

GEOMETRIA DE UMA MÉTRICA EUCLIDIANA PERTURBADA

Newton Mayer Solórzano Chávez

Universidade Federal da Integração Latino-Americana (UNILA), Instituto Latino-Americano de Ciências da Vida e da Natureza (ILACVN),
nmayer159@gmail.com

Jonny Ardila

Universidade Federal da Integração Latino-Americana (UNILA), Instituto Latino-Americano de Ciências da Vida e da Natureza (ILACVN),
jonny.ardila@unila.edu.br

Víctor Arturo Martínez León

Universidade Federal da Integração Latino-Americana (UNILA), Instituto Latino-Americano de Ciências da Vida e da Natureza (ILACVN),
victor.leon@unila.edu.br

Junior Marcial Sosa Ramirez

Universidade Federal da Integração Latino-Americana (UNILA), Instituto Latino-Americano de Ciências da Vida e da Natureza (ILACVN),
jms.ramirez.2021@aluno.unila.edu.br

Resumo

O artigo aborda um modelo de geometria não euclidiana, onde o plano cartesiano é dotado de uma métrica euclidiana perturbada numa direção. Neste espaço, se estudam as Cônicas perturbadas.

Palavras-chave: métrica Randers; métrica Finsler; não Euclidiana; cônicas.

Abstract

The article approaches a model of non-Euclidean geometry, where the Cartesian plane is endowed with an Euclidean metric perturbed in one direction. In this space, perturbed Conics are studied.

Keywords: Randers metric; Finsler metric; non-Euclidean; conics.

1 Introdução

Quem tiver interesse em se introduzir no mundo da geometria de Finsler inicialmente pode ficar agoniado pela abstração e pela abundância das notações. Este trabalho visa apresentar uma primeira leitura, amigável, usando uma métrica Randers no plano, que por sua vez é um caso particular das métricas de Finsler. O pré-requisito para uma leitura fluida deste trabalho é possuir conhecimentos básicos de geometria analítica, cálculo diferencial e integral.

As métricas randers foram estudadas primeiramente pelo físico G. Randers em 1941 desde o ponto de vista da relatividade geral [11]. Tempos depois estas métricas foram usadas na teoria do microscópico eletrônico por R. S. Ingarden em 1957, quem as nomeou de métricas randers pela primeira vez. É notório também, notar que as métricas randers têm uma relação estreita com os problemas de navegação de Zermelo (ver [1]). O problema de navegação de Zermelo, nomeado em homenagem ao matemático Ernst Zermelo, é um problema clássico na teoria dos jogos e na teoria do controle ótimo. Ele descreve uma situação em que um navio deve navegar do ponto P ao ponto P através de uma área com correntes marítimas variáveis. O objetivo é determinar a trajetória que minimize o tempo de viagem ou o consumo de combustível, levando em consideração as correntes marítimas que afetam a velocidade do navio. Em [1] os autores mostraram que as resoluções de problemas de navegação de Zermelo estão ligadas à obtenção de geodésicas de métricas Randers.

Estudos interessantes sobre geometria bidimensional com métricas não Euclidianas podem ser encontradas em [4, 5, 8, 12]. Em contraste destes trabalhos, neste artigo estudamos a geometria da métrica euclidiana usual perturbada, a qual coincide com uma métrica Randers, métrica inspirada pelo trabalho de [14], onde se obteve pela primeira vez uma superfície mínima num espaço de Finsler (\mathbb{R}^3, F) onde $F(x, y) = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2} + \varepsilon y_3$ com $x \in \mathbb{R}^3$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$. (Maiores detalhes em [14]).

As métricas Randers são um caso particular das métricas de Finsler (ver [13]), que, por sua vez, são uma generalização das métricas Riemannianas. Uma métrica Finsler $F = F(x, y)$ sobre $U \subset \mathbb{R}^n$, onde $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^3$, é dita *projetivamente flat*, se todas as suas geodésicas são linhas retas. Sabe-se que uma métrica Finsler $F = F(x, y)$ sobre $U \subset \mathbb{R}^2$ é *projetivamente flat* se, e somente se, F satisfaz a seguinte equação de Hamel (ver página 22 em [7]),

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial y_1} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial y_2}. \quad (1.1)$$

Uma vez obtida a distância perturbada na Eq. (3.1) induzida pela Eq. (2.1), algumas questões de geometria plana surgem naturalmente, como, por exemplo, qual

a equação da circunferência perturbada?, qual a fórmula de distância de ponto a reta e vice-versa?, como são os lugares geométricos da parábola, elipse e hipérbole ε -perturbadas?. Na seção 3, obtemos a fórmula de distância ε -perturbada de ponto a ponto, com isto, na seção 4 obtemos as equações de circunferências ε -perturbadas. Usando os critérios da primeira e segunda derivada, na seção 5 obtemos fórmulas de distância de ponto a reta e vice-versa. Nas seções 6, 7 e 8, utilizando critérios geométricos (interseção de superfícies e plano) e algébricos, caracterizamos e classificamos as parábolas, elipses e hipérbolas ε -perturbadas.

2 Preliminares

Nesta seção, serão apresentadas algumas definições e resultados que facilitarão a compreensão do trabalho. A seguir \mathbb{R}^2 denotará o plano cartesiano que é o conjunto de pares ordenados (x_1, x_2) , onde $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Definição 2.1 (Produto interno e norma euclidiana em \mathbb{R}^2). Sejam $x = (x_1, x_2)$ e $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ pontos de \mathbb{R}^2 , o *produto interno euclidiano* entre x e \tilde{x} , denotado por $\langle x, \tilde{x} \rangle$, é o número definido por:

$$\langle x, \tilde{x} \rangle = x_1\tilde{x}_1 + x_2\tilde{x}_2.$$

A *norma euclidiana* de x , denotada por $\|x\|$ é definida por:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Definição 2.2 (Curva diferenciável parametrizada regular em \mathbb{R}^2). Uma *curva parametrizada* em \mathbb{R}^2 é uma aplicação $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida em um intervalo I de \mathbb{R} . Uma curva parametrizada α é chamada *diferenciável de classe C^k* se α for de classe C^k para algum $k \in \mathbb{N}^*$, isto é, cada coordenada de α é de classe C^k (ver p. 104 em [9]). Dizemos que uma curva parametrizada é *suave* se é de classe C^k para todo $k \in \mathbb{N}^*$. Uma curva parametrizada diferenciável α é chamada *regular* em I se $\alpha'(t) \neq (0, 0)$ para todo $t \in I$.

Para a seguinte definição, consideremos que a curva possua primeira derivada que seja contínua, isto é, a curva é de classe C^1 .

Definição 2.3 (Comprimento de arco em \mathbb{R}^2). Seja $\alpha :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada regular de classe C^1 . A função *comprimento de arco* de α é definida por:

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(\tau)\| d\tau,$$

onde $t_0 \in]a, b[$ é dado.

Neste caso, observe que, pelo Teorema Fundamental do Cálculo (ver Teorema 1 na p. 137 em [9]), tem-se:

$$s'(t) = \|\alpha'(t)\| \neq 0.$$

Definições formais da métricas Riemannianas podem ser encontrados em [3, 2]. Para nosso propósito, restringimos tais definições sobre $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ de tal forma que seja suficiente para o desenvolvimento do presente trabalho.

Definição 2.4 (Métrica Riemanniana). Para cada $i = 1, 2$ e $j = 1, 2$, sejam $a_{ij} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funções diferenciáveis tais que a matriz $[a_{ij}(x)]_{2 \times 2}$ seja simétrica e positiva definida para todo $x \in \Omega$. Dado $x \in \Omega$ e qualquer vetor $y_x = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, a quantidade

$$\alpha(x, y_x) = \sqrt{a_{11}(x)y_1^2 + 2a_{12}(x)y_1y_2 + a_{22}(x)y_2^2}$$

é chamada *métrica Riemanniana* sobre $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

A seguinte definição pode ser interpretada como uma perturbação de uma métrica Riemanniana α por uma aplicação (linear em y) $\beta(x, y) = b_1(x)y_1 + b_2(x)y_2$.

Definição 2.5 (Métrica Randers). Considere α uma métrica Riemanniana sobre Ω e $\beta(x, y) = b_1(x)y_1 + b_2(x)y_2$, com $b_1, b_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ funções diferenciáveis tais que:

$$\sqrt{a^{11}(x)[b_1(x)]^2 + [a^{12}(x) + a^{21}(x)]b_1(x)b_2(x) + a^{22}(x)[b_2(x)]^2} < 1,$$

onde $[a^{ij}(x)] = [a_{ij}(x)]^{-1}$, para todo $x \in \Omega$. Uma *métrica Randers* sobre $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, é uma função $F : \Omega \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$F(x, y_x) = \alpha(x, y_x) + \beta(x, y_x).$$

Maiores detalhes sobre as métricas Randers ver Capítulo 2 em [6].

Observação 2.6. Note que a norma dentro da integral na Definição 2.3 é aplicada sobre vetores tangentes $y(t) = (y_1(t), y_2(t)) = \alpha'(t)$. Isto nos motiva a definir uma nova forma de medir distâncias.

A seguinte definição pode ser interpretada como uma perturbação de uma norma euclidiana $\|\cdot\|$ por uma aplicação linear (em y_2) $\beta(x, y) = \varepsilon y_2$.

Definição 2.7 (Métrica ε -perturbada). Seja ε uma constante real com $0 \leq \varepsilon < 1$ e $y \in \mathbb{R}^2$. Definimos a *métrica ε -perturbada* sendo

$$F_\varepsilon(y) = \|y\| + \varepsilon \pi_2(y), \tag{2.1}$$

onde $\pi_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é a projeção na segunda coordenada.

Adotamos o nome de métrica ε -perturbada e não de norma ε -perturbada, pois na linguagem da geometria de Finsler esta F_ε é uma métrica Finsler. Mais do que isto, F_ε é uma classe especial das métricas Randers.

Como era de se esperar (ver, por exemplo, Definição 1.2.2 em [10]), F_ε definida na Eq. (2.1), satisfaz as propriedades da definição de métrica Finsler:

1. $F_\varepsilon(y) > 0$, para todo $y \neq 0$;
2. $F_\varepsilon(y)$ é de classe C^∞ para todo $y \neq 0$;
3. $F_\varepsilon(\lambda y) = \lambda F_\varepsilon(y)$, onde λ é qualquer número real positivo (positiva homogênea).
4. A Hessiana de $\frac{1}{2}F^2$, denotada por $[g_{ij}]$,

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & \partial^2 F^2 \\ 2 & \partial y_i \partial y_j \end{bmatrix}$$

é positiva definida.

Definição 2.8. [Comprimento de arco ε -perturbada] Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular por partes. O comprimento de arco ε -perturbada de α é definido por:

$$\mathcal{L}_\varepsilon(\alpha) := \int_a^b F_\varepsilon(\alpha'(t)) dt,$$

onde F_ε é a função definida na Definição 2.7. Assim da Eq. (2.1) temos

$$\mathcal{L}_\varepsilon(\alpha) = \int_a^b [\|\alpha'(t)\| + \varepsilon \pi_2(\alpha'(t))] dt. \quad (2.2)$$

Para quaisquer pontos $P, Q \in \mathbb{R}^2$, definimos a distância ε -perturbada de P até Q induzida por F_ε , como:

$$d_\varepsilon(P, Q) := \inf_\alpha \mathcal{L}_\varepsilon(\alpha), \quad (2.3)$$

onde o ínfimo é tomado sobre o conjunto de todas as curvas regulares por partes α tais que $\alpha(a) = P$ e $\alpha(b) = Q$.

Observação 2.9. [Ver p. 14 em [6]] A quantidade $d_\varepsilon = d_\varepsilon(P, Q)$ é uma função não negativa sobre $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, e satisfaz:

- $d_\varepsilon(P, Q) \geq 0$. A igualdade é satisfeita se, e somente se, $P = Q$.

- $d_\varepsilon(P, Q) \leq d_\varepsilon(P, R) + d_\varepsilon(R, Q)$ para quaisquer $P, Q, R \in \mathbb{R}^2$.

Isso justifica a designação do nome da **distância ε -perturbada induzida por F_ε** para d_ε .

Exemplo 2.10. Sejam os pontos no plano $P = (-a, 0)$, $Q = (0, a)$ com $a > 0$ e as semicircunferências $\alpha(t) = a(\cos t, \sin t)$, $\beta(t) = \alpha(-t) = a(\cos t, -\sin t)$, para todo $t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, com sentidos anti-horário e horário, respectivamente. Então

$$\alpha'(t) = a(-\sin t, \cos t) \quad \text{e} \quad \beta'(t) = a(-\sin t, -\cos t).$$

Substituindo na fórmula de comprimento de arco na Eq. (2.2), temos,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\varepsilon(\alpha) &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} [\|\alpha'(t)\| + \varepsilon a \cos t] dt = a(\pi - 2\varepsilon), \\ \mathcal{L}_\varepsilon(\beta) &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} [\|\beta'(t)\| - \varepsilon a \cos t] dt = a(\pi + 2\varepsilon). \end{aligned}$$

Este exemplo nos indica que o comprimento de arco de uma curva pode depender da orientação da curva. E nos sugere que a distância induzida é não simétrica.

