

CÔNICAS NAS MÉTRICAS DA SOMA E DO MÁXIMO

Víctor Arturo Martínez León

Universidade Federal da Integração Latino-Americana (UNILA), Instituto Latino-Americano
de Ciências da Vida e da Natureza (ILACVN),
victor.leon@unila.edu.br

Newton Mayer Solórzano Chávez

Universidade Federal da Integração Latino-Americana (UNILA), Instituto Latino-Americano
de Ciências da Vida e da Natureza (ILACVN),
nmayer159@gmail.com

John Esteban Mosquera Mosquera

Universidade Federal da Integração Latino-Americana (UNILA), Programa de
Pós-Graduação em Física Aplicada (PPGFISA),
jem.mosquera.2019@aluno.unila.edu.br

Jesika Maganin

Universidade Federal do Paraná (UFPR), Programa de Pós-Graduação em Métodos
Numéricos em Engenharia (PPGMNE),
jesikamaganin@ufpr.br

Resumo

Neste estudo, investigamos a geometria das cônicas - circunferência, parábola, elipse e hipérbole - utilizando as métricas da Soma e do Máximo. Analisamos e caracterizamos, analiticamente as equações dessas cônicas com essas métricas específicas.

Palavras Chaves: Métrica da Soma; métrica do Máximo; cônicas.

Abstract

In this study, we investigate the geometry of conics sections - circle, parabola, ellipse and hyperbola - using the sum and maximum metrics. We analyze and characterize, analytically, the equations of these conics with these specific metrics.

Keywords: Sum metric; maximum metric; conics.

1 Introdução

O estudo das cônicas clássicas — elipse, hipérbole e parábola — remonta à antiga Grécia, com investigações realizadas por matemáticos como Menaechmus, Euclides, Arquimedes, Kepler e Apolônio. Menaechmus foi pioneiro ao estudar diferentes

seções planas de uma superfície cônica circular, construindo curvas com propriedades algébricas e demonstrando que o ponto de interseção delas forneceria as médias proporcionais desejadas. Ele é considerado o primeiro a criar uma representação estereométrica das seções cônicas, descobrindo as curvas que seriam posteriormente chamadas de elipse, parábola e hipérbole ([1, 3]).

Euclides contribuiu com um livro sobre cônicas, citado por Apolônio, mas que não chegou aos nossos dias. Apolônio aprofundou o estudo das cônicas em uma obra composta por oito livros, nomeando-as elipse, parábola e hipérbole. Johannes Kepler, aprendendo astronomia com Michael Maestlin, concluiu que a órbita de Marte era uma elipse, colocando o Sol em um de seus focos, formulando a primeira lei de Kepler sobre o movimento planetário. Suas três leis descrevem que os planetas se movem em órbitas elípticas, com velocidades variáveis dependendo da distância ao Sol, e que os quadrados dos períodos de translação dos planetas são proporcionais aos cubos dos semi-eixos maiores de suas órbitas ([2]).

No estudo realizado por Hrycyk [4], são examinadas as cônicas clássicas: elipse, hipérbole e parábola. O autor explora essas curvas sob uma perspectiva geométrica e analítica, utilizando as três métricas convencionais no plano $\mathbb{R}^2$: Euclidiana, do Máximo e da Soma. Vale destacar que o enfoque principal do autor está nas formas canônicas dessas cônicas, isto é, considerando os focos simétricos nos eixos coordenados.

O autor Mosquera [7], investiga a geometria das curvas planas definidas por lugares geométricos, utilizando as métricas do Máximo e da Soma. Especificamente, analisa as cônicas e os ovais de Cassini¹ nos casos canônicos e gerais. Também, apresenta fórmulas de distâncias entre um ponto e uma reta utilizando as métricas da Soma e do Máximo. O autor destaca que na literatura não consta uma fórmula explícita para essa distância em relação a qualquer reta no plano.

Neste trabalho, obtemos uma relação notável entre as métricas da Soma e do Máximo (ver Teorema 3.5), mostramos que uma pode ser recuperada a partir da outra mediante uma composição de uma rotação e uma homotetia. Damos uma demonstração alternativa à fórmula da distância de um ponto a uma reta dadas em [7]. Além disto, caracterizamos as cônicas utilizando as métricas de Soma e do Máximo. Gráficos são apresentados para uma melhor compreensão.

Na seção 2, apresentamos os preliminares necessários para a compreensão do trabalho. Introduzimos a definição de espaço métrico e damos como exemplos as já conhecidas métrica Euclidiana, métrica da Soma e métrica do Máximo, acompanhadas de uma interpretação geométrica que as relaciona entre si.

Na seção 3, exploramos algumas propriedades fundamentais da métrica da Soma e

¹As ovais de Cassini são uma família de curvas quárticas, as quais são uma generalização da lemniscata de Bernoulli e, portanto, da elipse.

do Máximo, em particular, no Teorema 3.5 obtemos uma relação importante para o desenvolvimento do trabalho.

Na seção 4, caracterizamos as circunferências na métrica da Soma e do Máximo (ver Teorema 4.3 e Corolário 4.7).

Na seção 5, obtemos as fórmulas de distância de um ponto a uma reta nas métricas da Soma e do Máximo (Ver Teoremas 5.1 e 5.2).

Na seção 6, caracterizamos as parábolas na métrica da Soma e do Máximo, apresentando a Proposição 6.2 e a Observação 6.3.

Na seção 7, caracterizamos as elipses na métrica da Soma e do Máximo, abordando suas propriedades conforme a Proposição 7.2 e a Observação 7.3.

Na seção 8, investigamos as hipérbolas na métrica da Soma e do Máximo, discutindo sua caracterização e comportamento geométrico.

Por fim, na seção 9 são feitas considerações finais sobre o trabalho.

2 Preliminares

Definição 2.1. Uma *métrica* num conjunto M é uma função $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada par ordenado $(P, Q) \in M \times M$ um número real $d(P, Q)$, chamado a *distância* de P a Q , de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer $P, Q, R \in M$:

$$(d1) \quad d(P, P) = 0;$$

$$(d2) \quad \text{Se } P \neq Q \text{ então } d(P, Q) > 0;$$

$$(d3) \quad d(P, Q) = d(Q, P);$$

$$(d4) \quad d(P, R) \leq d(P, Q) + d(Q, R) \text{ (desigualdade triangular)}.$$

Diremos que um *espaço métrico* é um par (M, d) , onde M é um conjunto não vazio e d é uma métrica em M .

Daremos agora alguns exemplos de espaços métricos em [6].

Exemplo 2.2. A métrica “zero-um”. Qualquer conjunto M não-vazio pode tornar-se um espaço métrico. Basta definir a métrica $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ pondo $d(P, P) = 0$ e $d(P, Q) = 1$ se $P \neq Q$.

Exemplo 2.3. *Subespaço; métrica induzida.* Se (M, d) é um espaço métrico, todo subconjunto $S \subset M$ pode ser considerado, de modo natural, como espaço métrico: basta considerar a restrição de d a $S \times S$. Quando isto é feito, S chama-se um *subespaço métrico* de M e a métrica de S diz-se induzida pela de M .

Exemplo 2.4. A *reta*, ou seja, o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, é o exemplo mais importante de espaço métrico. A distância entre dois pontos $a, b \in \mathbb{R}$ é dada por $d(a, b) = |a - b|$. Esta é a chamada “*métrica usual*” da reta.

A seguir, adotaremos a notação

$$P = (x_P, y_P), \quad Q = (x_Q, y_Q), \quad R = (x_R, y_R), \quad \dots$$

para nos referir a pontos de $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 2.5. Há três maneiras naturais de se definir a distância entre dois pontos em $\mathbb{R}^2$. Dados P e Q , escrevemos:

$$\begin{aligned} d_E(P, Q) &= \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}, \\ d_S(P, Q) &= |x_P - x_Q| + |y_P - y_Q| \quad \text{e} \\ d_M(P, Q) &= \max \{|x_P - x_Q|, |y_P - y_Q|\}. \end{aligned}$$

As funções $d_E, d_S, d_M : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ são métricas. As métricas d_E, d_S e d_M são chamadas *Euclidiana*, *da Soma* e *do Máximo*, respectivamente.

A métrica da Soma é conhecida também como a distância do Taxi (ver [5]) ou métrica de Manhattan. Por outro lado, a métrica do Máximo é conhecida como a métrica de Chebyshev ou métrica do Tabuleiro de Xadrez.

