proposição 5. *Sejam v^* um centroide e $v \neq v^*$ um vértice qualquer. Então v^* pertence a árvore que realiza a centralidade de v.*

Demonstração. Suponha que v^* não pertence a árvore que realiza a centralidade de v, queremos concluir que v^* não é centroide. Veja que, pela Proposição 3, segue diretamente que $\psi_T(v^*) > \psi_T(v)$. Portanto v^* não pode ser centroide. Como queríamos demonstrar. □

Teorema 2.2 (Jordan)**.** *Se $v \notin \mathcal{C}(T)$, então $\psi_T(v) > n/2$. Em particular, existe uma única árvore que realiza a centralidade de v.*

Demonstração. Suponha $\psi_T(v) \leq n/2$, iremos concluir que $v \in \mathcal{C}(T)$. Considere $N(v) = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$, $T_i := (T, v)_{v_i\downarrow}$ e suponha sem perda de generalidade $T_1 = T^*(v)$. Tome $u \in V(T)$ um vértice qualquer. Por um lado, se $u \notin T_1$, então u não é um vértice da árvore que realiza a centralidade de v, logo pela Proposição 3 vale $\psi_T(u) > \psi_T(v)$. Por outro lado, se $u \in V(T_1)$, então $|(T, u)_{v\downarrow}| \geq n/2$. Veja que, pela Proposição 4, $\psi_T(u) \geq |(T, u)_{v\downarrow}|$. Além disso, como vale por hipótese $\psi_T(v) \leq n/2$, chegamos que $\psi_T(u) \geq \psi_T(v)$.

Como $\psi_T(v) \leq \psi_T(u)$ para todo $u \in V(T)$, concluímos que $v \in \mathcal{C}(T)$, como queríamos. □

Teorema 2.3 (Jordan)**.** *Para uma árvore T com n vértices. Valem as seguintes afirmações:*

1. *Se v^* é o centroide, então*

$$\psi_T(v^*) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

2. *T pode ter no máximo dois centroides. Se houver dois eles devem ser adjacentes.*

Demonstração. 1. Suponha que $\psi_T(v^*) > n/2$, e seja T^* a árvore de Jordan de v^*, queremos concluir que v^* não é centroide. Como T^* realiza a centralidade de v^*, existe um único vértice $v \in V(T^*)$ tal que $v \sim v^*$.

Seja T' a árvore que realiza a centralidade de v. Como $T = T^* \cup (T, v)_{v^*\downarrow}$, pela Proposição 5, devemos ter que $\psi_T(v) = |(T, v)_{v^*\downarrow}|$. Veja que $\psi_T(v) = |(T, v)_{v^*\downarrow}| \leq n/2 < \psi_T(v^*)$. Absurdo!

2. Suponha u^* e v^* centroides da árvore T. Pela Proposição 5, $v^* \in V(T^*(u^*))$ e $u^* \in V(T^*(v^*))$. Suponha que w^* seja um terceiro centroide. Como o centroide deve pertencer a árvore que realiza a centralidade dos outros dois, chegamos que $w^* \in V(T^*(v^*)) \cap V(T^*(u^*))$.

Observe que $T^*(u^*)$ contém v^* e w^*, e w^* está entre u^* e v^*. Assim, se $T^*(w^*) \supset P(v^*, w^*)$, então $T^*(w^*) \subset T^*(u^*)$, donde seguirá que $\psi_T(w^*) < \psi_T(u^*)$. Por outro lado,

se $T^*(w^*) \not\supset P(v^*, w^*)$, então $T^*(w^*) \supset P(u^*, w^*)$, donde seguirá que $\psi_T(w^*) < \psi_T(v^*)$. Ambos os casos contrariam a minimalidade da centralidade do centroide.

Pelo mesmo argumento, dado w um vértice qualquer $T_r(u^*, v^*)$, podemos provar que $\psi_T(w) < \psi_T(v^*)$ ou $\psi_T(w) < \psi_T(u^*)$, o que é um absurdo. Portanto, os centroides v^* e u^* devem ser adjacentes.

□

Corolário 2. *Seja T uma árvore com n vértices. Se u^* e v^* são dois centroides, então*

$$T^*(u^*) = (T, u^*)_{v^*\downarrow}, \text{ e } T^*(v^*) = (T, v^*)_{u^*\downarrow}.$$

Demonstração. Como u^* e v^* são centroides, eles devem ser adjacentes. Além disso, pela Proposição 5, cada centroide deve pertencer a árvore que realiza a centralidade do outro. Assim, o resultado segue. □

Corolário 3. *Seja T uma árvore com n vértices. Se T possui dois centroides u^* e v^*, então*

$$\psi_T(u^*) = \psi_T(v^*) = \frac{n}{2}.$$

Demonstração. Se $u^* \in \psi_T(v^*)$, $v^* \in \psi_T(u^*)$ e $u^* \sim v^*$. Então, $\psi(v^*) = (T, v^*)_{u^*\downarrow}$ e analogamente $\psi(v^*) = (T, v^*)_{u\downarrow}$. Pelo Proposição 1, temos

$$T = (T, u^*)_{v^*\downarrow} + (T, v^*)_{u^*\downarrow},$$

daí $|T| = |(T, u^*)_{v^*\downarrow}| + |(T, v^*)_{u^*\downarrow}|$ que implica

$$n = |(T, u^*)_{v^*\downarrow}| + |(T, v^*)_{u^*\downarrow}| = \psi(u^*) + \psi(v^*).$$

Observe que $\psi(v^*) = \psi(u^*)$, pois caso contrário ou v^* ou u^* não será centroide. Logo,

$$\psi(v^*) + \psi(v^*) = n \Rightarrow \psi(v^*) = \frac{n}{2}.$$

Portanto, conlcuimos que $\psi(u^*) = \psi(v^*) = n/2$. □

3 Algoritmo de busca em profundidade

Nesta seção apresentaremos um algoritmo para encontrar a o centro de Jordan de uma árvore qualquer. O algoritmo é baseado no processo de busca em profundidade. Este algoritmo foi apresentado por Kang-Ault no artigo "Some properties of a centroid of a

free tree".