3 Geometria da métrica ε -perturbada

A seguir, usando a equação de Hamel na Eq. (1.1), obtemos a fórmula da distância perturbada induzida pela métrica dada na Eq. (2.1).

Teorema 3.1. Sejam P, Q pontos em \mathbb{R}^2 e ε uma constante com $0 \leq \varepsilon < 1$. A distância ε -perturbada de P até Q , induzida por F_ε definida na Eq. (2.3), é dada por

$$d_\varepsilon(P, Q) = \|Q - P\| + \varepsilon\pi_2(Q - P). \quad (3.1)$$

Demonstração. Notamos que a métrica F_ε definida na Eq. (2.1) satisfaz a equação de Hamel (1.1), logo, a distância $d_\varepsilon(P, Q)$ na Eq. (2.3) é atingida por uma linha reta. Considerando a curva $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\alpha(t) = tQ + (1 - t)P$ para todo $t \in [0, 1]$, temos que $\alpha'(t) = Q - P$. Logo, das equações (2.2) e (2.3) temos,

$$d_\varepsilon(P, Q) = \int_0^1 [\|Q - P\| + \varepsilon\pi_2(Q - P)] dt = \|Q - P\| + \varepsilon\pi_2(Q - P).$$

□

Observação 3.2. Por abuso de notação, considerando $Q - P$ um vetor e como sucede na literatura sob geometria euclidiana ($d(P, Q) = \|Q - P\|$), podemos notar que $d_\varepsilon(P, Q) = F_\varepsilon(Q - P)$.

Observação 3.3. Dado $\varepsilon > 0$ fixo no Teorema 3.1, temos que a distância ε -perturbada d_ε satisfaz as seguintes propriedades:

1. d_ε não é simétrica. De fato,

$$d_\varepsilon(P, Q) = \|Q - P\| + \varepsilon\pi_2(Q - P) \neq \|P - Q\| + \varepsilon\pi_2(P - Q) = d_\varepsilon(Q, P).$$

2. d_ε é invariante por translação. De fato, considere $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(A) = A + P_0$ onde $P_0 \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Tem se

$$\begin{aligned} d_\varepsilon(T(P), T(Q)) &= \|T(Q) - T(P)\| + \varepsilon\pi_2(T(Q) - T(P)) \\ &= \|Q - P\| + \varepsilon\pi_2(Q - P) = d_\varepsilon(P, Q). \end{aligned}$$

3. d_ε não é invariante por rotações devido à aplicação π_2 .

4. $d_\varepsilon(P, Q) + d_\varepsilon(Q, P) = \|Q - P\|$.

5. $d_\varepsilon(P, Q) - d_\varepsilon(Q, P) = 2\varepsilon\pi_2(Q - P)$.

Por outro lado, se $\varepsilon = 0$, então, como esperado, a distância d_0 coincide com a distância euclidiana usual.

4 Circunferências ε -perturbadas

Sendo a distância ε -perturbada não simétrica, temos duas interpretações para a noção de circunferência ε -perturbada, as quais chamaremos de tipo 1 e tipo 2.

Definição 4.1. Dados C um ponto em \mathbb{R}^2 e $r > 0$, definimos as *circunferências ε -perturbada de centro C e raio r* , como sendo o conjunto formado por todos os pontos $X \in \mathbb{R}^2$ tais que satisfazem uma das seguintes propriedades:

$$(C1) \quad d_\varepsilon(C, X) = r, \qquad (C2) \quad d_\varepsilon(X, C) = r.$$

O conjunto dos pontos verificando a propriedade (Ck) é chamado *circunferência ε -perturbada tipo k* , onde $k = 1, 2$. Denotaremos este conjunto por $\mathcal{C}_k[C; r]$.

Note que, pelo Teorema 3.1, temos

$$X \in \mathcal{C}_k[C; r] \iff \|X - C\| + (-1)^{k-1} \varepsilon \pi_2(X - C) = r.$$

Teorema 4.2. As circunferências ε -perturbadas tipo k de centro $C = (c_1, c_2)$ e raio $r > 0$, onde $k = 1, 2$, são caracterizadas por elipses euclidianas. Mais especificamente, $X = (x_1, x_2) \in \mathcal{C}_k[C; r]$ se, e somente se,

$$\frac{(x_1 - c_1)^2}{\left(\frac{r}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right)^2} + \frac{\left(x_2 + (-1)^{k-1} \frac{\varepsilon r}{1-\varepsilon^2} - c_2\right)^2}{\left(\frac{r}{1-\varepsilon^2}\right)^2} = 1. \quad (4.1)$$

Demonstração. Como a distância ε -perturbada é invariante por translação, basta considerar $C = (0, 0)$. Logo,

$$\begin{aligned} X = (x_1, x_2) \in \mathcal{C}_k[C; r] &\iff \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + (-1)^{k-1} \varepsilon x_2 = r \\ &\iff x_1^2 + x_2^2 = (r - (-1)^{k-1} \varepsilon x_2)^2 \\ &\iff x_1^2 + (1 - \varepsilon^2)x_2^2 + 2(-1)^{k-1} r \varepsilon x_2 = r^2 \\ &\iff \frac{x_1^2}{\left(\frac{r}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right)^2} + \frac{\left(x_2 + (-1)^{k-1} \frac{\varepsilon r}{1-\varepsilon^2}\right)^2}{\left(\frac{r}{1-\varepsilon^2}\right)^2} = 1. \end{aligned}$$

Observe que na segunda equivalência acima foi usado o fato que $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \pm \varepsilon x_2 \geq 0$ para quaisquer $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. \square

Observação 4.3. Note que na Eq. (4.1), temos que $\frac{r}{1-\varepsilon^2} > \frac{r}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$. Logo, o eixo maior destas elipses euclidianas estão sobre a reta vertical $x_1 = c_1$ cujos focos euclidianos são

$$C \text{ e } F_k = C + (-1)^k \frac{2\varepsilon r}{1-\varepsilon^2} (0, 1). \quad (4.2)$$

Logo, pelas equações (4.1) e (4.2), temos que $X = (x_1, x_2) \in \mathcal{C}_k[C; r]$ se, e só se,

$$\|X - C\| + \|X - F_k\| = \frac{2r}{1-\varepsilon^2} \text{ (ver Figuras 1a e 1b)}. \quad (4.3)$$

Assim, como consequência da Observação 4.3 temos o seguinte resultado:

Corolário 4.4. Sejam P, Q pontos de \mathbb{R}^2 e $r > 0$, então

$$d_\varepsilon(P, Q) = r \iff d_\varepsilon\left(Q, P - \frac{2\varepsilon r}{1 - \varepsilon^2}(0, 1)\right) = r.$$

Em outras palavras, a distância ε -perturbada de um foco até um ponto da elipse é igual à distância ε -perturbada do ponto da elipse até o outro foco da elipse euclidiana.

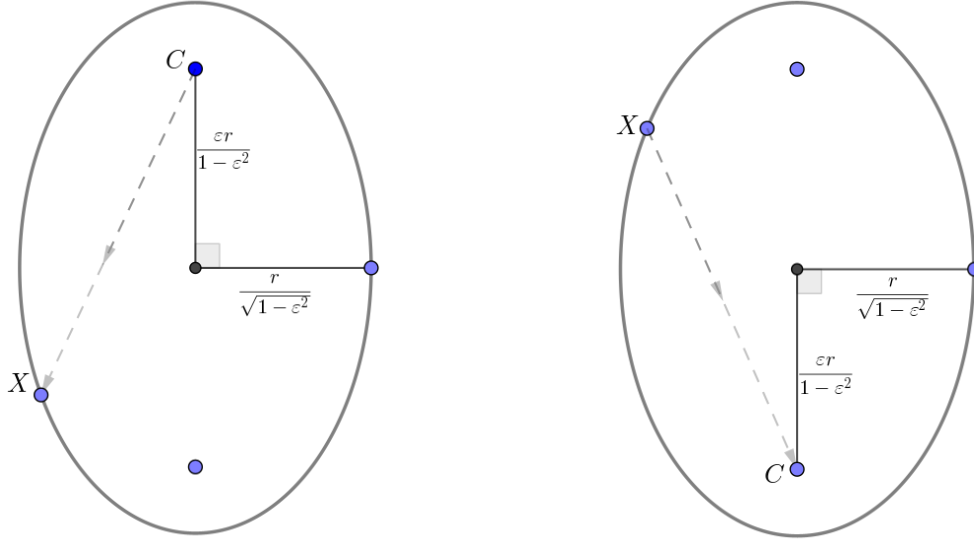
Demonstração. Utilizando a Eq. (4.3) obtemos:

$$d_\varepsilon(P, Q) = r \iff Q \in \mathcal{C}_1[P; r] \iff \|Q - P\| + \left\|Q - P + \frac{2\varepsilon r}{1 - \varepsilon^2}(0, 1)\right\| = \frac{2r}{1 - \varepsilon^2}$$

$$\iff \left\|P - \frac{2\varepsilon r}{1 - \varepsilon^2}(0, 1) - Q\right\| + \left\|P - \frac{2\varepsilon r}{1 - \varepsilon^2}(0, 1) - \left[Q - \frac{2\varepsilon r}{1 - \varepsilon^2}(0, 1)\right]\right\| = \frac{2r}{1 - \varepsilon^2}$$

$$\iff P - \frac{2\varepsilon r}{1 - \varepsilon^2}(0, 1) \in \mathcal{C}_2[Q; r] \iff d_\varepsilon\left(Q, P - \frac{2\varepsilon r}{1 - \varepsilon^2}(0, 1)\right) = r.$$

□



(a) $\mathcal{C}_1[C; r] : d_\varepsilon(C, X) = r.$

(b) $\mathcal{C}_2[C; r] : d_\varepsilon(X, C) = r.$

Figura 1: Circunferências ε -perturbadas.

5 Distância de ponto a reta e vice-versa

Definição 5.1. Definimos as *distâncias ε -perturbadas*, $d_\varepsilon(P, s)$, de ponto P a reta s e $d_\varepsilon(s, P)$, da reta s ao ponto P , respectivamente, por:

$$d_\varepsilon(P, s) := \min\{d_\varepsilon(P, P'); P' \in s\} \quad \text{e} \quad d_\varepsilon(s, P) := \min\{d_\varepsilon(P', P); P' \in s\}.$$

Dizemos que o ponto $P^* \in s$ realiza a *distância ε -perturbada de P até s ou de s até P* , se

$$d_\varepsilon(P, P^*) = d_\varepsilon(P, s) \quad \text{ou} \quad d_\varepsilon(P^*, P) = d_\varepsilon(s, P).$$

Para a obtenção das fórmulas das distâncias $d_\varepsilon(P, s)$ e $d_\varepsilon(s, P)$, estudaremos o caso em que s é uma reta vertical e oblíqua.

Proposição 5.2. Sejam $0 \leq \varepsilon < 1$, $P \in \mathbb{R}^2$ e a reta $s : x_1 = c$ então

$$d_\varepsilon(s, P) = d_\varepsilon(P, s) = |c - \pi_1(P)|\sqrt{1 - \varepsilon^2},$$

onde $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é a projeção na primeira coordenada.

Demonstração. Como d_ε é invariante por translações, podemos considerar $\bar{P} = (0, 0)$ e a reta vertical $s' : x_1 = \bar{c}$. Denotemos $r = d_\varepsilon(\bar{P}, s')$ e definamos a seguinte função

$$f(y) = d_\varepsilon(\bar{P}, (\bar{c}, y)) = \sqrt{\bar{c}^2 + y^2} + \varepsilon y, \quad y \in \mathbb{R}$$

de classe C^∞ em \mathbb{R} . Para encontrar r , precisamos encontrar o valor mínimo de f . Logo,

$$f'(y) = \frac{y}{\sqrt{\bar{c}^2 + y^2}} + \varepsilon \quad \text{e} \quad f''(y) = \frac{\bar{c}^2}{(\bar{c}^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Agora vamos encontrar o ponto crítico de f :

$$0 = f'(y) \iff \frac{y}{\sqrt{\bar{c}^2 + y^2}} + \varepsilon = 0 \iff y = -\frac{\varepsilon|\bar{c}|}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}.$$

Vamos denotar $y_0 = -\frac{\varepsilon|\bar{c}|}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$ o único ponto crítico de f e como $f''(y_0) > 0$ temos que $y_0 = -\frac{\varepsilon|\bar{c}|}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$ realiza o valor mínimo de f . Daí,

$$r = f(y_0) = |\bar{c}|\sqrt{1 - \varepsilon^2}.$$

Portanto, temos que

$$\frac{r}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = |\bar{c}|,$$

logo,

$$d_\varepsilon(\bar{P}, s') = |\bar{c}|\sqrt{1-\varepsilon^2}.$$

O caso geral é obtido quando $\bar{c} = c - \pi_1(P)$. Analogamente,

$$d_\varepsilon(s, P) = |c - \pi_1(P)|\sqrt{1-\varepsilon^2}.$$

□

Observação 5.3. Pela Observação 4.3 os pontos onde são atingidos as distâncias da Proposição 5.2 coincidem com o co-vértice das elipses euclidianas geradas na Observação 4.3. Isto é, $P^* = (c - \pi_1(P), -\frac{\varepsilon r}{1-\varepsilon^2})$ para o caso $d_\varepsilon(P, s)$, e $P^* = (c - \pi_1(P), \frac{\varepsilon r}{1-\varepsilon^2})$ para o caso $d_\varepsilon(s, P)$.