Observação 2.6 ([6]). Sejam d_E, d_S e d_M as métricas definidas no Exemplo 2.5. Quaisquer que sejam $P, Q \in \mathbb{R}^2$, tem-se

$$d_M(P, Q) \leq d_E(P, Q) \leq d_S(P, Q) \leq 2 \cdot d_M(P, Q). \quad (2.1)$$

Além das desigualdades (2.1), temos a seguinte identidade

$$d_E^2 = d_M^2 + (d_S - d_M)^2,$$

cuja interpretação geométrica é:

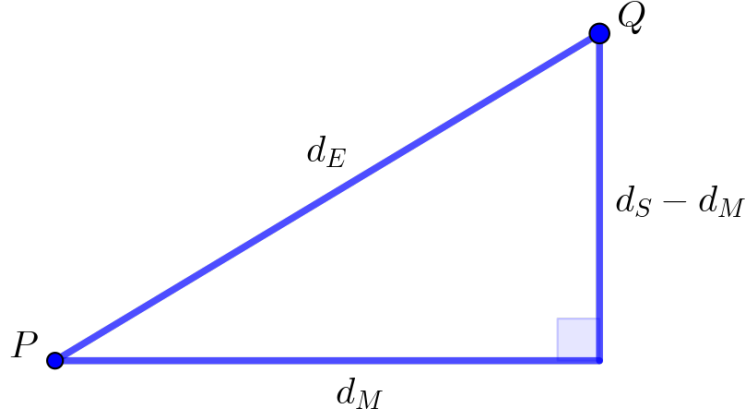


Figura 1: Interpretação geométrica.

Sejam $P = (x_P, y_P)$ e $Q = (x_Q, y_Q)$, com $x_P \neq x_Q$ e $y_P \neq y_Q$. Consideremos o triângulo retângulo com PQ sendo a hipotenusa, e com catetos $a = |x_Q - x_P|$ e $b = |y_P - y_Q|$ como na Figura 1. Sem perda de generalidade, podemos considerar $a \geq b$, então, as métricas da Soma e do Máximo podem ser escritos em função dos catetos do triângulo retângulo,

$$d_S(P, Q) = a + b \quad \text{e} \quad d_M(P, Q) = a.$$

O Teorema de Pitágoras nos dá a seguinte relação entre as três métricas

$$d_S = d_M + \sqrt{d_E^2 - d_M^2}.$$

3 Propriedades fundamentais da métrica da Soma e do Máximo

Definição 3.1. Seja d uma métrica qualquer em $\mathbb{R}^2$. Dizemos que uma métrica d é *invariante por translações*, se para qualquer translação $\mathcal{T}_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\mathcal{T}_A(P) = P + A$, onde $A \in \mathbb{R}^2$, se tenha

$$d(\mathcal{T}_A(P), \mathcal{T}_A(Q)) = d(P, Q),$$

para todo $P, Q \in \mathbb{R}^2$.

Definição 3.2. Seja d uma métrica qualquer em $\mathbb{R}^2$. Dizemos que uma métrica d é *invariante por rotações*, se para qualquer rotação $\mathcal{R}_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\mathcal{R}_\theta(P) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot P,$$

onde $\theta \in \mathbb{R}$, se tenha

$$d(\mathcal{R}_\theta(P), \mathcal{R}_\theta(Q)) = d(P, Q),$$

para todo $P, Q \in \mathbb{R}^2$.

Observação 3.3. A Definição 3.1 e Definição 3.2 é uma adaptação do conceito de *isometria* entre espaços métricos ([6]), isto é, uma função $\varphi : M \rightarrow M'$ bijetiva entre os espaços métricos (M, d) e (M', d') que satisfaz

$$d'(\varphi(x), \varphi(y)) = d(x, y), \text{ para todo } x, y \in M.$$

É conhecido que na métrica Euclidiana d_E em $\mathbb{R}^2$ as translações e rotações são isometrias. Portanto, a métrica Euclidiana d_E é invariante por translações e rotações.

3.1 Propriedades de invariâncias da métrica da Soma

1. d_S é invariante por translações. De fato, seja a translação $\mathcal{T}_A$, então para quaisquer P e $Q \in \mathbb{R}^2$ temos,

$$\begin{aligned} d_S(\mathcal{T}_A(P), \mathcal{T}_A(Q)) &= d_S(P + A, Q + A) \\ &= d_S((x_P + x_A, y_P + y_A), (x_Q + x_A, y_Q + y_A)) \\ &= |(x_Q + x_A) - (x_P + x_A)| + |(y_Q + y_A) - (y_P + y_A)| \\ &= |x_Q - x_P| + |y_Q - y_P| = d_S(P, Q). \end{aligned}$$

2. d_S não é invariante por rotações. Basta mostrar que

$$d_S\left(\mathcal{R}_{\frac{\pi}{4}}(0, 0), \mathcal{R}_{\frac{\pi}{4}}(\sqrt{2}, 0)\right) \neq d_S\left((0, 0), (\sqrt{2}, 0)\right).$$

De fato,

$$d_S\left(\mathcal{R}_{\frac{\pi}{4}}(0, 0), \mathcal{R}_{\frac{\pi}{4}}(\sqrt{2}, 0)\right) = d_S((0, 0), (1, 1)) = 2,$$

e

$$d_S((0, 0), (\sqrt{2}, 0)) = \sqrt{2}.$$

3.2 Propriedades de invariância da métrica do Máximo

1. d_M é invariante por translações. De fato, seja a translação $\mathcal{T}_A$, então para quaisquer P e $Q \in \mathbb{R}^2$ temos,

$$\begin{aligned} d_M(\mathcal{T}_A(P), \mathcal{T}_A(Q)) &= d_M(P + A, Q + A) \\ &= d_M((x_P + x_A, y_P + y_A), (x_Q + x_A, y_Q + y_A)) \\ &= \max \{|(x_Q + x_A) - (x_P + x_A)|, |(y_Q + y_A) - (y_P + y_A)|\} \\ &= \max \{|x_Q - x_P|, |y_Q - y_P|\} = d_M(P, Q). \end{aligned}$$

2. d_M não é invariante por rotações. Basta mostrar que

$$d_M \left(\mathcal{R}_{\frac{\pi}{4}}(0, 0), \mathcal{R}_{\frac{\pi}{4}}(\sqrt{2}, 0) \right) \neq d_M \left((0, 0), (\sqrt{2}, 0) \right).$$

De fato,

$$d_M \left(\mathcal{R}_{\frac{\pi}{4}}(0, 0), \mathcal{R}_{\frac{\pi}{4}}(\sqrt{2}, 0) \right) = d_M((0, 0), (1, 1)) = 1,$$

e

$$d_M((0, 0), (\sqrt{2}, 0)) = \sqrt{2}.$$

3.3 Relações entre as métricas da Soma, do Máximo e Euclidiana

Proposição 3.4. Para quaisquer números $a, b \in \mathbb{R}$ temos,

$$\max\{|a + b|, |a - b|\} = |a| + |b|.$$

Demonstração.

Caso 1: Se $a \geq 0$ e $b \geq 0$, temos,

$$\max\{|a + b|, |a - b|\} = \max\{a + b, |a - b|\} = a + b = |a| + |b|$$

pois $|a - b| \leq |a| + |b| = a + b$.

Caso 2: Se $a \geq 0$ e $b < 0$, temos,

$$\max\{|a + b|, |a - b|\} = \max\{|a + b|, a - b\} = a - b = |a| + |b|$$

pois $|a + b| \leq |a| + |b| = a - b$.

Caso 3: Se $a < 0$ e $b \geq 0$, temos,

$$\max\{|a + b|, |a - b|\} = \max\{|a + b|, -a + b\} = -a + b = |a| + |b|$$

pois $|a + b| \leq |a| + |b| = -a + b$.

Caso 4: Se $a < 0$ e $b < 0$, temos,

$$\max\{|a + b|, |a - b|\} = \max\{-a - b, |a - b|\} = -a - b = |a| + |b|$$

pois $|a - b| \leq |a| + |b| = -a - b$. □

O seguinte teorema afirma que a métrica da Soma pode ser recuperada usando a métrica do Máximo mediante uma rotação.

Teorema 3.5. *Sejam d_S, d_M as métricas da Soma e Máximo, respectivamente. Para quaisquer pontos $P, Q \in \mathbb{R}^2$, temos a seguinte relação*

$$d_S(P, Q) = \sqrt{2}d_M(\mathcal{R}_{\frac{\pi}{4}}(P), \mathcal{R}_{\frac{\pi}{4}}(Q)). \quad (3.1)$$

Demonstração. Primeiro vamos considerar $P = O = (0, 0)$ e $Q = (x_Q, y_Q)$. Usando a Proposição 3.4 temos

$$\begin{aligned} \sqrt{2}d_M((0, 0), \mathcal{R}_{\frac{\pi}{4}}(x_Q, y_Q)) &= \sqrt{2}d_M\left((0, 0), \frac{1}{\sqrt{2}}(x_Q - y_Q, x_Q + y_Q)\right) \\ &= \max\{|x_Q - y_Q|, |x_Q + y_Q|\} \\ &= |x_Q| + |y_Q| \\ &= d_S((0, 0), (x_Q, y_Q)). \end{aligned}$$

Para o caso geral, usando a invariância por translações de d_S e d_M temos

$$\begin{aligned} d_S(P, Q) &= d_S(O, Q - P) = \sqrt{2}d_M(O, \mathcal{R}_{\frac{\pi}{4}}(Q - P)) \\ &= \sqrt{2}d_M(O, \mathcal{R}_{\frac{\pi}{4}}(Q) - \mathcal{R}_{\frac{\pi}{4}}(P)) \\ &= \sqrt{2}d_M(\mathcal{R}_{\frac{\pi}{4}}(P), \mathcal{R}_{\frac{\pi}{4}}(Q)). \end{aligned}$$

□

Observação 3.6. Note que na demonstração do Teorema 3.5 se usarmos uma rotação por $\frac{\pi}{4} \pm n\frac{\pi}{2}$, onde $n \in \mathbb{Z}$, teríamos o mesmo resultado.