A seguir, descreveremos um procedimento, denotado por $\texttt{A}(u)$, que será utilizado para determinar o centroide de uma árvore. Esse procedimento consiste em selecionar um vértice como raiz e calcular a quantidade de vértices descendentes a partir dessa raiz. Tal contagem é realizada por meio de uma busca em profundidade, na qual o algoritmo percorre a árvore até alcançar uma folha, e então retorna recursivamente, acumulando o número de descendentes de cada vértice ao longo do caminho de volta à raiz.

O procedimento é interrompido assim que encontra um vértice w tal que o número de seus descendentes é maior ou igual a $n/2$, sendo n o número total de vértices da árvore. Nesse caso, o vértice w é imediatamente identificado como o centroide e o procedimento retorna esse vértice.

Observe que o w obtido acima é realmente o centroide. Com efeito, ele é o primeiro cujo ramo de descendentes é $\geq n/2$. Pelo tamanho do ramo de descendentes, o ramo que contém o vértice pai deve ter tamanho $\leq n/2$. Por ele ser o primeiro com a propriedade destacada, todos os ramos de descendentes são $< n/2$. Assim, pelo Teorema de Jordan, w é o centroide.

Para definir o procedimento, consideramos as seguintes funções auxiliares:

- $\texttt{SUBNODEOF}(u)$: função (arbitrária) que retorna um vizinho não explorados de u;
- $\texttt{SUBNODE}(u)$: função que retorna o número de vizinhos ainda não explorados de u.

O algoritmo de busca em profundidade para encontrar o centroide é descrito a seguir:

Procedimento $\texttt{A}(u)$
Variável inteira: `contador`
Início

- `contador` $\leftarrow 1$
- **enquanto** $\texttt{SUBNODE}(u) > 0$ **e** `contador` $< n/2$ **faça**
  - `contador` $\leftarrow$ `contador` $+ \texttt{A}(\texttt{SUBNODEOF}(u))$
- **se** `contador` $\geq n/2$ **então**
  - `centroide` $\leftarrow u$

- **pare**
- **finalize**

- **retorne** (`contador`)

Fim

Agora, seja $N(T)$ o número de passos que um algoritmo de busca em profundidade precisa para visitar todos os vértices de uma árvore T e retornar ao ponto inicial. Mostraremos a seguir que $N(T) \leq 2|T| - 1$, o que garante que algoritmo da seção anterior encontra o centroide em no máximo $O(n)$ passos.

Proposição 6. *Seja T uma árvore com n vértices. Então, $NV(T) = 2n - 1$.*

Demonstração. A prova segue por indução. Se a árvore tem tamanho 1 o resultado é trivial. Suponha que para toda árvore de tamanho $< n$ o resultado valha, e considere uma árvore T com $|T| = n$. Seja $v \in V(T)$ e suponha que $d(v) = m$. Sejam $N(v) = \{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$, $T_i = (T, v)_{v_i\downarrow}$ e $n_i = |T_i|$. Observe que,

$$\begin{aligned} NV(T) &= 1 + \sum_{i=1}^{m} 1 + NV(T_i) \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{m} 1 + 2|T_i| - 1 \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{m} 2|T_i| \end{aligned}$$

Como $|T| = 1 + |T_1| + |T_2| + \cdots + |T_m|$, então $n - 1 = \sum |T_i|$. Daí,

$$NV(T) = 1 + 2n - 2 = 2n - 1$$

□

Referências

[1] Bubeck, Sébastien; Devroye, Luc; Lugosi, Gábor Finding Adam in random growing trees. Random Structures Algorithms **50** (2017), no. 2, 158-172.

[2] Jog, Varun; Loh, Po-Ling Persistence of centrality in random growing trees. Random Structures Algorithms **52** (2018), no. 1, 136-157.

[3] Jordan, Camille. Sur les assemblages de lignes. (French) J. Reine Angew. Math. **70** (1869), 185-190.

[4] Kang, Andy N. C.; Ault, David A. Some properties of a centroid of a free tree. Information Processing Lett. **4** (1975/76), no. 1, 18-20.

[5] Lin, Chiang and Shang, Jen-Ling Statuses and branch-weights of weighted trees. Czechoslovak Math. J. **59** (2009), no. 4, 1019-1025.

[6] Lugosi, Gábor; Pereira, Alan S. Finding the seed of uniform attachment trees. Electron. J. Probab. **24** (2019), Paper no. 18, 15 pp.

[7] Mitchell, Sandra L. Another characterization of the centroid of a tree. Discrete Math. **24** (1978), no. 3, 277-280.

[8] Shang, Jen-Ling. Branch-weight unique trees. Discuss. Math. Graph Theory **42** (2022), no. 2, 405-416.

[9] Shah, Devavrat, and Tauhid Zaman. Rumors in a network: Who's the culprit?. IEEE Transactions on information theory 57.8 (2011): 5163-5181.

Recebido em 24 de Abril de 2024
Revisado em 03 de Junho de 2025
Aceito em 05 de Agosto 2025