Por outro lado, para a obtenção das distâncias $d_\varepsilon(P, s)$ e $d_\varepsilon(s, P)$, onde s é não vertical, usamos novamente os critérios da primeira e segunda derivada.

Teorema 5.4. Sejam $0 \leq \varepsilon < 1$, $P = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ e a reta $s : x_2 = mx_1 + n$ então

$$d_\varepsilon(P, s) = \frac{|\bar{n}|\sqrt{1+m^2(1-\varepsilon^2)} + \varepsilon\bar{n}}{1+m^2}, \quad (5.1)$$

$$d_\varepsilon(s, P) = \frac{|\bar{n}|\sqrt{1+m^2(1-\varepsilon^2)} - \varepsilon\bar{n}}{1+m^2}, \quad (5.2)$$

onde $\bar{n} = mp_1 + n - p_2$. Em particular, se $P = (0, 0)$ então $\bar{n} = n$. E se $\varepsilon = 0$ temos a distância euclidiana usual de ponto a reta.

Demonstração. Procedendo como na Proposição 5.2, calculamos $d_\varepsilon(P, s) = d_\varepsilon((0, 0), s')$, onde $s' : x_2 = mx_1 + \bar{n}$. Assim, basta definir a função

$$f(x_1) = \sqrt{x_1^2 + (mx_1 + \bar{n})^2} + \varepsilon(mx_1 + \bar{n}) = \sqrt{(1+m^2)x_1^2 + 2m\bar{n}x_1 + \bar{n}^2} + \varepsilon(mx_1 + \bar{n}),$$

de classe C^∞ em \mathbb{R} . O valor mínimo de f é encontrado em

$$x_1^0 = -\frac{m\bar{n}}{1+m^2} - \frac{\varepsilon m|\bar{n}|}{(1+m^2)\sqrt{1+(1-\varepsilon^2)m^2}}.$$

Assim,

$$d_\varepsilon((0, 0), s') = f(x_1^0) = \frac{|\bar{n}|\sqrt{1+(1-\varepsilon^2)m^2} + \varepsilon\bar{n}}{1+m^2}.$$

□

Observação 5.5. No Teorema 5.4 o ponto $P^* \in s$ onde $d_\varepsilon(P, s)$ é atingida é $P^* = (x_1^0, mx_1^0 + \bar{n}) + P$, onde,

$$x_1^0 = -\frac{m\bar{n}}{1+m^2} - \frac{\varepsilon m|\bar{n}|}{(1+m^2)\sqrt{1+(1-\varepsilon^2)m^2}}.$$

E o ponto $P^* \in s$ onde $d_\varepsilon(s, P)$ é atingida é $P^* = (x_1^0, mx_1^0 + \bar{n}) + P$, onde,

$$x_1^0 = -\frac{m\bar{n}}{1+m^2} + \frac{\varepsilon m|\bar{n}|}{(1+m^2)\sqrt{1+(1-\varepsilon^2)m^2}}.$$

Note que $\bar{n} = -1$ se, e somente se $-\bar{n} = p_2 - (mp_1 + n) > 0$. Então podemos dizer que $\bar{n} = -1$ se, e somente se, P encontra-se no lado de “cima” da reta $x_2 = mx_1 + n$ e $\bar{n} = 1$ se, e somente se, P encontra-se no lado “baixo” da reta $x_2 = mx_1 + n$.

Introduzindo a seguinte notação,

$$M_\pm = \frac{\text{sgn}(\bar{n})\sqrt{1+m^2(1-\varepsilon^2)} \pm \varepsilon}{1+m^2}, \quad (5.3)$$

onde sgn é a função sinal, no Teorema 5.4 temos que as fórmulas das equações (5.1) e (5.2) podem ser escritas como

$$d_\varepsilon(P, s) = \bar{n}M_+ \quad \text{e} \quad d_\varepsilon(s, P) = \bar{n}M_- \quad (5.4)$$

respectivamente. P^* da Observação 5.5, pode ser escrito como

$$P^* = \left(-\frac{M_\pm m|\bar{n}|}{\sqrt{1+m^2(1-\varepsilon^2)}}, -\frac{M_\pm m^2|\bar{n}|}{\sqrt{1+m^2(1-\varepsilon^2)}} + \bar{n} \right) + P \in s, \quad (5.5)$$

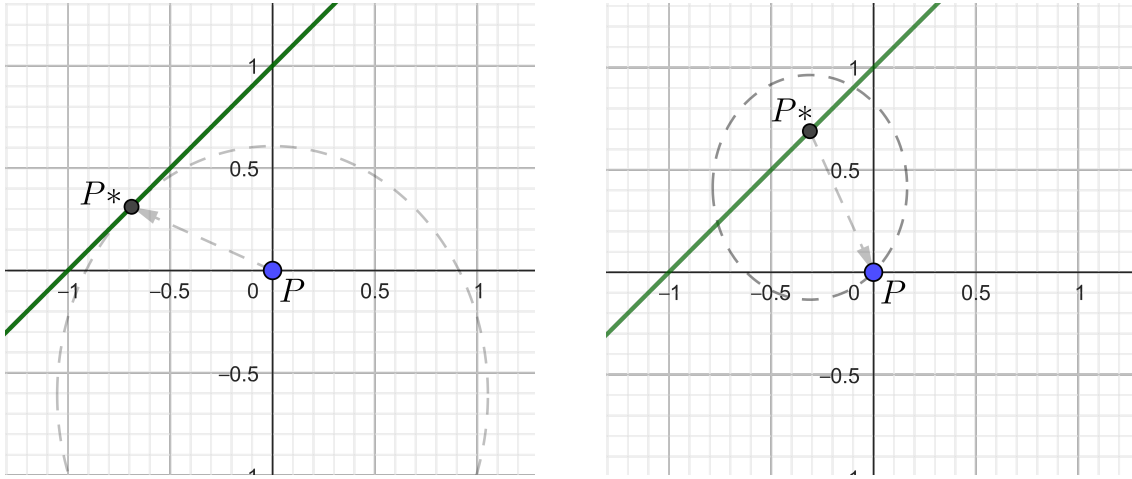
onde o sinal de “+” é para $d_\varepsilon(P, s)$ e o sinal de “-” é para $d_\varepsilon(s, P)$.

Exemplo 5.6. Sejam o ponto $P = (p_1, p_2) = (0, 0)$ e a reta $s : y = mx + n = 2x + 1$, das equações (5.3), (5.4) e (5.5) temos que

$$\bar{n} = n = 1, \quad M_+ = 0.91, \quad M_- = 0.41,$$

então

$$d_\varepsilon(P, s) = d_\varepsilon((0, 0), (-0.69, 0.31)) = 0.91 \quad \text{e} \quad d_\varepsilon(s, P) = d_\varepsilon((-0.31, 0.69), (0, 0)) = 0.41.$$



(a) $d_\varepsilon(P, s) = 0.91$.

(b) $d_\varepsilon(s, P) = 0.41$.

Figura 2: Distâncias ε -perturbadas de ponto a reta e vice-versa.

Observação 5.7. Note que

$$\sqrt{1 + m^2(1 - \varepsilon^2)} = \sqrt{\varepsilon^2 + (1 + m^2)(1 - \varepsilon^2)} > \pm\varepsilon$$

logo, $M_\pm \neq 0$, e mais do que isso,

$$\operatorname{sgn}(\bar{n})M_\pm = \frac{\sqrt{1 + m^2(1 - \varepsilon^2)} \pm \operatorname{sgn}(\bar{n})\varepsilon}{1 + m^2} > 0,$$

isto é $\operatorname{sgn}(\bar{n})$ e M_\pm possuem o mesmo sinal.

Observação 5.8. Fazendo $s : x_2 = m(x_1 - c)$ no Teorema 5.4, temos

$$\lim_{m \rightarrow \infty} d_\varepsilon(P, s) = |c - \pi_1(P)|\sqrt{1 - \varepsilon^2},$$

a qual, como esperado, coincide com o resultado da Proposição 5.2.

6 Parábolas ε -perturbadas

Como a distância ε -perturbada é não simétrica, é possível definir quatro tipos de parábolas ε -perturbadas.

Definição 6.1. Sejam $s \subset \mathbb{R}^2$ uma reta, chamada *reta diretriz*, e \mathcal{F} um ponto, chamado *foco*. Definimos as *parábolas ε -perturbadas*, com diretriz s e foco \mathcal{F} , como sendo o conjunto formado por todos os pontos $P \in \mathbb{R}^2$ tais que satisfazem uma das seguintes propriedades:

$$(P1) \quad d_\varepsilon(P, \mathcal{F}) = d_\varepsilon(P, s);$$

$$(P3) \quad d_\varepsilon(\mathcal{F}, P) = d_\varepsilon(P, s);$$

$$(P2) \quad d_\varepsilon(\mathcal{F}, P) = d_\varepsilon(s, P);$$

$$(P4) \quad d_\varepsilon(P, \mathcal{F}) = d_\varepsilon(s, P).$$

O conjunto dos pontos verificando a propriedade (Pk) será chamada *parábola ε -perturbada tipo k* sendo $k = 1, 2, 3, 4$.

Pela Observação 3.3, temos que a distância ε -perturbada é invariante por translações. Assim, para simplificar notações e contas, podemos considerar o foco \mathcal{F} sendo a origem.

Teorema 6.2. Sejam $\mathcal{F} = (0, 0)$ o foco e $s : x_2 = mx_1 + n$ a diretriz. Então, o lugar geométrico da parábola ε -perturbada

- tipo 1 é uma parábola euclidiana ou duas semirretas;
- tipo 2 é uma parábola euclidiana ou duas semirretas;
- tipo 3 é um ramo de hipérbole ou dois semirretas, ou um ramo de hipérbole e uma elipse euclidianas;
- tipo 4 é um ramo de hipérbole ou duas semirretas, ou um ramo de hipérbole e uma elipse euclidianas.

Demonstração. Tipo 1: Da definição da parábola tipo 1, temos que $P = (x_1, x_2)$ satisfaz

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \bar{n}M_+ + \varepsilon x_2, \quad (6.1)$$

onde $\bar{n} = mx_1 + n - x_2$ e

$$M_+ = \frac{\text{sgn}(\bar{n})\sqrt{1 + m^2(1 - \varepsilon^2)} + \varepsilon}{1 + m^2},$$

Note que o lado esquerdo da Eq. (6.1) representa o semi cone $z = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. (ver Figura 3a). E o lado direito da Eq. (6.1):

$$z = \bar{n}M_+ + \varepsilon x_2 = (mx_1 + n - x_2)M_+ + \varepsilon x_2 = mM_+x_1 + (\varepsilon - M_+)x_2 + nM_+,$$

representam dois semiplanos, um para cada lado do plano vertical $\bar{n} = 0$, pois M_+ depende do sinal de $\bar{n} = mx_1 + n - x_2$. (ver Figura 3b).