Observação 3.7. Pela observação anterior temos que a identidade (3.1), pode ser escrita como,

$$d_M(P, Q) = \frac{1}{\sqrt{2}}d_S(\mathcal{R}_{\frac{\pi}{4}}(P), \mathcal{R}_{\frac{\pi}{4}}(Q)) \quad (3.2)$$

Pelas identidades (3.1) e (3.2) o estudo das métricas d_S e d_M se reduz ao estudo de uma delas somente. Nas seguintes seções só nos centraremos na métrica da Soma, pois os resultados poderão ser estendidos à métrica do Máximo pela relação (3.2).

4 Circunferências

4.1 Circunferência com a métrica da Soma.

A seguir caracterizamos todos os pontos do plano tal que sua distância a um ponto fixo é uma constante.

Definição 4.1. Dados C um ponto em $\mathbb{R}^2$ e $r > 0$, definimos a *circunferência da Soma* $\mathcal{C}_S[C, r]$ de centro C e raio r , como sendo o conjunto formado por todos os pontos $X \in \mathbb{R}^2$ tais que satisfazem

$$d_S(C, X) = r.$$

Definição 4.2. Dados C um ponto em $\mathbb{R}^2$ e $r > 0$, definimos as *circunferência do Máximo* $\mathcal{C}_M[C, r]$ de centro C e raio r , como sendo o conjunto formado por todos os pontos $X \in \mathbb{R}^2$ tais que satisfazem

$$d_M(C, X) = r.$$

Teorema 4.3. A *circunferência* $\mathcal{C}_S[C, r]$ é caracterizada pelos lados de um quadrado de vértices $C + (r, 0)$, $C + (0, r)$, $C + (-r, 0)$ e $C + (0, -r)$.

Demonstração. Pela invariância por translações de d_S vamos analisar $\mathcal{C}_S[(0, 0), r]$. Considerando $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, da definição de d_S temos que $d_S((0, 0), X) = r$ é equivalente à

$$|x| + |y| = r,$$

logo, podemos caracterizar esta equação em cada quadrante de $\mathbb{R}^2$ como segue,

$$\mathcal{C}_S[(0, 0), r] : \begin{cases} y = -x + r, & x, y \geq 0 \\ y = x - r, & x \geq 0, y < 0 \\ y = x + r, & x < 0, y \geq 0 \\ y = -x - r, & x, y < 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

Então, $\mathcal{C}_S[(0, 0), r]$ é a borda de um quadrado de vértices $(r, 0)$, $(0, r)$, $(-r, 0)$ e $(0, -r)$. Ver na Figura 2, o gráfico na cor verde. $\square$

Observação 4.4. Pode-se provar que a distância do centro do quadrado (4.1) até qualquer ponto interior deste quadrado é menor que r , e a distância do centro até qualquer ponto no exterior do quadrado é maior que r .

4.2 Invariantes nos quadrantes

Como consequência da equação da circunferência da Soma (4.1) temos as seguintes propriedades em cada quadrante do plano cartesiano, assim a distância da origem a um ponto arbitrário de cada quadrante é dada por:

1. No primeiro quadrante ($x, y \geq 0$), para $(x, y) \in \mathcal{C}_S[(0, 0), r]$, $r > 0$, da equação (4.1), temos que

$$d_S((0, 0), (x, y)) = d_S((0, 0), (x, -x + r)) = r,$$

em particular, para $x = 0$ ($y = r$) e $x = r$ ($y = 0$), temos

$$r = d_S((0, 0), (0, r)) = d_S((0, 0), (r, 0)).$$

Assim, procedendo de maneira análoga para os outros quadrantes, conseguimos resultados similares.

2. No segundo quadrante ($x \leq 0, y \geq 0$), temos que

$$d_S((0, 0), (x, x + r)) = d_S((0, 0), (0, r)) = d_S((0, 0), (-r, 0)) = r.$$

3. No terceiro quadrante ($x, y \leq 0$), temos que

$$d_S((0, 0), (x, -x - r)) = d_S((0, 0), (0, -r)) = d_S((0, 0), (-r, 0)) = r.$$

4. No quarto quadrante ($x \geq 0, y \leq 0$), temos que

$$d_S((0, 0), (x, x - r)) = d_S((0, 0), (0, -r)) = d_S((0, 0), (r, 0)) = r.$$

Exemplo 4.5. Seja $P = (x_P, y_P)$ com $x_P, y_P \geq 0$ então

$$\begin{aligned} d_S((0, 0), (x_P, y_P)) &= d_S((0, 0), (x, -x + (x_P + y_P))), & 0 \leq x \leq x_P + y_P \\ &= d_S((0, 0), (x, x + (x_P + y_P))), & -(x_P + y_P) \leq x \leq 0 \\ &= d_S((0, 0), (x, -x - (x_P + y_P))), & -(x_P + y_P) \leq x \leq 0 \\ &= d_S((0, 0), (x, x - (x_P + y_P))), & 0 \leq x \leq x_P + y_P \end{aligned}$$

em particular, para $x = -x_P$ ou $x = x_P$ ou $x = 0$ ou $x = x_P + y_P$

$$\begin{aligned} d_S((0, 0), (x_P, y_P)) &= d_S((0, 0), (-x_P, y_P)) = d_S((0, 0), (-x_P, -y_P)) \\ &= d_S((0, 0), (x_P, -y_P)) = d_S((0, 0), (0, x_P + y_P)) \\ &= d_S((0, 0), (x_P + y_P, 0)) \end{aligned}$$

Observação 4.6. As duas últimas igualdades acima nos dizem que para obter d_S desde a origem até $P = (x_P, y_P)$, basta examinar esta distância desde a origem até os pontos de interseção dos eixos coordenados com as retas $y = \pm x \pm (|x_P| + |y_P|)$, isto é nos vértices de $\mathcal{C}_S[(0, 0), r]$.

4.3 Circunferência com a métrica do Máximo

Corolário 4.7. A circunferência $\mathcal{C}_M[C, r]$ é caracterizada pelos lados de um quadrado de vértices $C + \sqrt{2}r(1, 1)$, $C + \sqrt{2}r(1, -1)$, $C + \sqrt{2}r(-1, -1)$ e $C + \sqrt{2}r(-1, 1)$. Ver a Figura 2 na cor azul.

Demonstração. Pela relação (3.2) e pelo Teorema 4.3, obtemos

$$\begin{aligned} X \in \mathcal{C}_M[O, r] &\iff d_M(O, X) = r \iff d_S(O, \mathcal{R}_{\frac{\pi}{4}}(X)) = \sqrt{2}r \\ &\iff \mathcal{R}_{\frac{\pi}{4}}(X) \in \mathcal{C}_S[O, r\sqrt{2}] \iff X \in \mathcal{R}_{-\frac{\pi}{4}}(\mathcal{C}_S[O, r\sqrt{2}]). \end{aligned}$$

□

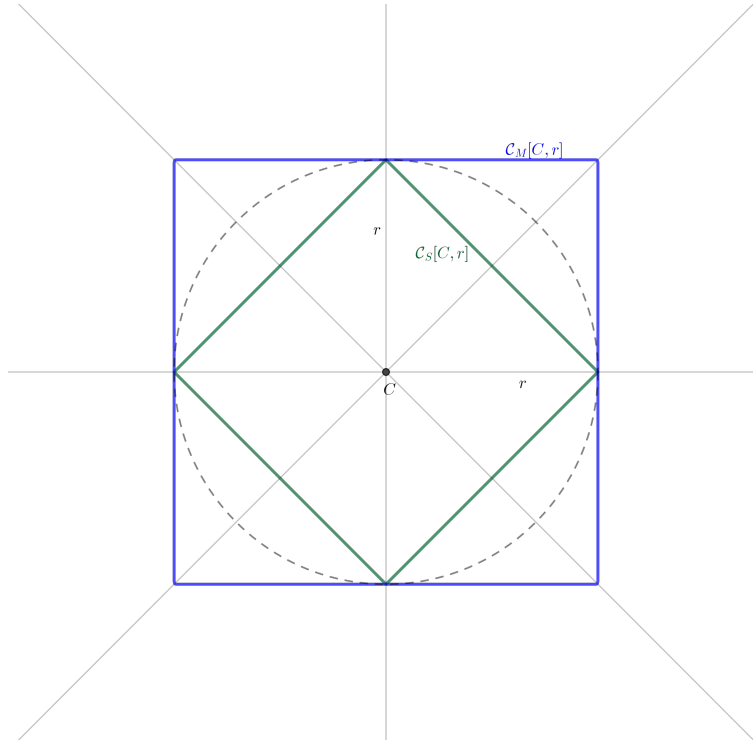


Figura 2: Circunferências.

5 Distância de ponto à reta

A seguir daremos uma demonstração das fórmulas da distância entre um ponto e uma reta usando as métricas da Soma e do Máximo.

Teorema 5.1 ([7]). *Sejam a reta $s : ax + by + c = 0$ e o ponto $P = (x_P, y_P) \in \mathbb{R}^2$, então*

$$d_S(P, s) = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\max\{|a|, |b|\}}.$$

Demonstração. Pela Observação 4.4 podemos usar a técnica de procurar o rádio da circunferência $\mathcal{C}_S[(x_P, y_P), r]$ de tal forma que exista uma única interseção entre esta circunferência e a reta s . Pela Observação 4.6 basta intersectar com os eixos coordenados (ver Figura 3). Dividiremos a demonstração em 3 casos.

Caso 1: Suponhamos que a reta s é vertical, isto é, $s : x = -\frac{c}{a}$, ($b = 0$ e $a \neq 0$) então $\{y = y_P\} \cap s = \{(-\frac{c}{a}, y_P)\}$, logo

$$d_S(P, s) = d_S\left((x_P, y_P), \left(-\frac{c}{a}, y_P\right)\right) = \frac{|ax_P + c|}{|a|}.$$

Caso 2: Suponhamos que a reta s é horizontal, isto é, $s : y = -\frac{c}{b}$, ($a = 0$ e $b \neq 0$) então $\{x = x_P\} \cap s = \{(x_P, -\frac{c}{b})\}$, logo

$$d_S(P, s) = d_S\left((x_P, y_P), \left(x_P, -\frac{c}{b}\right)\right) = \frac{|by_P + c|}{|b|}.$$

Caso 3: Suponhamos que a reta s é inclinada, isto é, ($b \neq 0$) $s : y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$, então

$$\{x = x_P\} \cap s = \left\{\left(x_P, -\frac{ax_P + c}{b}\right)\right\}, \quad \{y = y_P\} \cap s = \left\{\left(-\frac{by_P + c}{a}, y_P\right)\right\},$$

respectivamente. Para obter a distância entre um ponto e uma reta escolhemos o mínimo das distâncias entre $d_S\left(P, \left(x_P, -\frac{ax_P + c}{b}\right)\right)$ e $d_S\left(P, \left(-\frac{by_P + c}{a}, y_P\right)\right)$, isto é

$$\begin{aligned} d_S(P, s) &= \min \left\{ \left| \frac{ax_P + c}{b} + y_P \right|, \left| \frac{by_P + c}{a} + x_P \right| \right\} \\ &= \frac{|ax_P + by_P + c|}{\max\{|a|, |b|\}}. \end{aligned}$$

□

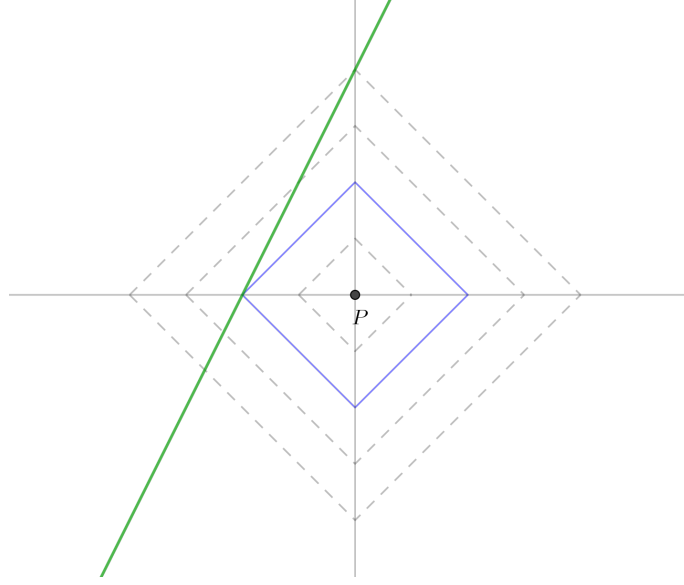


Figura 3: Interseção de retas vertical e horizontal com a reta s .

Teorema 5.2 ([7]). *Sejam a reta $s : ax + by + c = 0$ e o ponto $P = (x_P, y_P) \in \mathbb{R}^2$, então*

$$d_M(P, s) = \frac{|ax_P + by_P + c|}{|a| + |b|}.$$

Demonstração. Seja $(\bar{x}, \bar{y}) = \mathcal{R}_{\frac{\pi}{4}}(x, y)$, então $(x, y) = \mathcal{R}_{-\frac{\pi}{4}}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{y} + \bar{x}, \bar{y} - \bar{x})$. Logo

$$s : ax + by + c = 0$$

$$\mathcal{R}_{\frac{\pi}{4}}(s) : a(\bar{y} + \bar{x}) + b(\bar{y} - \bar{x}) + \sqrt{2}c = 0$$

$$\mathcal{R}_{\frac{\pi}{4}}(s) : (a - b)\bar{x} + (a + b)\bar{y} + \sqrt{2}c = 0$$

A novas coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ serão denotadas por (x, y) para facilitar a leitura. Como $\mathcal{R}_{\frac{\pi}{4}}(s) : (a - b)x + (a + b)y + \sqrt{2}c = 0$, e pela Proposição 3.4 temos,

$$\begin{aligned} d_M(P, s) &= \frac{1}{\sqrt{2}} d_S(\mathcal{R}_{\frac{\pi}{4}}(P), \mathcal{R}_{\frac{\pi}{4}}(s)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\left| (a - b) \frac{(x_P - y_P)}{\sqrt{2}} + (a + b) \frac{(x_P + y_P)}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}c \right|}{\max\{|a + b|, |a - b|\}} \\ &= \frac{|ax_P + by_P + c|}{|a| + |b|}. \end{aligned}$$

□

Observação 5.3. Uma demonstração geométrica seria usar o mesmo argumento da prova do Teorema 5.1, isto é, bastando intersestar a reta s com as retas $l_{\pm} : y = \pm(x - x_p) + y_p$ (ver Figura 4).

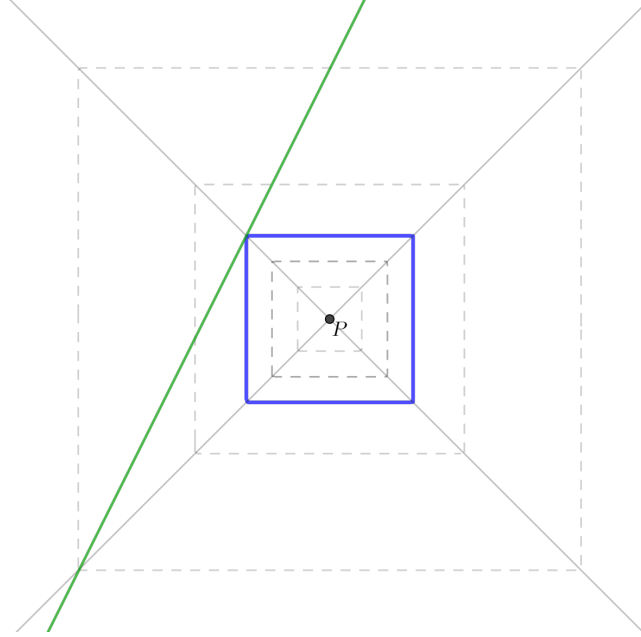


Figura 4: Interseção de retas oblíquas com a reta s .

6 A parábola na métrica da Soma e do Máximo

Definição 6.1. Sejam $s \subset \mathbb{R}^2$ e $\mathcal{F} \in \mathbb{R}^2$, uma reta (chamada *diretriz*) e um ponto (chamado *foco*), respectivamente. Definimos a parábola na métrica da Soma, com diretriz s e foco F , como sendo o conjunto formado por todos os pontos $P \in \mathbb{R}^2$ que satisfazem

$$d_S(P, \mathcal{F}) = d_S(P, s). \quad (6.1)$$

Como d_S é invariante por translações, podemos considerar $\mathcal{F} = (0, 0)$.

Proposição 6.2. A parábola na métrica da Soma $\mathcal{P}_S[O, s]$ de foco $O = (0, 0)$ e diretriz $s : ax + by + c = 0$ é caracterizada por

$$\mathcal{P}_S[O, s] : \begin{cases} (\lambda - \operatorname{sgn}(c)a)x + (\lambda - \operatorname{sgn}(c)b)y = |c|, & x, y \geq 0 \\ (-\lambda - \operatorname{sgn}(c)a)x + (\lambda - \operatorname{sgn}(c)b)y = |c|, & x \leq 0, y \geq 0 \\ (-\lambda - \operatorname{sgn}(c)a)x + (-\lambda - \operatorname{sgn}(c)b)y = |c|, & x, y < 0 \\ (\lambda - \operatorname{sgn}(c)a)x + (-\lambda - \operatorname{sgn}(c)b)y = |c|, & x \geq 0, y \leq 0. \end{cases},$$

onde $\lambda = \max\{|a|, |b|\}$.

Demonstração. Seja s definido pela equação $ax + by + c = 0$ com $c \neq 0$. Denotemos também $\lambda = \max\{|a|, |b|\}$. Logo, para $P = (x, y)$, de (6.1) e utilizando o Teorema 5.1 obtemos

$$|x| + |y| = \frac{|ax + by + c|}{\lambda}. \quad (6.2)$$

Faremos a análise nos quadrantes.