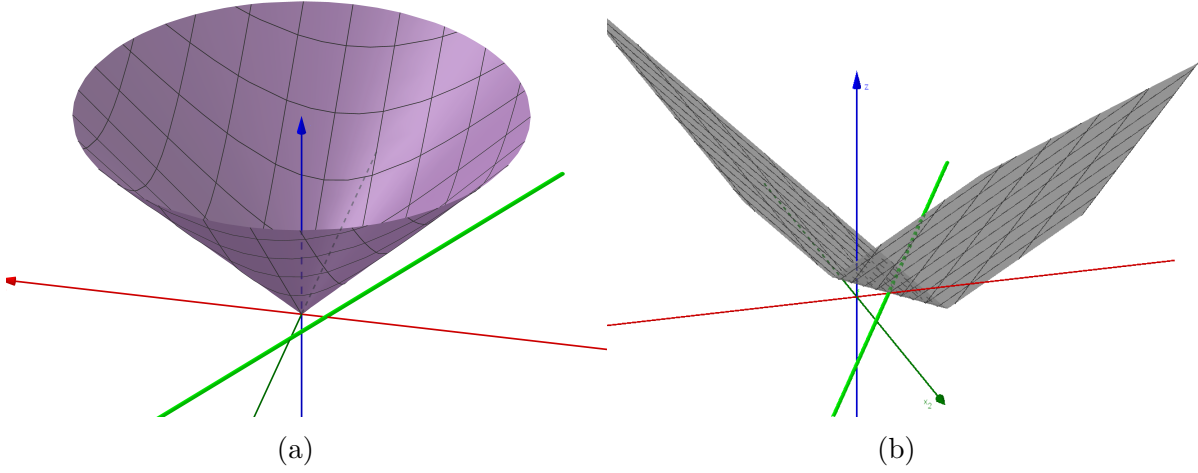


Figura 3: Semi-cone, reta diretriz e Semi-planos

Seja φ o ângulo entre os semiplanos e o eixo z . Considerando o vetor normal $\mathbf{N} = \mathbf{N}_{\text{sgn}(\bar{n})} = (-mM_+, M_+ - \varepsilon, 1)$, temos que $\cos \varphi = \frac{1}{\|\mathbf{N}\|}$, onde,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{N}\|^2 &= m^2M_+^2 + (M_+ - \varepsilon)^2 + 1 = (1 + m^2)M_+^2 - 2\varepsilon M_+ + 1 + \varepsilon^2 \\ &= (1 + m^2)\left(M_+ - \frac{\varepsilon}{1 + m^2}\right)^2 - \frac{\varepsilon^2}{1 + m^2} + 1 + \varepsilon^2 \\ &= (1 + m^2)\left(\frac{\text{sgn}(\bar{n})\sqrt{(1 + m^2)(1 - \varepsilon^2) + \varepsilon^2}}{1 + m^2}\right)^2 - \frac{\varepsilon^2}{1 + m^2} + 1 + \varepsilon^2 = 2. \end{aligned}$$

Portanto, $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Assim, este ângulo é independente do sinal de \bar{n} . Observe que se $n \neq 0$ a reta $\bar{n} = mx_1 + n - x_2 = 0 \wedge z = 0$ não contém a origem, logo o plano vertical $\bar{n} = 0$ gera dois semiespaços e só um deles contém o eixo z (ver Figura 3b). Assim, só um dos semiplanos intercepta o eixo z , portanto só este semi plano intercepta o semi cone. A interseção com o eixo z é em nM_+ e como \bar{n} e M_+ têm o mesmo sinal então

- Se $n > 0$ o semiespaço que contém o eixo z é $\bar{n} > 0$, logo o semiplano z com $M_+ > 0$ é quem intercepta o semi cone.
- Se $n < 0$ o semiespaço que contém o eixo z é $\bar{n} < 0$, logo o semiplano z com $M_+ < 0$ é quem intercepta o semi cone.

O fato de $\varphi = \frac{\pi}{4}$ implica que quando a interseção existir, ela será uma parábola ou, no caso, $n = 0$ os dois semiplanos são tangentes ao semi cone, o que geram duas semirretas partindo da origem. (Ver Figura 4).

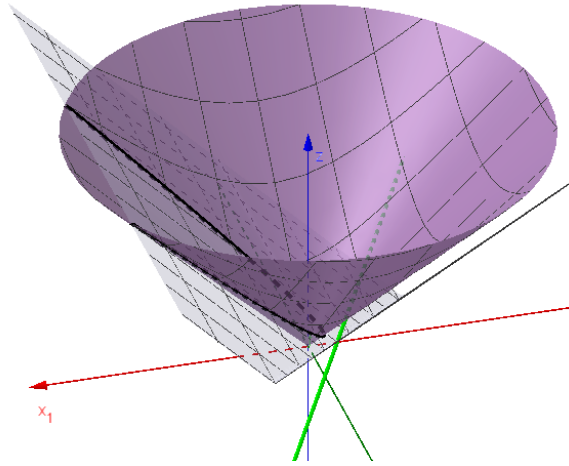


Figura 4: Parábola ε -perturbada tipo 1 como interseção de semi-cone e semi-plano.

Tipo 2: Da definição da parábola ε -perturbada tipo 2, temos que $d_\varepsilon(\mathcal{F}, P) = d_\varepsilon(s, P)$ é equivalente à

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = mM_-x_1 - (\varepsilon + M_-)x_2 + nM_-,$$

onde

$$M_- = \frac{\text{sgn}(\bar{n})\sqrt{1 + m^2(1 - \varepsilon^2)} - \varepsilon}{1 + m^2},$$

e $\bar{n} = mx_1 + n - x_2$. Como feito anteriormente para o Tipo 1, podemos considerar os vetores normais aos semiplanos

$$z = mM_-x_1 - (\varepsilon + M_-)x_2 + nM_-$$

sendo $\mathbf{N} = \mathbf{N}_{\text{sgn}(\bar{n})} = (-mM_-, \varepsilon + M_-, 1)$, com normas, iguais a $\sqrt{2}$. Assim, concluímos de maneira análoga ao caso anterior que a parábola tipo 2 é uma parábola euclidiana ou duas semirretas, pois o ângulo de inclinação do semi-plano que intercepta o semi-cone é $\pi/4$.

Tipo 3: Da definição da parábola tipo 3, temos,

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \bar{n}M_+ - \varepsilon x_2,$$

onde $\bar{n} = mx_1 + n - x_2$ e

$$M_+ = \frac{\text{sgn}(\bar{n})\sqrt{1 + m^2(1 - \varepsilon^2)} + \varepsilon}{1 + m^2}.$$

Como nos casos anteriores vamos considerar a interseção entre o semi-cone $z = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ e os semiplanos, um para cada lado do plano vertical $\bar{n} = 0$,

$$\begin{aligned} z &= \bar{n}M_+ - \varepsilon x_2 = (mx_1 + n - x_2)M_+ - \varepsilon x_2 \\ z &= mM_+x_1 - (\varepsilon + M_+)x_2 + nM_+, \end{aligned}$$

que, como no caso anterior, se $n \neq 0$, somente um dos semiplanos intercepta o eixo z . A linha que separa estes dois semi-planos é dada por

$$\begin{cases} \left(-\frac{n}{m}, 0, 0\right) + t(1, -m, -m), & t \in \mathbb{R}, & \text{se } m \neq 0 \\ \left(0, n, -\varepsilon n\right) + t(1, 0, 0), & t \in \mathbb{R}, & \text{se } m = 0. \end{cases} \quad (6.2)$$

Pode ser mostrado que não existe t tal que os pontos desta reta satisfazem a equação do semi-cone. Então, esta reta não intercepta o semi-cone.

Se φ é o ângulo entre os semiplanos e o eixo z , temos que $\cos \varphi = \frac{1}{\|\mathbf{N}\|}$, onde $\mathbf{N} = \mathbf{N}(\text{sgn}(\bar{n})) = (-mM_+, \varepsilon + M_+, 1)$. A norma de \mathbf{N} é dada por

$$\begin{aligned} \|\mathbf{N}\|^2 &= m^2M_+^2 + (\varepsilon + M_+)^2 + 1 = (m^2 + 1)M_+^2 + 2\varepsilon M_+ + 1 + \varepsilon^2 \\ &= (1 + m^2)\left(M_+ + \frac{\varepsilon}{1 + m^2}\right)^2 - \frac{\varepsilon^2}{1 + m^2} + 1 + \varepsilon^2 \\ &= \frac{\left(\text{sgn}(\bar{n})\sqrt{(1 + m^2)(1 - \varepsilon^2)} + \varepsilon^2 + 2\varepsilon\right)^2}{1 + m^2} - \frac{\varepsilon^2}{1 + m^2} + 1 + \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Se $\text{sgn}(\bar{n}) = 1$, temos que $\varphi \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, pois

$$\begin{aligned} \|\mathbf{N}\|^2 &= \frac{\left(\sqrt{(1 + m^2)(1 - \varepsilon^2)} + \varepsilon^2 + 2\varepsilon\right)^2}{1 + m^2} - \frac{\varepsilon^2}{1 + m^2} + 1 + \varepsilon^2 \\ \|\mathbf{N}\|^2 &> \frac{\left(\sqrt{(1 + m^2)(1 - \varepsilon^2)} + \varepsilon^2\right)^2}{1 + m^2} - \frac{\varepsilon^2}{1 + m^2} + 1 + \varepsilon^2 = 2 \\ \|\mathbf{N}\|^2 &> 2. \end{aligned}$$

Logo, a interseção do semi-plano com o semi-cone é um ramo de hipérbole se $n \neq 0$ (Ver Figura 5a) ou duas semirretas se $n = 0$.

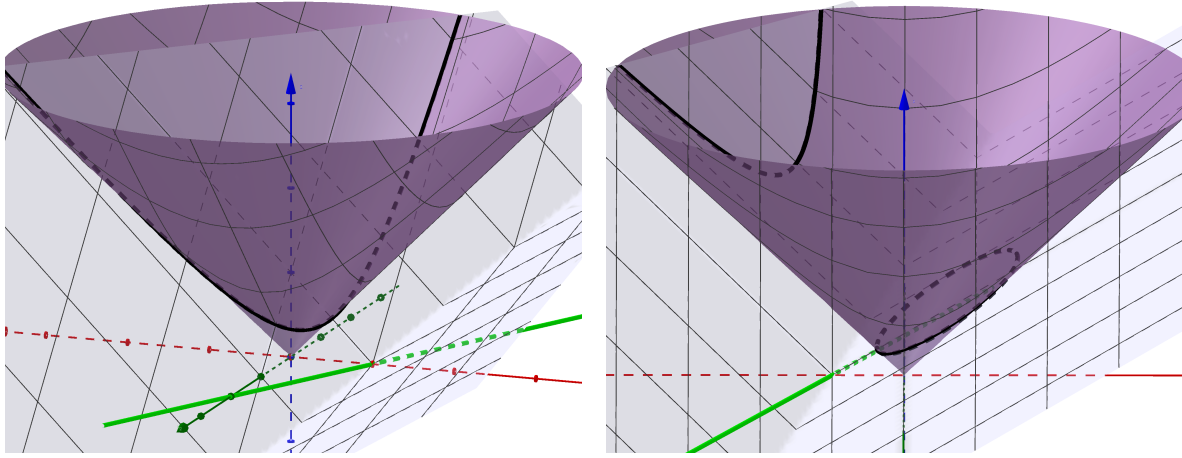
Se $\text{sgn}(\bar{n}) = -1$ (lembre-se que M_+ tem o mesmo sinal) temos

$$\begin{aligned}\|N\|^2 &= (m^2 + 1)M_+^2 + 2\varepsilon M_+ + \varepsilon^2 + 1 = M_+ \left(-\sqrt{(1+m^2)(1-\varepsilon^2)} + \varepsilon^2 + 3\varepsilon \right) + \varepsilon^2 + 1 \\ &< M_+ \left(-\sqrt{(1+m^2)(1-\varepsilon^2)} + \varepsilon^2 + \varepsilon \right) + \varepsilon^2 + 1 \\ &= \left(\frac{-\sqrt{(1+m^2)(1-\varepsilon^2)} + \varepsilon^2 + \varepsilon}{1+m^2} \right) \left(-\sqrt{(1+m^2)(1-\varepsilon^2)} + \varepsilon^2 + \varepsilon \right) + \varepsilon^2 + 1 \\ &= \frac{(1+m^2)(1-\varepsilon^2) + \varepsilon^2}{1+m^2} - \frac{2\varepsilon\sqrt{(1+m^2)(1-\varepsilon^2)} + \varepsilon^2}{1+m^2} + \frac{\varepsilon^2}{1+m^2} + \varepsilon^2 + 1 \\ &= 2 + \frac{2\varepsilon^2}{1+m^2} - \frac{2\varepsilon\sqrt{(1+m^2)(1-\varepsilon^2)} + \varepsilon^2}{1+m^2}.\end{aligned}$$

Daí, $\|N\|^2 < 2$. Logo, neste caso, $\varphi \in (0, \frac{\pi}{4})$, o que nos leva aos seguintes casos,

- Se $n \geq 0$ e $M_+ < 0$ não há interseção com o semi-cone
- Se $n < 0$ e $M_+ < 0$ a interseção com o semi-cone é uma elipse. (Ver Figura 5b)

O tipo 4 ($d_\varepsilon(P, \mathcal{F}) = d_\varepsilon(s, P)$) é análogo ao estudo do tipo 3. \square



(a) $\text{sign}(\bar{n}) = -1, n < 0$.

(b) $\text{sign}(\bar{n}) = 1, n \leq 0$.

Figura 5: Parábola ε -perturbada tipo 3.

Observação 6.3. No caso que a reta diretriz for da forma $s : x_1 = c$, igual que na Observação 5.8, substituindo n por $-cm$ na demonstração do Teorema 6.2, temos que a norma do vetor \mathbf{N} (quando $n \rightarrow \infty$) nos 4 casos é $\sqrt{2}$. O que nos leva a conclusão de que as interseções serão sempre parábolas euclidianas, ou duas semirretas.