Caso 1: Se $x > 0$ e $y > 0$. De (6.2) tem-se

$$\lambda(x + y) = |ax + by + c|.$$

Equivalentemente,

$$(\lambda - a)x + (\lambda - b)y = c \quad \text{se} \quad ax + by + c > 0, \quad (6.3)$$

$$-[(\lambda + a)x + (\lambda + b)y] = c \quad \text{se} \quad ax + by + c < 0. \quad (6.4)$$

Pela definição de λ , temos que $(\lambda \pm a)x + (\lambda \pm b)y > 0$, então se $c > 0$, a reta a considerar é (6.3), e se $c < 0$, a reta a considerar é (6.4). Por outro lado, como $\lambda x + \lambda y > 0$, temos que se $c > 0$, de $(\lambda - a)x + (\lambda - b)y = c$ temos que $ax + by + c > 0$. Se $c < 0$ então, de $(-\lambda - a)x + (-\lambda - b)y = -c$ temos que $ax + by + c < 0$. Assim, as equações (6.3) e (6.4) podem ser reescritas como,

$$\begin{aligned} (\lambda - a)x + (\lambda - b)y &= c \quad \text{se} \quad c > 0, \\ -[(\lambda + a)x + (\lambda + b)y] &= c \quad \text{se} \quad c < 0. \end{aligned}$$

Caso 2: Se $x < 0$ e $y > 0$. De (6.2) tem-se

$$\lambda(-x + y) = |ax + by + c|.$$

Equivalentemente,

$$(-\lambda - a)x + (\lambda - b)y = c \quad \text{e} \quad ax + by + c > 0, \quad (6.5)$$

$$-[(\lambda + a)x + (\lambda + b)y] = c \quad \text{e} \quad ax + by + c < 0. \quad (6.6)$$

De modo análogo ao caso 1, temos que as equações (6.5) e (6.6) podem ser reescritas como,

$$\begin{aligned} (-\lambda - a)x + (\lambda - b)y &= c \quad \text{se } c > 0, \\ -[(-\lambda + a)x + (\lambda + b)y] &= c \quad \text{se } c < 0. \end{aligned}$$

Caso 3: Se $x > 0$ e $y < 0$. De (6.2) tem-se

$$\lambda(x - y) = |ax + by + c|.$$

Como feito no Caso 1, esta equação é equivalente a

$$\begin{aligned} (\lambda - a)x + (-\lambda - b)y &= c \quad \text{e } c > 0, \\ -[(\lambda + a)x + (-\lambda + b)y] &= c \quad \text{e } c < 0. \end{aligned}$$

Caso 4: Se $x < 0$ e $y < 0$. De (6.2) tem-se

$$-\lambda(x + y) = |ax + by + c|.$$

De modo análogo ao Caso 1, esta equação é equivalente a,

$$\begin{aligned} (-\lambda - a)x + (-\lambda - b)y &= c \quad \text{se } c > 0, \\ -[(-\lambda + a)x + (-\lambda + b)y] &= c \quad \text{se } c < 0. \end{aligned}$$

□

Observação 6.3. Pela Observação 3.2 temos que

$$\begin{aligned} P \in \mathcal{P}_M[O, s] &\iff d_M(P, O) = d_M(P, s) \\ &\iff \frac{1}{\sqrt{2}}d_S(\mathcal{R}_{\frac{\pi}{4}}(P), \mathcal{R}_{\frac{\pi}{4}}(O)) = \frac{1}{\sqrt{2}}d_S(\mathcal{R}_{\frac{\pi}{4}}(P), \mathcal{R}_{\frac{\pi}{4}}(s)) \\ &\iff \mathcal{R}_{\frac{\pi}{4}}(P) \in \mathcal{P}_S[O, \mathcal{R}_{\frac{\pi}{4}}(s)] \\ &\iff P \in \mathcal{R}_{-\frac{\pi}{4}}(\mathcal{P}_S[O, \mathcal{R}_{\frac{\pi}{4}}(s)]) \end{aligned}$$

Assim, a parábola na métrica do Máximo com foco $\mathcal{F} = O = (0, 0)$ e diretriz $s : ax + by + c$, é parábola na métrica da Soma com foco $\mathcal{F} = O = (0, 0)$ e diretriz $\mathcal{R}_{\frac{\pi}{4}}(s) : (a - b)x + (a + b)y + \sqrt{2}c = 0$ rotada $\pi/4$ no sentido horário, respectivamente.

Exemplo 6.4. Sejam $\mathcal{F} = (0, 0)$ o foco e $s : 2x + y - 5 = 0$ a reta diretriz, então a parábola da Soma $\mathcal{P}_S[\mathcal{O}, s]$ é dada por

$$\mathcal{P}_S[\mathcal{O}, s] : \begin{cases} 4x + 3y = 5, & x, y \geq 0 \\ y = 5/3, & x \leq 0, y \geq 0 \\ 4x - y = 5, & x, y < 0 \\ y = -5, & x \geq 0, y \leq 0. \end{cases}$$

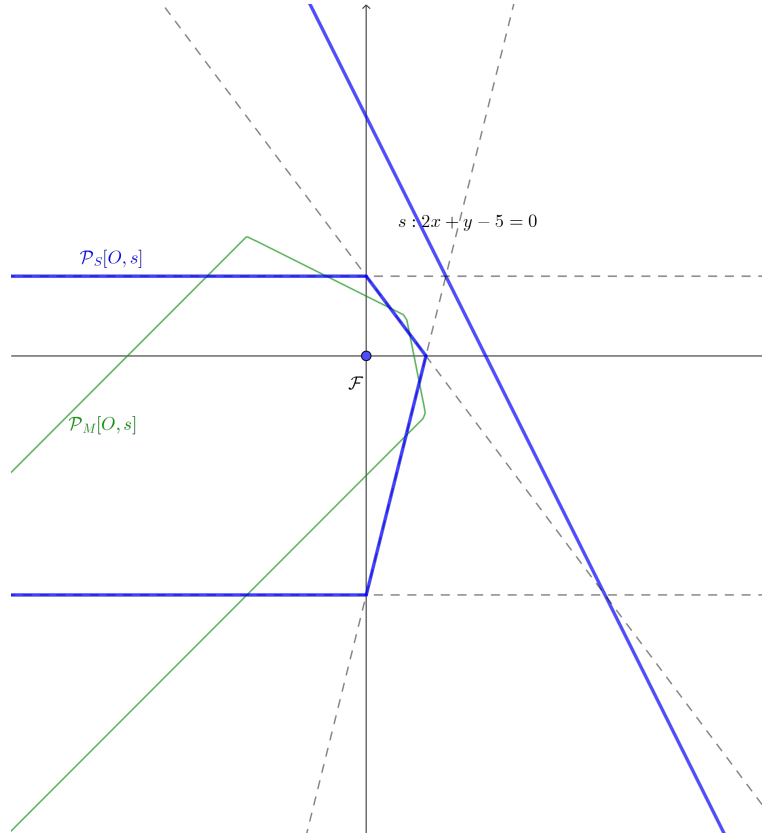


Figura 5: Parábola construída por quadrantes.

Pela Observação 6.3 temos que a parábola na métrica do Máximo $\mathcal{P}_M[\mathcal{O}, s]$ com foco $\mathcal{F} = \mathcal{O} = (0, 0)$ e diretriz $s : 2x + y - 5 = 0$ é a rotação por $\pi/4$ no sentido horário da parábola na métrica da Soma $\mathcal{P}_S[\mathcal{O}, s']$, onde $s' : x + 3y - 5\sqrt{2} = 0$ é a reta rotada por $\pi/4$ no sentido anti-horário (ver Figura 6), respectivamente.

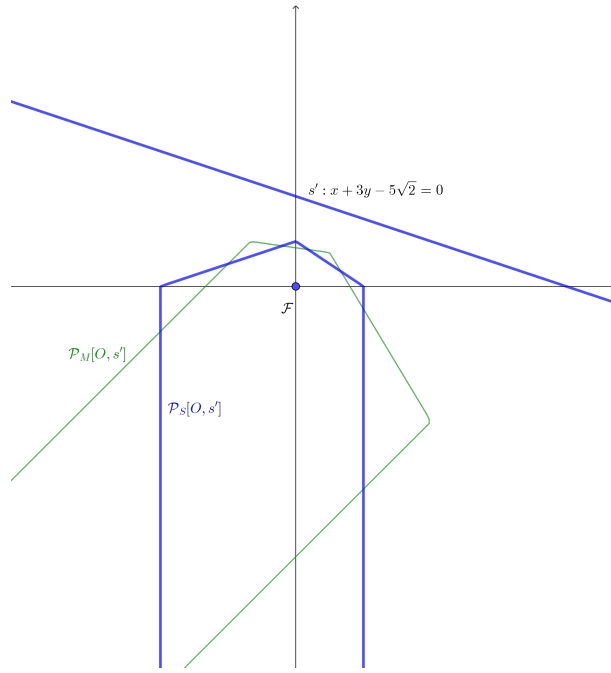


Figura 6: Parábolas com a diretriz rotacionada.