As equações cartesianas da parábola ε -perturbada, quando a diretriz é inclinada, são dadas no seguinte teorema.

Teorema 6.4. Sejam $\mathcal{F} = (0, 0)$ o foco e $s : x_2 = mx_1 + n$ a diretriz. O lugar geométrico dos pontos $P = (x_1, x_2)$ da parábola ε -perturbada tipo k é uma parábola euclidiana e cuja equação é dada, por

$$Ax_1^2 + Bx_1x_2 + Cx_2^2 + Dx_1 + Ex_2 + F = 0,$$

onde, os coeficientes A, B, C, D, E e F para a parábola

1. tipo 1, são

$$\begin{aligned} A &= 1 - (mM_+)^2, & B &= 2mM_+(M_+ - \varepsilon), & C &= 1 - (M_+ - \varepsilon)^2, \\ D &= -2mnM_+^2, & E &= 2nM_+(M_+ - \varepsilon), & F &= -n^2M_+^2. \end{aligned}$$

2. tipo 2, são

$$\begin{aligned} A &= 1 - (mM_+)^2, & B &= 2mM_+(M_+ + \varepsilon), & C &= 1 - (M_+ + \varepsilon)^2, \\ D &= -2mnM_+^2, & E &= 2nM_+(M_+ + \varepsilon), & F &= -n^2M_+^2. \end{aligned}$$

3. tipo 3, são

$$\begin{aligned} A &= 1 - (mM_-)^2, & B &= 2mM_-(M_- + \varepsilon), & C &= 1 - (M_- + \varepsilon)^2, \\ D &= -2mnM_-^2, & E &= 2nM_-(M_- + \varepsilon), & F &= -n^2M_-^2. \end{aligned}$$

4. tipo 4, são

$$\begin{aligned} A &= 1 - (mM_-)^2, & B &= 2mM_-(M_- - \varepsilon), & C &= 1 - (M_- - \varepsilon)^2, \\ D &= -2mnM_-^2, & E &= 2nM_-(M_- - \varepsilon), & F &= -n^2M_-^2. \end{aligned}$$

Demonstração. Da definição da parábola tipo 1 ($d_\varepsilon(P, \mathcal{F}) = d_\varepsilon(P, s)$) e pela Observação 5.7, temos as seguintes equivalências,

$$\begin{aligned} &\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - \varepsilon x_2 = \bar{n}M_+ \\ \iff &x_1^2 + x_2^2 = \bar{n}^2M_+^2 + 2\varepsilon\bar{n}x_2M_+ + \varepsilon^2x_2^2 \\ \iff &x_1^2 + x_2^2 = (n^2 + m^2x_1^2 + x_2^2 + 2mnx_1 - 2mx_1x_2 - 2nx_2)M_+ + \varepsilon^2x_2^2 \\ &\quad + 2\varepsilon(nx_2 + mx_1x_2 - x_2^2)M_+. \end{aligned}$$

Reordenando os termos, temos o resultado para o tipo 1. Os outros casos seguem de maneira análoga. □

7 Elipses ε -perturbadas

Análogo à geometria euclidiana plana, definimos as elipses ε -perturbadas como sendo os lugares geométricos em \mathbb{R}^2 tais que a soma das distâncias entre estes pontos e os dois focos é constante. Como a distância ε -perturbada é não simétrica, é possível definir três tipos de elipses ε -perturbadas.

Definição 7.1. Sejam \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 pontos distintos que pertence à \mathbb{R}^2 , e a um número real positivo. Definimos uma *elipse ε -perturbada*, com focos \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 , como sendo o conjunto formado por todos os pontos $X \in \mathbb{R}^2$ tais que satisfazem uma das seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} (E1) \quad d_\varepsilon(\mathcal{F}_1, X) + d_\varepsilon(X, \mathcal{F}_2) &= 2a; & (E3) \quad d_\varepsilon(\mathcal{F}_1, X) + d_\varepsilon(\mathcal{F}_2, X) &= 2a; \\ (E2) \quad d_\varepsilon(X, \mathcal{F}_1) + d_\varepsilon(X, \mathcal{F}_2) &= 2a; \end{aligned}$$

O conjunto dos pontos verificando a propriedade (Ek) será chamada elipse ε -perturbada tipo k sendo $k = 1, 2, 3$.

Observação 7.2. O caso em que $d_\varepsilon(\mathcal{F}_2, X) + d_\varepsilon(X, \mathcal{F}_1) = 2a$ recai em $(E1)$, pois basta trocar os papéis de \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 .

Teorema 7.3. Seja $\mathcal{F}_1 = (f_1, f_2)$, $\mathcal{F}_2 = (g_1, g_2)$, e $X = (x_1, x_2)$. A elipse $(E1)$ é uma elipse euclidiana com focos \mathcal{F}_1 , \mathcal{F}_2 e o semieixo maior $a_\varepsilon = a + \frac{\varepsilon}{2}(f_2 - g_2)$.

Demonstração. Tomando a definição da elipse $(E1)$ temos

$$\begin{aligned} d_\varepsilon(\mathcal{F}_1, X) + d_\varepsilon(X, \mathcal{F}_2) &= 2a \\ \iff \|X - \mathcal{F}_1\| + \|X - \mathcal{F}_2\| + \varepsilon(x_2 - f_2 + g_2 - x_2) &= 2a \\ \iff \|X - \mathcal{F}_1\| + \|X - \mathcal{F}_2\| &= 2 \left(a + \frac{\varepsilon}{2}(f_2 - g_2) \right). \end{aligned}$$

□

Observação 7.4. Em particular, se o segmento que une os focos é paralelo ao eixo horizontal, a elipse $(E1)$ é equivalente a uma elipse euclidiana com o mesmo semieixo maior a .

7.1 Interpretação geométrica da elipse tipo $E2$ e $E3$

Usando o método análogo à demonstração do Teorema 6.2, podemos analisar as elipses $(E2)$ e $(E3)$ como sendo interseção entre duas superfícies. A seguir analisamos a elipse $(E2)$, pois a análise da elipse $(E3)$ é análogo.

Da definição da elipse ε -perturbada ($E2$) temos,

$$d_\varepsilon(X, \mathcal{F}_1) + d_\varepsilon(X, \mathcal{F}_2) = 2a$$

$$\sqrt{(x_1 - f_1)^2 + (x_2 - f_2)^2} + \sqrt{(x_1 - g_1)^2 + (x_2 - g_2)^2} = 2a - \varepsilon(f_2 + g_2 - 2x_2).$$

Neste caso, a elipse ε -perturbada tipo 2 é a interseção entre a seguinte superfície que vamos chamar de *filtro de café*

$$z = \sqrt{(x_1 - f_1)^2 + (x_2 - f_2)^2} + \sqrt{(x_1 - g_1)^2 + (x_2 - g_2)^2}$$

e o plano

$$z = 2\varepsilon x_2 + 2 \left(a - \varepsilon \left(\frac{f_2 + g_2}{2} \right) \right).$$

As curvas de nível do filtro de café são elipses com focos \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 , logo está definido para $z \geq \|\mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_1\|$. Lembrando que d_ε é invariante por translações, considerando $\mathcal{F}_1 = (f_1, f_2)$, $\mathcal{F}_2 = -\mathcal{F}_1$ temos que a Elipse ($E2$) é caracterizada pela interseção, do filtro de café

$$z = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2f_1x_1 - 2f_2x_2 + f_1^2 + f_2^2}$$

$$+ \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 2f_1x_1 + 2f_2x_2 + f_1^2 + f_2^2} \quad (7.1)$$

e o plano

$$z = 2\varepsilon x_2 + 2a. \quad (7.2)$$

Para entender melhor o filtro de café da Eq. (7.1) e sua interseção com o plano da Eq. (7.2), observe que, se intersectarmos a superfície com o plano $x_2 = \frac{f_2}{f_1}x_1$, $f_1 \neq 0$, gerado pela reta passando pelos focos, obtemos

$$\begin{cases} z = \sqrt{\frac{f_1^2 + f_2^2}{f_1^2}} (|x_1 - f_1| + |x_1 + f_1|) \\ x_2 = \frac{f_2}{f_1}x_1, \end{cases} \quad (7.3)$$

assim, para $|x_1| \geq |f_1|$ a Eq. (7.3) se reduz na reta

$$z = 2\sqrt{\frac{f_1^2 + f_2^2}{f_1^2}}x_1,$$

para $|x_1| \leq |f_1|$ a Eq. (7.3) se deriz ma reta

$$z = -2\sqrt{\frac{f_1^2 + f_2^2}{f_1^2}}x_1$$

e para $-|f_1| \leq x_1 \leq |f_1|$ a Eq. (7.3) se reduz na reta horizontal

$$z = 2\sqrt{f_1^2 + f_2^2} \text{ (ver Figura 6a).}$$

Considerando também a interseção dos planos

$$x_2 = \frac{f_2}{f_1}x_1 \text{ e } z = 2\varepsilon x_2 + 2a,$$

obtemos a reta

$$\begin{cases} z = 2\varepsilon \frac{f_2}{f_1}x_1 + 2a \\ x_2 = \frac{f_2}{f_1}x_1. \end{cases}$$

Repare que para $a \geq \sqrt{f_1^2 + f_2^2}$ ela intersecta duas das três retas anteriores.

Agora, se intersectarmos a superfície da Eq. (7.1) com o plano $x_2 = -\frac{f_1}{f_2}x_1$, $f_2 \neq 0$, gerado pela reta perpendicular à anterior. Substituindo $x_2 = -\frac{f_1}{f_2}x_1$ na Eq. (7.1) obtemos

$$z = 2\sqrt{\frac{f_1^2 + f_2^2}{f_2^2}}(x_1^2 + f_2^2)^{1/2}$$

$$1 = \frac{z^2}{4(f_1^2 + f_2^2)} - \frac{x_1^2}{f_2^2},$$

que é um ramo de hipérbole (porque $z > 0$) no plano $x_2 = -\frac{f_1}{f_2}x_1$ com assíntotas $z = \pm 2\sqrt{\frac{f_1^2 + f_2^2}{f_2^2}}x_1$. Neste caso a interseção dos planos $x_2 = -\frac{f_1}{f_2}x_1$, $f_2 \neq 0$ e $z = 2\varepsilon x_2 + 2a$ é a reta $z = -2\varepsilon \frac{f_1}{f_2}x_1 + 2a$ que para $a \geq \sqrt{f_1^2 + f_2^2}$ intersecta as duas assíntotas (logo a hipérbole) em alguns z positivos (Ver Figura 6b). Se $f_1 = 0$ ou $f_2 = 0$, intersectarmos com os planos $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$ e a análise é análoga.

Note também que a superfície da Eq. (7.1) é simétrica em relação aos planos considerados acima, pois suas curvas de nível são elipses.

Devido ao formato das interseções anteriores podemos intuir que a Elipse (E2) é uma curva fechada, pois caso contrário existiria alguma paralela à superfície da Eq. (7.1) tal que sua inclinação seja sempre menor ou igual ao do plano da Eq. (7.2) na mesma direção desta paralela (ver Figura 7).

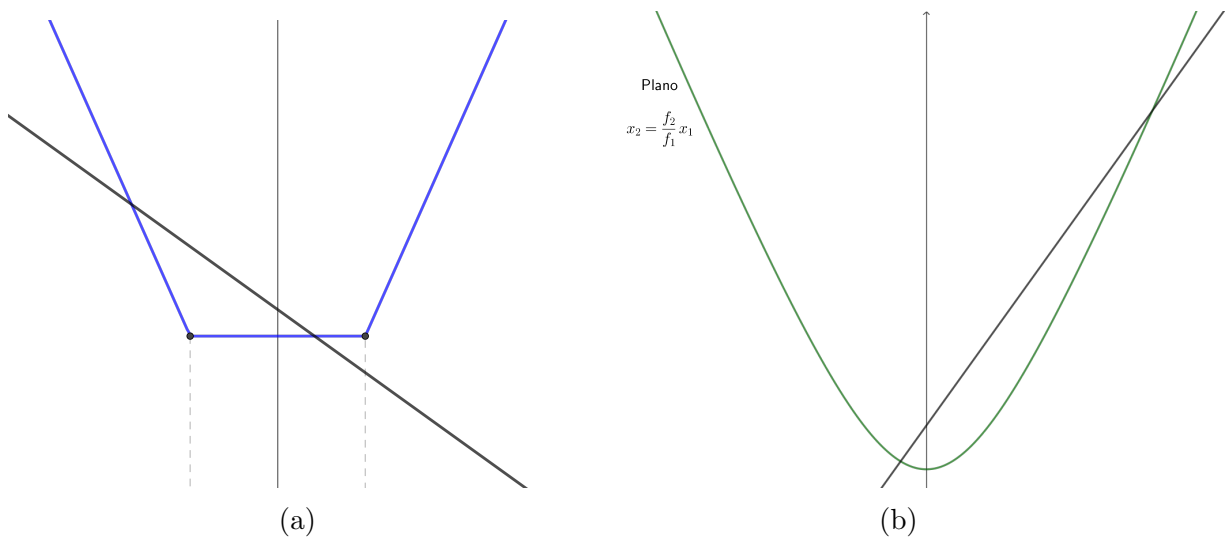


Figura 6: Interseção do filtro de café com planos.