7 A elipse na métrica da Soma e do Máximo

Definição 7.1. Sejam $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ pontos distintos em $\mathbb{R}^2$ e a um número real positivo. Definimos uma *elipse na métrica da Soma*, com focos $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$, como sendo o conjunto formado por todos os pontos $P \in \mathbb{R}^2$ que satisfazem

$$d_S(P, \mathcal{F}_1) + d_S(P, \mathcal{F}_2) = 2a \text{ com } 0 < d_S(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) < 2a. \quad (7.1)$$

Como d_S é invariante por translações, podemos considerar os focos como sendo $\mathcal{F}_1 = (f, g)$ e $\mathcal{F}_2 = -\mathcal{F}_1 = (-f, -g)$. Agora, para $P = (x, y)$, de (7.1), obtemos

$$|x - f| + |y - g| + |x + f| + |y + g| = 2a, \text{ com } 0 < |f| + |g| < a. \quad (7.2)$$

Seja $F(x, y, f, g) = |x - f| + |y - g| + |x + f| + |y + g| - 2a$. Note que F é simétrica em relação ao eixo OX , eixo OY e à origem O , isto é,

$$F(x, y, f, g) = F(-x, y, f, g) = F(x, -y, f, g) = F(-x, -y, f, g). \quad (7.3)$$

O mesmo acontece com f e g , isto é,

$$F(x, y, f, g) = F(x, y, -f, g) = F(x, y, f, -g) = F(x, y, -f, -g). \quad (7.4)$$

Proposição 7.2. Sejam os focos $\mathcal{F}_1 = (f, g)$ e $\mathcal{F}_2 = -\mathcal{F}_1$, $a > |f| + |g|$ e o conjunto no primeiro quadrante

$$\mathcal{E}^I : \begin{cases} x + y = a, & x > |f|, y > |g| \\ x = a - g, & a > x > |f|, 0 < y < |g| \\ y = a - f, & 0 < x < |f|, a > y > |g|. \end{cases}$$

Então a elipse na métrica da Soma $\mathcal{E}_S[(f, g), a]$ de focos $\mathcal{F}_1 = (f, g)$ e $\mathcal{F}_2 = -\mathcal{F}_1$ e $a > |f| + |g|$ é dada por

$$\mathcal{E}_S[(f, g), a] = \mathcal{E}^I \cup \mathcal{E}^{II} \cup \mathcal{E}^{III} \cup \mathcal{E}^{IV},$$

onde $\mathcal{E}^{II} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (-x, y) \in \mathcal{E}^I\}$, $\mathcal{E}^{III} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (-x, -y) \in \mathcal{E}^I\}$ e $\mathcal{E}^{IV} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x, -y) \in \mathcal{E}^I\}$.

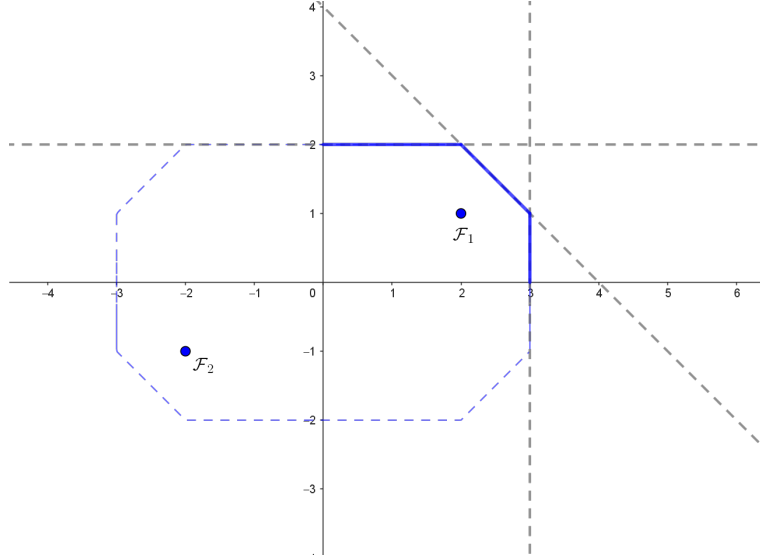


Figura 7: Elipse construída por quadrantes.

Demonstração. Considerando (7.3) e (7.4), basta estudar no quadrante $x \geq 0$ e $y \geq 0$ e, considerar $f, g \geq 0$.

- Se $f = 0$ temos $g > 0$. Daí, de (7.2) tem-se

$$2x + |y - g| + y + g = 2a.$$

Equivalentemente,

$$\begin{aligned} x + y = a & \text{ e } y > g, \\ x = a - g & \text{ e } y < g. \end{aligned}$$

- Se $g = 0$ tem-se $f > 0$. Daí, de (7.2) tem-se

$$|x - f| + x + f + 2y = 2a.$$

Equivalentemente,

$$\begin{aligned} x + y = a & \text{ e } x > f, \\ y = a - f & \text{ e } x < f. \end{aligned}$$

- Se $f > 0$ e $g > 0$. Daí, de (7.2) tem-se

$$|x - f| + x + f + |y - g| + y + g = 2a.$$

Equivalentemente,

$$\begin{cases} x + y = a & \text{ e } x > f, \ y > g, \\ y = a - f & \text{ e } x < f, \ y > g, \\ f + g = a & \text{ e } x < f, \ y < g, \\ x = a - g & \text{ e } x > f, \ y < g. \end{cases} \quad (7.5)$$

Desde que $d_S(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) < 2a$ tem-se $|f| + |g| < a$, portanto, o terceiro caso da equação (7.5) não acontece.

□

Observação 7.3. Pela Observação 3.2 temos que

$$\begin{aligned} P \in \mathcal{E}_M[(f, g), a] & \iff d_M(P, (f, g)) + d_M(P, -(f, g)) = 2a \\ & \iff \frac{1}{\sqrt{2}}d_S(\mathcal{R}_{\frac{\pi}{4}}(P), \mathcal{R}_{\frac{\pi}{4}}((f, g))) + \frac{1}{\sqrt{2}}d_S(\mathcal{R}_{\frac{\pi}{4}}(P), \mathcal{R}_{\frac{\pi}{4}}(-(f, g))) = 2a \\ & \iff \mathcal{R}_{\frac{\pi}{4}}(P) \in \mathcal{E}_S[\mathcal{R}_{\frac{\pi}{4}}((f, g)), \sqrt{2}a] \\ & \iff P \in \mathcal{R}_{-\frac{\pi}{4}}\left(\mathcal{E}_S[\mathcal{R}_{\frac{\pi}{4}}((f, g)), \sqrt{2}a]\right) \end{aligned}$$

Portanto, a elipse na métrica do Máximo com focos $\mathcal{F}_1 = (f, g)$ e $\mathcal{F}_2 = -\mathcal{F}_1$, é uma elipse na métrica da Soma com focos $\mathcal{R}_{\frac{\pi}{4}}(\mathcal{F}_1)$ e $\mathcal{R}_{\frac{\pi}{4}}(\mathcal{F}_2)$ (ver Figura 8).

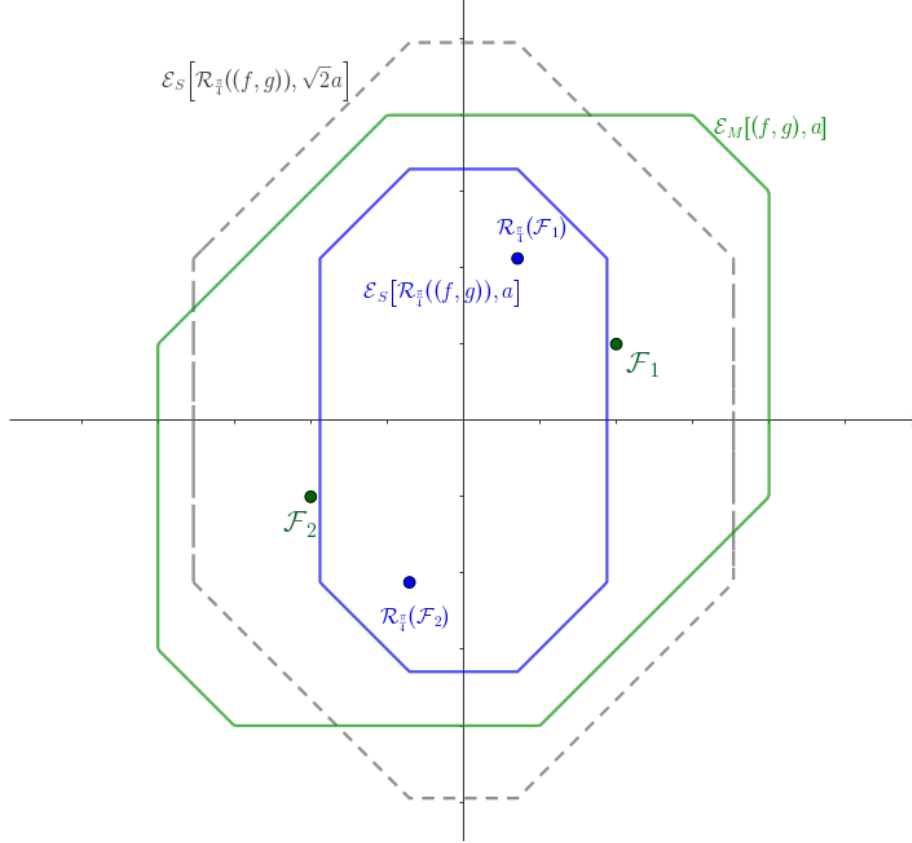


Figura 8: Elipse do Máximo por homotetia e rotação.

8 A hipérbole na métrica da Soma e do Máximo

Definição 8.1. Sejam $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ pontos distintos em $\mathbb{R}^2$ e a um número real positivo. Definimos uma *hipérbole na métrica da Soma*, com focos $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$, como sendo o conjunto formado por todos os pontos $P \in \mathbb{R}^2$ que satisfazem

$$|d_S(P, \mathcal{F}_1) - d_S(P, \mathcal{F}_2)| = 2a \text{ com } d_S(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) > 2a. \quad (8.1)$$

Novamente, como d_S é invariante por translações, podemos considerar os focos como sendo $\mathcal{F}_1 = (f, g)$ e $\mathcal{F}_2 = -\mathcal{F}_1 = (-f, -g)$. Assim para $P = (x, y)$, de (8.1), obtemos

$$|x - f| + |y - g| - |x + f| - |y + g| = 2a, \text{ com } |f| + |g| > a. \quad (8.2)$$

Seja $G(x, y, f, g) = ||x - f| + |y - g| - |x + f| - |y + g|| - 2a$. Note que G é simétrica em relação à origem O , tanto nas variáveis x, y como nas variáveis f, g , isto é,

$$G(x, y, f, g) = G(-x, -y, f, g) = G(x, y, -f, -g). \quad (8.3)$$

Portanto, de (8.3) e (8.2), basta estudar o semi espaço $y \geq 0$ e, considerar $g \geq 0$.

1. Se $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Suponha $f, g \geq 0$:

- Se $f = 0$ então $g > a > 0$. Assim, por (8.2), temos

$$||y - g| - y - g| = 2a.$$

Equivalentemente,

$$\begin{aligned} g = a & \quad \text{e} \quad y > g, \\ y = a & \quad \text{e} \quad y < g. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Note que, (8.4) não acontece pois $g > a$.

- Se $g = 0$ temos $f > a > 0$. Assim, por (8.2), temos

$$||x - f| - x + f| = 2a.$$

Equivalentemente,

$$\begin{aligned} x = a & \quad \text{e} \quad x < f, \\ f = a & \quad \text{e} \quad x > f. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Note que, (8.5) não acontece pois $f > a$.

- Se $f, g > 0$ então $f + g > a$. Daí, por (8.2), obtemos

$$||x - f| + |y - g| - x - f - y - g| = 2a.$$

Equivalentemente,

$$f + g = a \quad \text{e} \quad x > f, \quad y > g, \quad (8.6)$$

$$x = a - g \quad \text{e} \quad x < f, \quad y > g,$$

$$x + y = a \quad \text{e} \quad x < f, \quad y < g,$$

$$y = a - f \quad \text{e} \quad x > f, \quad y < g. \quad (8.7)$$

Observe que, (8.6) não acontece e (8.7) só acontece se $a > f$.

Suponha agora $f < 0$ e $g \geq 0$:

- Se $g = 0$ então $-f > a > 0$. Por (8.2), temos

$$|x - f - |x + f|| = 2a.$$

Equivalentemente,

$$\begin{aligned} x = a & \text{ e } x < -f, \\ -f = a & \text{ e } x > -f. \end{aligned} \tag{8.8}$$

Note que, (8.8) não acontece pois $-f > a$.

- Se $f < 0$ e $g > 0$ então $-f + g > a$. Daí, por (8.2), obtemos

$$|x - f + |y - g| - |x + f| - y - g| = 2a.$$

Equivalentemente,

$$\begin{aligned} |f + g| = a & \text{ e } x > -f, \ y > g, \\ |x - g| = a & \text{ e } x < -f, \ y > g, \\ |x - y| = a & \text{ e } x < -f, \ y < g, \\ |y + f| = a & \text{ e } x > -f, \ y < g. \end{aligned}$$

2. Se $x \leq 0$ e $y \geq 0$. Suponha $f, g \geq 0$:

- Se $f = 0$ então $g > a > 0$. Assim, por (8.2), temos

$$||y - g| - y - g| = 2a.$$

Como no primeiro caso do item 1 temos a solução

$$y = a \text{ e } y < g.$$

- Se $g = 0$ temos $f > a > 0$. Assim, por (8.2), temos

$$|-x + f - |x + f|| = 2a.$$

Equivalentemente,

$$\begin{aligned} f = a & \text{ e } x < -f, \\ x = -a & \text{ e } x > -f. \end{aligned} \tag{8.9}$$

Note que, (8.9) não acontece pois $f > a$.

- Se $f, g > 0$ então $f + g > a$. Daí, por (8.2), obtemos

$$|-x + f + |y - g| - |x + f| - y - g| = 2a.$$

Equivalentemente,

$$\begin{aligned} |x + g| = a & \text{ e } x > -f, \ y > g, \\ |f - g| = a & \text{ e } x < -f, \ y > g, \\ |y - f| = a & \text{ e } x < -f, \ y < g, \\ |x + y| = a & \text{ e } x > -f, \ y < g. \end{aligned}$$

Suponha agora $f < 0$ e $g \geq 0$:

- Se $g = 0$ então $-f > a > 0$. Por (8.2), temos

$$||x - f| + x + f| = 2a.$$

Equivalentemente,

$$\begin{aligned} -f = a & \text{ e } x < f, \\ x = -a & \text{ e } x > f. \end{aligned} \tag{8.10}$$

Note que, (8.10) não acontece pois $-f > a$.

- Se $f < 0$ e $g > 0$ então $-f + g > a$. Daí, por (8.2), obtemos

$$||x - f| + |y - g| + x + f - y - g| = 2a.$$

Equivalentemente,

$$x = g - a \text{ e } x > f, \ y > g, \tag{8.11}$$

$$-f + g = a \text{ e } x < f, \ y > g, \tag{8.12}$$

$$y = a + f \text{ e } x < f, \ y < g,$$

$$y - x = a \text{ e } x > f, \ y < g.$$

Note que, (8.12) não acontece e (8.11) só acontece se $a \leq g$.

Observação 8.2. Em relação a hipérbole, elipse e parábola na métrica do Máximo, temos a seguinte equivalência,

$$|d_M(P, \mathcal{F}_1) - d_M(P, \mathcal{F}_2)| = 2a \iff |d_S(\mathcal{R}_{\frac{\pi}{4}}(P), \mathcal{R}_{\frac{\pi}{4}}(\mathcal{F}_1)) - d_S(\mathcal{R}_{\frac{\pi}{4}}(P), \mathcal{R}_{\frac{\pi}{4}}(\mathcal{F}_2))| = 2\sqrt{2}a.$$

Portanto, a hipérbole na métrica do Máximo com focos $\mathcal{F}_1 = (f, g)$ e $\mathcal{F}_2 = -\mathcal{F}_1$, é uma hipérbole na métrica da Soma com focos $\mathcal{R}_{\frac{\pi}{4}}(\mathcal{F}_1)$ e $\mathcal{R}_{\frac{\pi}{4}}(\mathcal{F}_2)$ rotada por $\pi/4$ no sentido anti-horário.

A seguir, nas Figuras 9a-9d e 10a-10f, são apresentados gráficos de Hipérboles da Soma (em azul) e do Máximo (em verde) para uma melhor compreensão desta seção.