Afirmção: A Elipse ($E2$) é uma curva fechada.

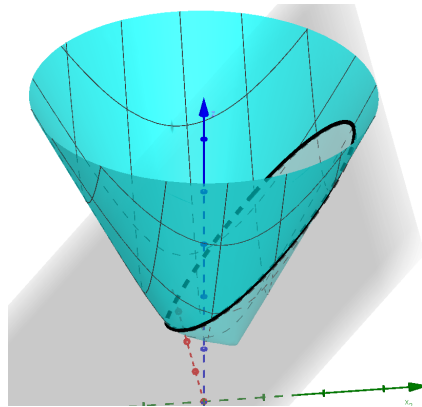


Figura 7: Elipse ($E2$) como interseção.

A interseção da superfície com o plano gerado pela reta $x_2 = mx_1$, isto é, substi-

tuindo $x_2 = mx_1$ nas equações (7.1) e (7.2) temos as seguintes funções,

$$g(x_1) = \sqrt{1+m^2} \left[\left(x_1 - \frac{f_1 + mf_2}{1+m^2} \right)^2 + \left(\frac{mf_1 - f_2}{1+m^2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ + \sqrt{1+m^2} \left[\left(x_1 + \frac{f_1 + mf_2}{1+m^2} \right)^2 + \left(\frac{mf_1 - f_2}{1+m^2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \\ l(x_1) = 2\epsilon mx_1 + 2a,$$

respectivamente. Procedemos a mostrar que a partir de um $x_1 > 0$, a inclinação de g será maior que a inclinação de l . A derivada de $g(x_1)$ é

$$g'(x_1) = \sqrt{1+m^2} \left[\frac{x_1 - \frac{f_1 + mf_2}{1+m^2}}{\left[\left(x_1 - \frac{f_1 + mf_2}{1+m^2} \right)^2 + \left(\frac{mf_1 - f_2}{1+m^2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} + \frac{x_1 + \frac{f_1 + mf_2}{1+m^2}}{\left[\left(x_1 + \frac{f_1 + mf_2}{1+m^2} \right)^2 + \left(\frac{mf_1 - f_2}{1+m^2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \right]$$

cujo limite $\lim_{x_1 \rightarrow \infty} g'(x_1) = 2\sqrt{1+m^2}$, logo, pela definição de limite, $\forall \epsilon_1 > 0 \exists N > 0$ tal que

$$2\sqrt{1+m^2} - \epsilon_1 < g'(x_1) < 2\sqrt{1+m^2} + \epsilon_1 \quad \text{para } x_1 > N. \quad (7.4)$$

Por outro lado, temos que $2\sqrt{1+m^2} > 2m > 2\epsilon m$ para $m > 0$ e $0 < \epsilon < 1$, Assim, se escolhermos ϵ_1 tal que $2\sqrt{1+m^2} - \epsilon_1 > 2\epsilon m$ na Eq. (7.4), obtemos

$$l'(x_1) = 2\epsilon m < 2\sqrt{1+m^2} - \epsilon_1 < g'(x_1) \quad \text{para } x_1 > N.$$

Podemos concluir que dado $m > 0$, após algum $x_1 > 0$ a inclinação da curva dada por $g(x_1)$ é maior que a inclinação da reta $l(x_1)$. Como $l(0) \geq g(0)$ para $a \geq \sqrt{f_1^2 + f_2^2}$ temos que elas vão se interceptar duas vezes. Para $m < 0$ usamos $\lim_{x_1 \rightarrow -\infty} g'(x_1) = -2\sqrt{1+m^2}$ e a análise é análogo. Para fazer $m \rightarrow \infty$ é necessário primeiro multiplicar e dividir por m a função $g(x_1)$ a fim de substituir mx_1 por x_2 e obtemos a função que vamos chamar $g(x_2)$, observe que o resultado é o mesmo que simplesmente interceptar a superfície com $x_1 = 0$,

$$g(x_2) = \left[(x_2 - f_2)^2 + f_1^2 \right]^{1/2} + \left[(x_2 + f_2)^2 + f_1^2 \right]^{1/2}$$

que temos que comparar com a reta $l(x_2) = 2\epsilon x_2 + 2a$ e repetindo o procedimento anterior chegamos à mesma conclusão.

Portanto, se existir interseção entre a Eq. (7.1) e Eq. (7.2), esta terá que ser uma curva fechada.

Afirmação: A Elipse ($E2$) não é parte de alguma cônica euclidiana. De fato, de

$$\sqrt{(x_1 - f_1)^2 + (x_2 - f_2)^2} + \sqrt{(x_1 - g_1)^2 + (x_2 - g_2)^2} = 2\epsilon x_2 + 2a, \quad (7.5)$$

obtemos a seguinte equação polinomial de grau 4

$$\begin{aligned} &\epsilon^2(1 - \epsilon^2)x_2^4 + \epsilon^2x_1^2x_2^2 + 2\epsilon a(1 - 2\epsilon^2)x_2^3 + 2\epsilon ax_1^2x_2 + (a^2 - f_1^2)x_1^2 + \\ &+ (\epsilon^2f_1^2 - (1 - \epsilon^2)f_2^2 + a^2(1 - 6\epsilon^2))x_2^2 - 2f_1f_2x_1x_2 + 2\epsilon a(f_1^2 + f_2^2 - 2a^2)x_2 \\ &+ a_2(f_1^2 + f_2^2 - a^2) = 0. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Pela afirmação anterior, sabemos que a Eq. (7.6) representa uma única curva fechada. Por outro lado, se fosse possível reduzir a equação, ou seja, escrevê-la como um produto de equações polinomiais de grau menor, então a única possibilidade é que o lado esquerdo da Eq. (7.6) seja o quadrado de uma expressão quadrática, a qual representaria uma elipse euclidiana. Mas, observe que o quadrado de

$$Ax_1^2 + Bx_1x_2 + Cx_2^2 + Dx_1 + Ex_2 + F, \quad \text{tal que } AC - \frac{1}{4}B^2 > 0,$$

tem coeficientes não nulos para x_1^4 e x_2^4 o que não ocorre no nosso caso. Isto prova que a Eq. (7.6) é irredutível e também que a elipse ($E2$) não é uma elipse euclidiana.

A seguir, na Figura 9 (a)-(d) e Figura 8 (a)-(b), são apresentadas exemplos de elipses ($E2$), onde foram consideradas $a = 5$ e $\epsilon = 1/2$.

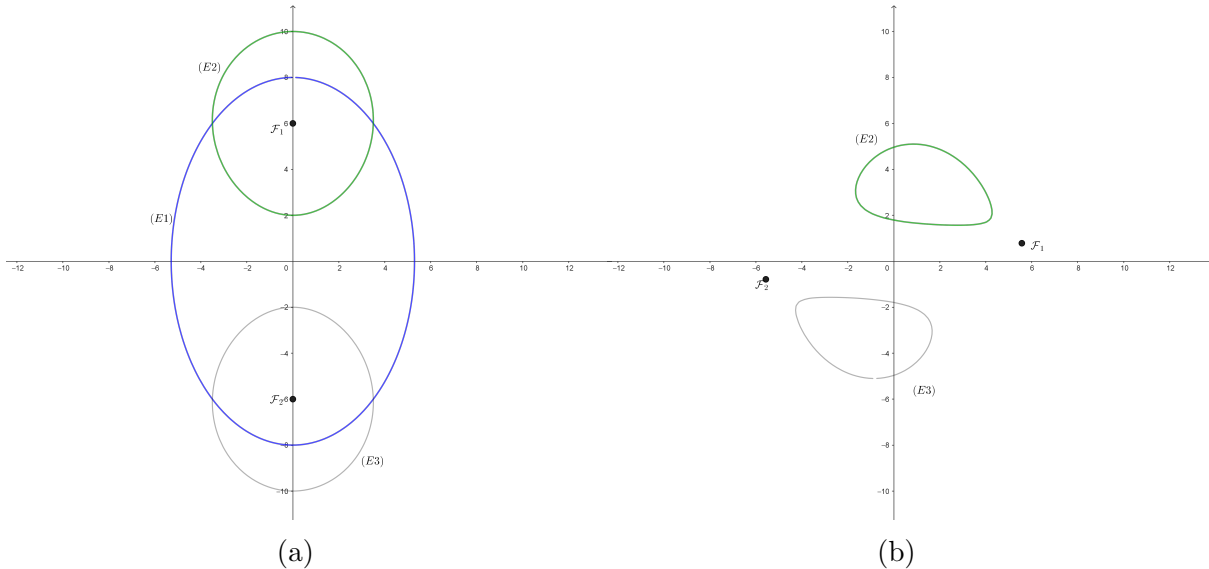


Figura 8: Elipses ϵ -perturbadas.

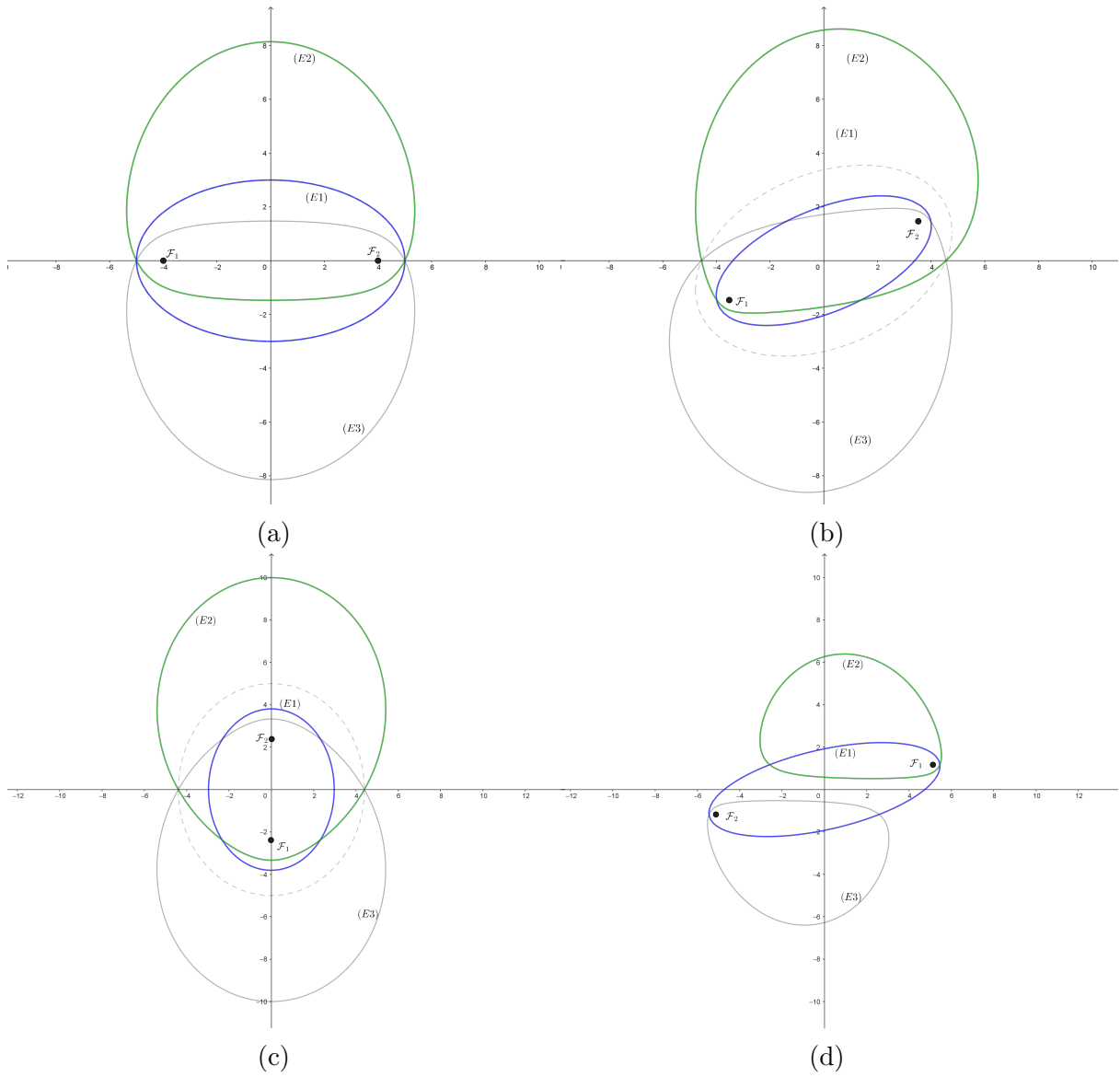


Figura 9: Elipses ε -perturbadas.