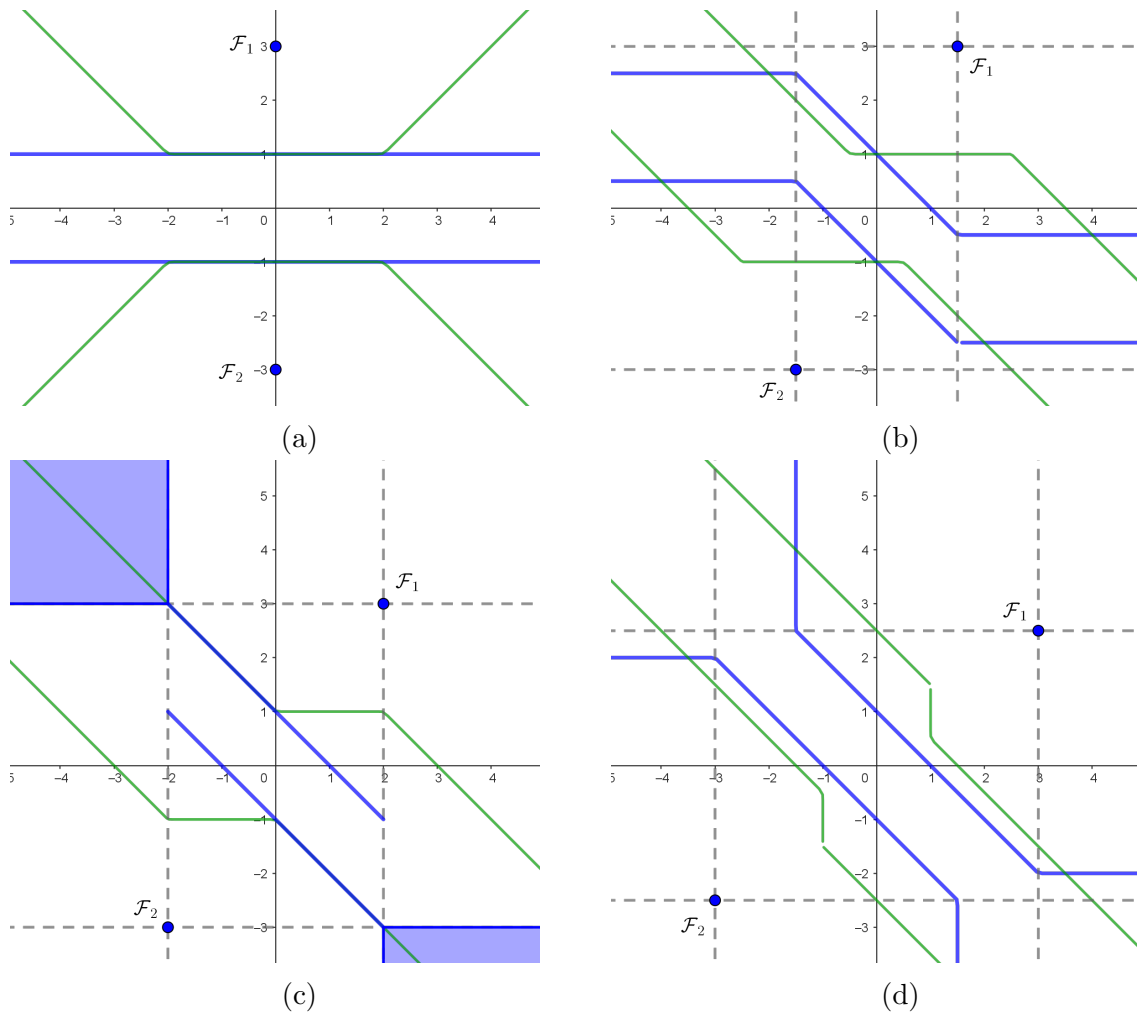


Figura 9: Hipérboles da Soma.

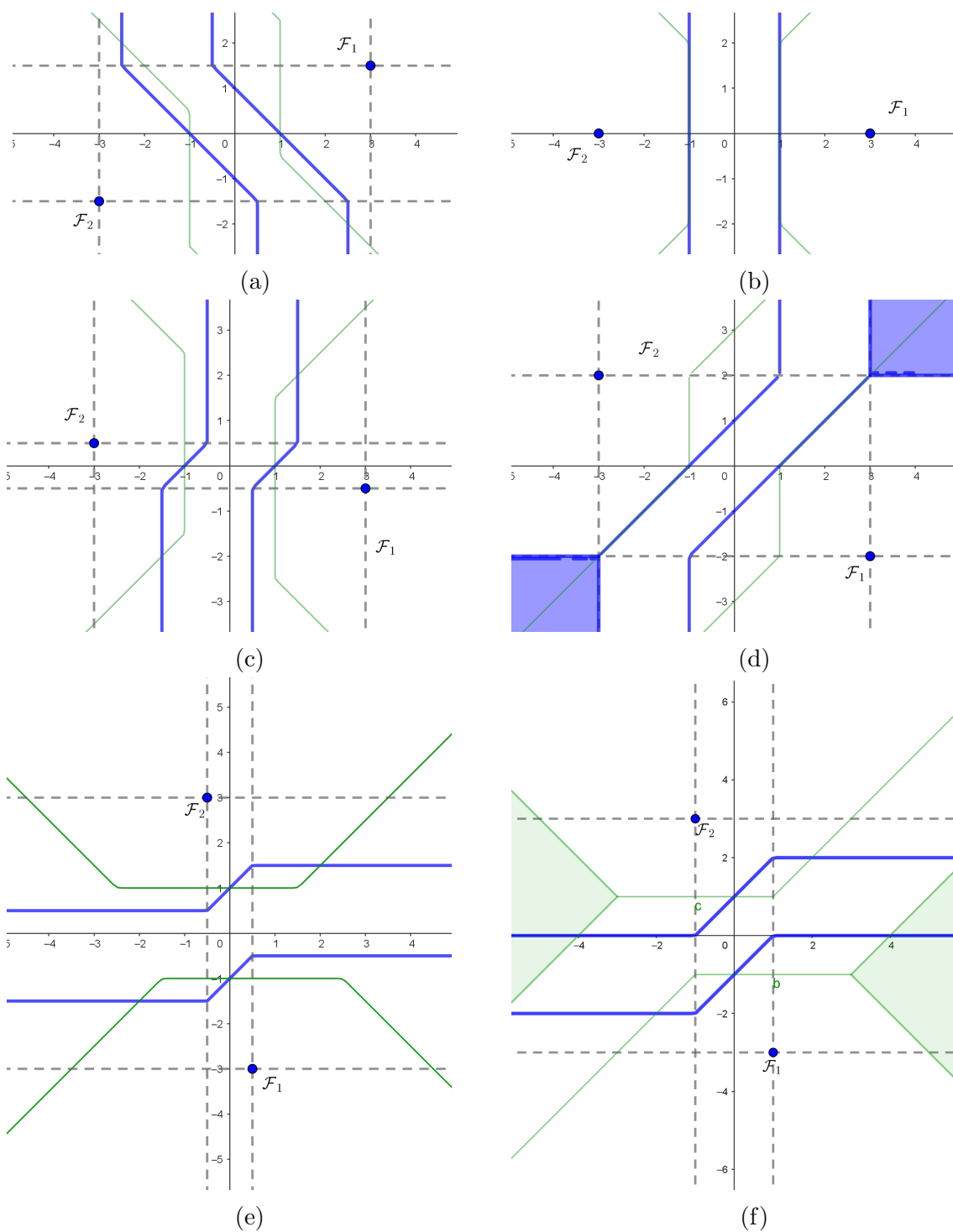


Figura 10: Hipérboles da Soma.

9 Considerações finais

Neste trabalho, identificamos uma relação relevante entre as métricas da Soma e do Máximo, conforme estabelecido no Teorema 3.5. Demonstramos que é possível recuperar uma métrica a partir da outra por meio de uma composição de uma rotação e/ou uma homotetia. Com este resultado, o presente trabalho focou esforços no estudo da métrica da Soma, pois no caso da métrica do Máximo bastaria realizar uma rotação e uma homotetia. Assim, apresentamos uma demonstração alternativa da fórmula da distância de um ponto a uma reta, como descrito em [7]. Também caracterizamos as cônicas utilizando as métricas da Soma e do Máximo, proporcionando uma nova perspectiva sobre essas curvas geométricas. Observamos que em alguns casos, as hipérboles na métrica da Soma e do Máximo são a união de segmentos, semirretas e espaços abertos (ver Figuras 9c, 10d e 10f). Para facilitar a compreensão dos conceitos discutidos, incluímos gráficos gerados com o software livre GeoGebra 5.0, que foram fundamentais para a visualização e análise das propriedades geométricas abordadas.

Agradecimentos

O primeiro autor agradece o apoio financeiro de UNILA - Edital nro 77/2022/PRPPG-UNILA - PAAP (Nro do Protocolo: 23422.013564/2022-71). O segundo autor agradece o apoio financeiro de UNILA - Edital nro 121/2023/PRPPG-UNILA - PAAP (Nro do Protocolo: 23422.026477/2023-54). Os autores também agradecem aos revisores anônimos pelos seus comentários e sugestões valiosas, que melhoraram significativamente o manuscrito.

Referências

- [1] Boyer, Carl. B. *História da matemática*. Edgard Blücher. 1.ed. São Paulo, 1996. viii+496 pp.
- [2] Eves, Howard. *Introdução à história da matemática*. Unicamp, Campinas, 2004. xv+ 843 pp.
- [3] Heath, Thomas. *Apollonius of Perga treatise on conic sections (edited in modern notation)*. Cambridge University Press, Cambridge, 1896. xvi+ 245 pp.
- [4] Hrycyk, Márcio. *Cônicas e métricas em $\mathbb{R}^2$* . Dissertação (Mestrado Profissional) - Programa de Pós-Graduação em Matemática, mestrado profissional, do Instituto

de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, São Paulo, 2019.

- [5] Krause, Eugene F. *Taxicab Geometry: An Adventure in Non-Euclidean Geometry*. Dover-Publications. 1. ed., New York, 1987. vii+88 pp.
- [6] Lima, Elon L. *Espaços Métricos*. Projeto Euclides - IMPA. 4. ed., Rio de Janeiro, 2011. ix+299 pp.
- [7] Mosquera, John E. M. *Lugares geométricos de curvas na métrica da Soma e do Máximo*. Trabalho de Conclusão de Curso (Matemática - Licenciatura) - Universidade Federal da Integração Latino-Americana, Paraná, 2024.

Recebido em 23 de Maio de 2024

Revisado em 13 de Julho de 2024

Aceito em 05 de Agosto de 2024