8 Hipérboles ε -perturbadas

Análogo à geometria euclidiana plana, definimos as hipérboles ε -perturbadas como sendo os lugares geométricos em \mathbb{R}^2 tais que o módulo da diferença das distâncias entre estes pontos e os dois focos é constante. Como a distância ε -perturbada é não simétrica,

foi possível determinar três tipos de hipérbolas ε -perturbadas.

Definição 8.1. Sejam \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 pontos distintos que pertence à \mathbb{R}^2 , e a um número real positivo. Definimos uma *hipérbole ε -perturbada*, com focos \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 , como sendo o conjunto formado por todos os pontos $X \in \mathbb{R}^2$ tais que satisfazem uma das seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} \text{(H1)} \quad & |d_\varepsilon(\mathcal{F}_1, X) - d_\varepsilon(X, \mathcal{F}_2)| = 2a; & \text{(H3)} \quad & |d_\varepsilon(X, \mathcal{F}_1) - d_\varepsilon(X, \mathcal{F}_2)| = 2a. \\ \text{(H2)} \quad & |d_\varepsilon(\mathcal{F}_1, X) - d_\varepsilon(\mathcal{F}_2, X)| = 2a; \end{aligned}$$

O conjunto dos pontos verificando a propriedade (Hk) será chamada hipérbole ε -perturbada tipo k sendo $k = 1, 2, 3$.

Observação 8.2. O caso em que $|d_\varepsilon(\mathcal{F}_2, X) - d_\varepsilon(X, \mathcal{F}_1)| = 2a$ recai em (H1), pois basta trocar os papéis de \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 .

8.1 Sobre as hipérbolas $(H2)$ e $(H3)$

Se $f_2 = g_2$ $(H2)$ e $(H3)$, são hipérbolas euclidianas e se $f_2 \neq g_2$ é um ramo de hipérbole ou a união de dois ramos diferentes de hipérbole com os mesmos focos, mas de diferentes distâncias aos vértices e cada uma se fechando para um dos focos ou as duas se fechando para o mesmo foco. Por exemplo, para $(H2)$ temos que

$$\begin{aligned} & \left| \|\mathcal{F}_1 - X\| - \|\mathcal{F}_2 - X\| + \varepsilon(x_2 - f_2) - \varepsilon(x_2 - g_2) \right| = 2a, \\ & \left| \|\mathcal{F}_1 - X\| - \|\mathcal{F}_2 - X\| - \varepsilon(f_2 - g_2) \right| = 2a. \end{aligned} \quad (8.1)$$

Note que se $f_2 > g_2$ a curva $\|\mathcal{F}_1 - X\| - \|\mathcal{F}_2 - X\| = \varepsilon(f_2 - g_2)$ é um ramo de hipérbole do lado de \mathcal{F}_2 com distância entre os focos $2c = \sqrt{(f_1 - g_1)^2 + (f_2 - g_2)^2}$ e distância entre os vértices $2\tilde{a} = \varepsilon(f_2 - g_2)$. Este ramo de hipérbole divide o plano em duas regiões que temos que analisar devido ao valor absoluto na Eq. (8.1).

- Dentro do ramo (caso $\|\mathcal{F}_1 - X\| - \|\mathcal{F}_2 - X\| > \varepsilon(f_2 - g_2)$).

A equação $\|\mathcal{F}_1 - X\| - \|\mathcal{F}_2 - X\| = 2a + \varepsilon(f_2 - g_2)$ também é um ramo de hipérbole com os mesmos focos, logo com o mesmo $2c$, mas com distância entre os vértices $2A = 2a + \varepsilon(f_2 - g_2)$. Se $A < c$ o ramo está dentro da região porque $2A > \varepsilon(f_2 - g_2)$. Se $A > c$ a curva não está definida.

- Fora do ramo (caso $\|\mathcal{F}_1 - X\| - \|\mathcal{F}_2 - X\| < \varepsilon(f_2 - g_2)$).

A equação $\|\mathcal{F}_1 - X\| - \|\mathcal{F}_2 - X\| = -2a + \varepsilon(f_2 - g_2)$ novamente é um ramo de hipérbole com os mesmos focos, logo com o mesmo $2c$, mas neste caso com

distância entre os vértices $2A = -2a + \varepsilon(f_2 - g_2) < \varepsilon(f_2 - g_2)$, logo é um ramo que está na região inclusive se $2A < 0$.

Concluimos que a hipérbole $(H2)$ da Eq. (8.1), é a união dos dois ramos, que dependendo do valor de a uma delas pode não existir (ver Figura 10). O caso $f_2 < g_2$ é análogo e o estudo da hipérbole $(H3)$ também torna-se análogo ao caso anterior.

8.2 Sobre a Hipérbole $(H1)$

Pela definição temos que $(H1)$ é dada pela equação

$$\begin{aligned} \left| \|\mathcal{F}_1 - X\| - \|X - \mathcal{F}_2\| + \varepsilon(x_2 - f_2) - \varepsilon(g_2 - x_2) \right| &= 2a \\ \left| \|\mathcal{F}_1 - X\| - \|X - \mathcal{F}_2\| + 2\varepsilon x_2 - \varepsilon(f_2 + g_2) \right| &= 2a. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Usando uma análise semelhante ao Teorema 6.2, faremos uma descrição da superfície dada pela equação

$$\begin{aligned} z &= \|\mathcal{F}_1 - X\| - \|X - \mathcal{F}_2\| \\ z &= \sqrt{(x_1 - f_1)^2 + (x_2 - f_2)^2} - \sqrt{(x_1 - g_1)^2 + (x_2 - g_2)^2}, \end{aligned} \quad (8.3)$$

a qual vamos chamar de *Paloma*, em referência ao pombo (ver Figura 11).

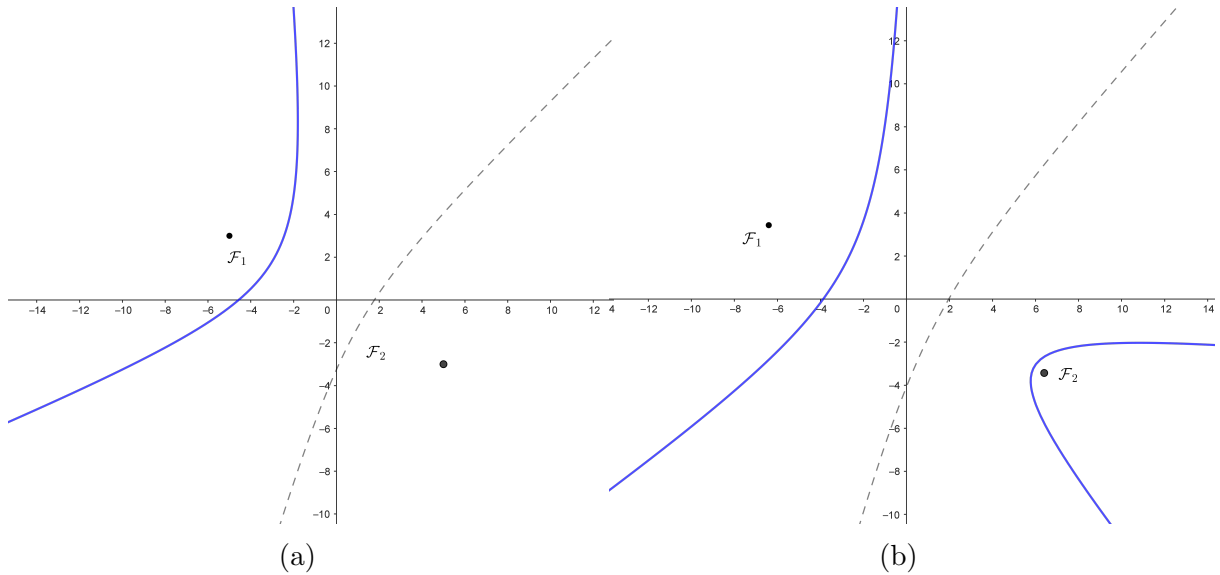


Figura 10: Hipérboles ε -perturbadas $(H2)$ com $a = 5$ e $\varepsilon = 1/2$.

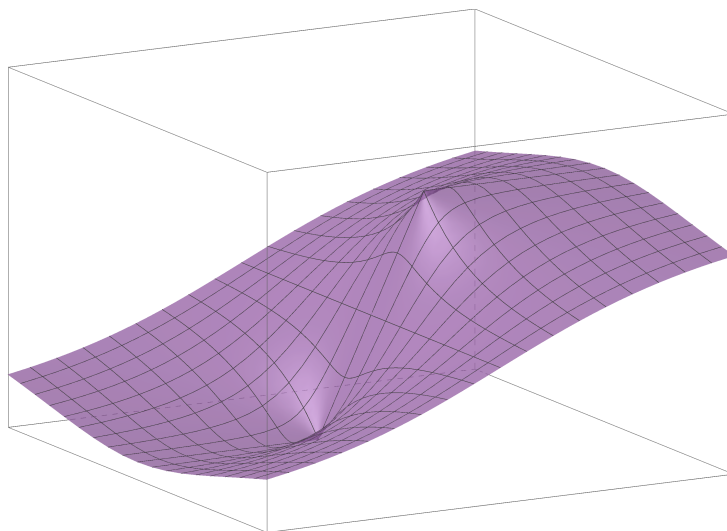


Figura 11: A Paloma.

As curvas de nível da Paloma são ramos de hipérbole com focos \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 e distância entre os vértices $|z|$, para $z > 0$ é o ramo do lado de \mathcal{F}_2 e para $z < 0$ o ramo do lado de \mathcal{F}_1 . Para

$$z = \pm \sqrt{(f_1 - g_1)^2 + (f_2 - g_2)^2}$$

a curva de nível é uma semi reta, contida na reta passando pelos focos, para $z = 0$ é uma perpendicular à reta passando pelos focos e para

$$|z| > \sqrt{(f_1 - g_1)^2 + (f_2 - g_2)^2}$$

não está definida, para ver isso, de maneira análoga à análise precedente, lembrando que d_ε é invariante por translações, consideramos $\mathcal{F}_1 = (f_1, f_2)$, $\mathcal{F}_2 = -\mathcal{F}_1$ e obtemos que a Eq. (8.3) pode se escrever como:

$$z = [x_1^2 + x_2^2 - 2f_1x_1 - 2f_2x_2 + f_1^2 + f_2^2]^{1/2} - [x_1^2 + x_2^2 + 2f_1x_1 + 2f_2x_2 + f_1^2 + f_2^2]^{1/2}$$

a interseção da superfície com o plano gerado pela reta $x_2 = \frac{f_2}{f_1}x_1$ (reta passando pelos focos) é

$$z = \sqrt{\frac{f_1^2 + f_2^2}{f_1^2}} (|x_1 - f_1| - |x_1 + f_1|)$$

que para $x_1 > |f_1|$ é a reta horizontal

$$z = -2 \operatorname{sgn}(f_1) \sqrt{f_1^2 + f_2^2},$$

para $x_1 < |f_1|$ a reta horizontal

$$z = 2 \operatorname{sgn}(f_1) \sqrt{f_1^2 + f_2^2}$$

e para $-|f_1| < x_1 < |f_1|$ a reta

$$z = -2 \operatorname{sgn}(f_1) \sqrt{\frac{f_1^2 + f_2^2}{f_1^2}} x_1.$$

A interseção da superfície com o plano gerado pela reta $x_2 = -\frac{f_1}{f_2} x_1$ (perpendicular ao anterior) é $z = 0$.

O módulo na Eq. (8.2) implica que a hipérbole ($E1$) é obtida pela união das seguintes interseções (lembre-se que $f_2 + g_2 = 0$):

- A Paloma e o plano $z = -2\varepsilon x_2 + 2a$ para $\|\mathcal{F}_1 - X\| - \|X - \mathcal{F}_2\| \geq -2\varepsilon x_2$. (ver Figura 12)
- A Paloma e o plano $z = -2\varepsilon x_2 - 2a$ para $\|\mathcal{F}_1 - X\| - \|X - \mathcal{F}_2\| \leq -2\varepsilon x_2$.

Como $a \geq 0$, $-2\varepsilon x_2 + 2a \geq -2\varepsilon x_2$ e $-2\varepsilon x_2 - 2a \leq -2\varepsilon x_2$ então as condições anteriores são irrelevantes, pois cada plano está no setor que estamos considerando. É claro que para um ε suficientemente pequeno a intercepção entre o plano e a superfície será semelhante a um ramo de hipérbole, mas dependendo do a e da localização dos focos podem se obter desde curvas fechadas até uma composição de curvas abertas e fechadas.

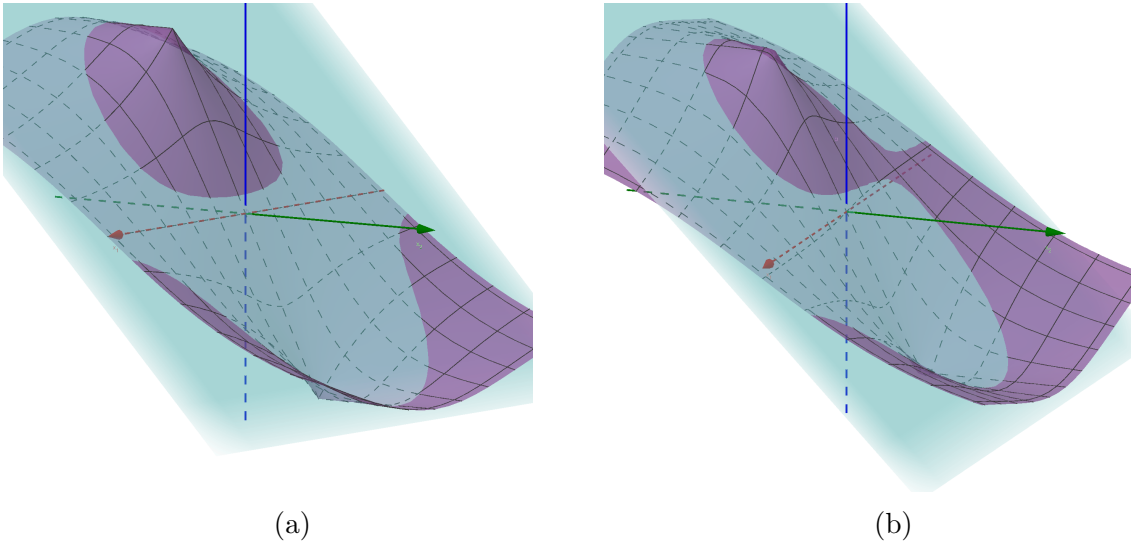


Figura 12: Paloma e plano

Uma propriedade da hipérbole ($E1$) que pode ser provada facilmente é a simetria em relação ao centro C . No caso particular de $C = \mathbf{0}$ uma parte da hipérbole ($E1$) é a interseção das superfícies

$$z = [x_1^2 + x_2^2 - 2f_1x_1 - 2f_2x_2 + f_1^2 + f_2^2]^{1/2} - [x_1^2 + x_2^2 + 2f_1x_1 + 2f_2x_2 + f_1^2 + f_2^2]^{1/2}$$

$$z = -2\varepsilon x_2 + 2a$$

observe que se substituirmos (x_1, x_2) por $(-x_1, -x_2)$ obtemos

$$z = [x_1^2 + x_2^2 + 2f_1x_1 + 2f_2x_2 + f_1^2 + f_2^2]^{1/2} - [x_1^2 + x_2^2 - 2f_1x_1 - 2f_2x_2 + f_1^2 + f_2^2]^{1/2}$$

$$z = 2\varepsilon x_2 + 2a$$

cuja solução é a mesma de

$$z = [x_1^2 + x_2^2 - 2f_1x_1 - 2f_2x_2 + f_1^2 + f_2^2]^{1/2} - [x_1^2 + x_2^2 + 2f_1x_1 + 2f_2x_2 + f_1^2 + f_2^2]^{1/2}$$

$$z = -2\varepsilon x_2 - 2a$$

que é a outra parte da hipérbole ($E1$).

A seguir, na Figura 14 (a)-(d) e Figura 13 são apresentadas Hipérboles ($E1$) com $\varepsilon = 1/2$ e $a = 0.1$.

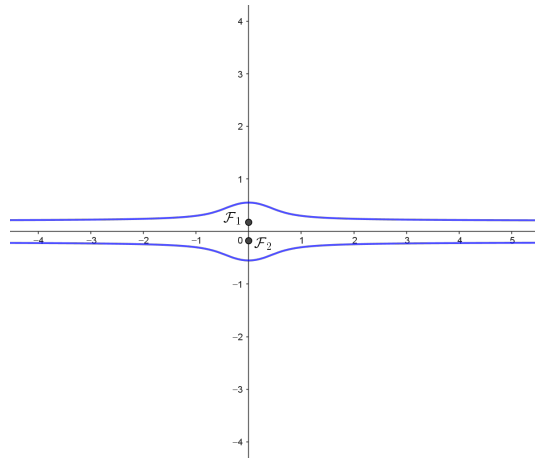


Figura 13: Hipérbole ($H1$).

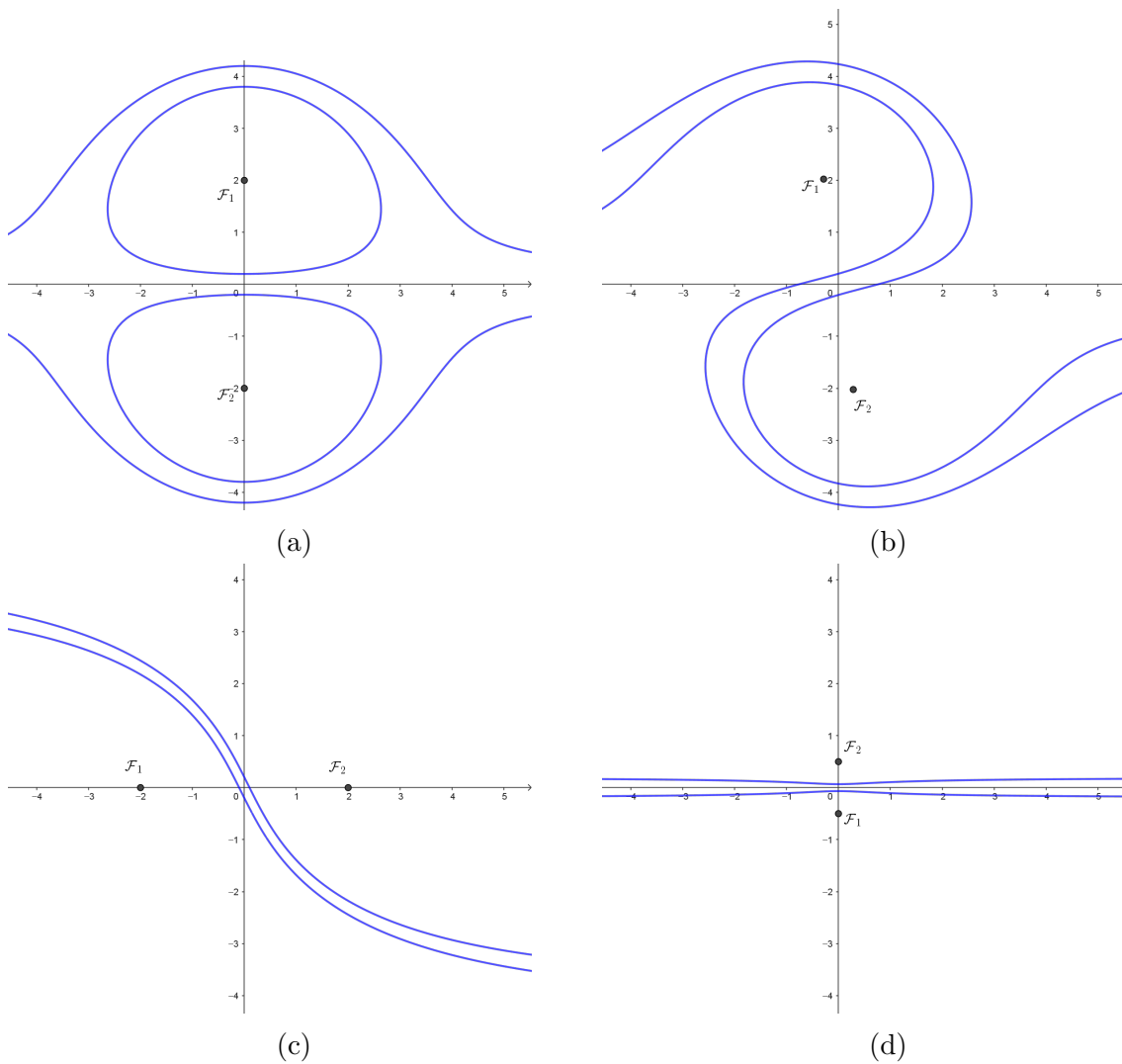


Figura 14: Hipérboles ($H1$).

9 Conclusões Finais

Neste artigo, foi considerado uma norma euclidiana perturbada por uma forma linear a qual torna a distância de um ponto a outro, não simétrica. Com isto gera-se uma nova geometria não euclidiana e questões de geometria analítica surgem naturalmente. O objetivo deste trabalho foi caracterizar as cônicas nesta nova geometria.

Para isto, foram necessárias a obtenção de fórmulas de distâncias de ponto a ponto, de ponto a reta e vice-versa. Com isto conseguimos estudar as cônicas, não só algebricamente, mas também usamos fortemente técnicas geométricas de interseção de superfícies para caracterizar estas cônicas. Mostramos que as circunferências ε -perturbadas são elipses euclidianas transladadas (ver Teorema 4.2). Também foi demonstrado que as parábolas ε -perturbadas são algumas das cônicas euclidianas (ver Teorema 6.2), mostramos que uma das elipses ε -perturbadas é uma elipse euclidiana (ver Teorema 7.3) e as outras duas são curvas fechadas que não são elipses euclidianas. Por fim, foi provado que duas das hipérbolas ε -perturbadas são a união de ramos de hipérbolas com os mesmos focos, mas com distintas distâncias aos vértices. Apresentamos, figuras das cônicas para uma melhor apreciação do artigo. Estas figuras foram feitas com ajuda do software livre GeoGebra 5.0.

Embora a geometria de Finsler seja um tópico avançado e relativamente recente, este artigo tenta trazer exemplos específicos e acessíveis para discentes de graduação que já cursaram geometria analítica e cálculo. Tornando assim o sonho de S. S. Chern, o chamado pai da geometria moderna, de trazer a geometria de Finsler para a graduação, não tão distante quanto parecia.

Agradecimentos

O primeiro autor agradece o apoio financeiro de UNILA - Edital nro 121/2023/PRPPG-UNILA - PAAP (Nro do Protocolo: 23422.026477/2023-54). O terceiro autor agradece o apoio financeiro de UNILA - Edital nº77/2022/PRPPG-PAAP-UNILA (Nº do Protocolo: 23422.013564/2022-71). Os autores agradecem também os valiosos comentários e sugestões dos revisores.

Referências

- [1] Bao, David; Robles, Colleen; Shen, Zhongmin: Zermelo navigation on Riemannian manifolds. *J. Differential Geom.* **66** (2004), no. 3, 377-435.
- [2] do Carmo, Manoel de: *Geometria Riemanniana*. 5 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.
- [3] do Carmo, Manoel de: *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. 6a ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

- [4] Chávez, Newton; León, Víctor; Sosa, Luz; Moyses, Junior: Um problema de navegação de Zermelo: Métrica de Funk. REMAT: Revista Eletrônica da Matemática. **7** (2021), no. 1, e3010.
- [5] Chávez, Newton; Moyses, Junior; León, Víctor: Sobre as parábolas de Funk. REMAT: Revista Eletrônica da Matemática. **10** (2024), no. 1, e3001.
- [6] Cheng, Xinyue; Shen, Zhongmin: *Finsler Geometry. An approach via Randers spaces*. Springer Berlin, Heidelberg, Beijing-Heidelberg, 2012. x+150 pp.
- [7] Guo, Enli; Mo, Xiaohuan: *The geometry of spherically symmetric Finsler manifolds*. Springer, Singapore, 2018. viii+154 pp.
- [8] Hrycyk, Márcio: *Cônicas e métricas em \mathbb{R}^2* . Dissertação (Mestrado Profissional) - Programa de Pós-Graduação em Matemática, mestrado profissional, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, São Paulo, 2019.
- [9] Lima, Elon L.: *Análise Real. v. 1*. Coleção Matemática Universitária-IMPA. 12. ed., Rio de Janeiro, 2014. xiii+198 pp. Mo
- [10] Mo, Xiaohuan: *An Introduction to Finsler Geometry*. World Scientific, Singapore, 2006. ix+128 pp.
- [11] Randers, Gunnar: On an asymmetric metric in the four-space of general relativity. Phys. Rev. **59** (1941), no. 2, 195–199.
- [12] Rufino, Elzimar; Diógenes, Rafael: As Cônicas na geometria exponencial. Inter-maths, **4** (2023), no. 2, 224-244.
- [13] Shen, Zhongmin: *Lectures on Finsler Geometry*. World Scientific, Singapore, 2001. xix+324 pp.
- [14] Souza, Marcelo; Tenenblat, Ketí: Minimal surfaces of rotation in Finsler space with a Randers metric. Math. Ann. **325** (2003), 625–642.

Recebido em 08 de Maio de 2024.

Revisado em 12 de Junho 2024.

Revisado em 08 de Julho 2024.

Aceito em 04 Agosto 2024.