

**SOBRE CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE PARA NÚMEROS
NATURAIS EM UMA BASE QUALQUER****ON DIVISIBILITY CRITERIA FOR NATURAL NUMBERS IN ANY BASIS**

João Luzeilton de Oliveira

Universidade Estadual do Ceará (UECE)

joao.luzeilton@uece.brHandled by M. Alegri**Resumo**

Este artigo tem como objetivos discutir e estabelecer critérios de divisibilidade para um número natural escrito numa base qualquer e, conseqüentemente, contribuir para a formação do professor de Matemática. As demonstrações foram feitas usando apenas argumentos elementares de Aritmética, porém, com precisão, formalismo e rigor matemático, como requer um trabalho que tenha como foco o professor de Matemática. Inicialmente, na base 10, apresentamos os critérios comuns: aqueles que estão nos livros de Matemática do 6º ano do Ensino Fundamental e, outros, não comuns, que não figuram nesses livros e, geralmente, não são do conhecimento do professor. Entretanto, para a formação do professor de Matemática e dos licenciandos em Matemática, é de fundamental importância conhecê-los. O resultado principal deste trabalho é um teorema que fornece um critério geral de divisibilidade, a partir do qual podem ser obtidas condições de divisibilidade por qualquer número natural que seja primo com a base do sistema de numeração.

Palavras-chave: Professor de Matemática; Critérios de divisibilidade; Aritmética; Rigor matemático; Sistema de numeração.

Abstract

This article aims to discuss and establish divisibility criteria for a natural number written in any base and, consequently, contribute to the Mathematics teacher training. The demonstrations were done using only elementary arguments of Arithmetic, however, with precision, formalism and mathematical rigor, as required by work that focuses on the Mathematics teacher. Initially, in base 10, we present the common criteria: those that are in the Mathematics books of the 6th year of Elementary School and,

others, not common, that do not appear in these books and, generally, are not known to the teacher. Nonetheless, for the training of Mathematics teachers and Mathematics graduates, it is essential to know them. The main result of this work is a theoretical scheme that provides a general divisibility criterion, from which conditions of divisibility by any natural number that is prime with the base of the numbering system.

Keywords: Mathematics Teacher; Divisibility Criteria; Arithmetic; Mathematical Rigor; Numbering System.

1 Introdução

Neste artigo, estabeleceremos critérios de divisibilidade para números naturais numa base qualquer de um sistema de numeração posicional. Serão apresentados critérios de divisibilidade que figuram nos livros didáticos, de acordo com [1], bem como outros que, em geral, não figuram nesses livros. Outros critérios diferentes, tanto na base 10 quanto em outras bases, que não são comuns a alunos e professores, também serão discutidos.

Para justificar a validade dos critérios comuns e não comuns, usaremos argumentos simples da Aritmética Elementar, porém, com formalismo e rigor matemático devidos, necessários à formação do professor de Matemática da Educação Básica.

Os critérios de divisibilidade para um número natural N numa base genérica $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$, que estudaremos aqui, serão apresentados em quatro estratégias:

- i) Critérios de divisibilidade por potências inteiras de b^k ;
- ii) Critérios de divisibilidade por potências inteiras de números primos que compõem a base;
- iii) Critérios de divisibilidade por $b - 1$ e $b + 1$;
- iv) Critério geral de divisibilidade.

O teorema a seguir, nos diz como representar um número natural numa base qualquer de um sistema de numeração, e sua demonstração encontra-se em [2] ou em [4].

Teorema 1.1. *Seja $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$. Dado $N \in \mathbb{N}$, existem únicos $r_0, r_1, \dots, r_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tais que*

$$N = r_n \cdot b^n + r_{n-1} \cdot b^{n-1} + \dots + r_2 \cdot b^2 + r_1 \cdot b + r_0, \quad (1.1)$$

com $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $r_i \in \{0, 1, 2, \dots, b - 1\}$, $\forall i \in \mathbb{Z}$, $0 \leq i \leq n$, e $r_n \neq 0$.

O número N , em (1.1), pode ser escrito em sua forma posicional, como

$$N = (r_n r_{n-1} \dots r_2 r_1 r_0)_b, \quad (1.2)$$

em que o índice b significa que N foi escrito na base b , e cada $r_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ representa uma das $n + 1$ ordens de N .

Na divisão de N por $d \in \mathbb{N}$, duas questões surgem: 1ª) quando N é divisível por d ? 2ª) é possível saber, sem efetuar a divisão, se N é ou não divisível por d ? Para a primeira questão, relativa à divisibilidade entre dois números naturais, temos a seguinte:

Definição 1.2. *Dados $a, b \in \mathbb{N}$, dizemos que a é divisível por b quando existe um $c \in \mathbb{N}$ tal que $a = b \cdot c$. Simbolicamente, escrevemos:*

$$b \mid a \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{N} \text{ tal que } a = b \cdot c.$$

Uma propriedade importante da divisibilidade, que será útil na justificativa dos critérios de divisibilidade, nos diz que: se $a, b, c \in \mathbb{N}$, $a > c$, então

$$b \mid a \text{ e } b \mid c \Rightarrow b \mid (a \pm c). \quad (1.3)$$

Quanto à segunda questão, existem condições mínimas que, sem efetuar a divisão, nos garantem que um certo número natural é divisível por outro: são os critérios de divisibilidade, os quais serão definidos assim:

Definição 1.3. *Um critério de divisibilidade é um conjunto de regras que permitem, sem a necessidade de efetuar a divisão entre dois números naturais, reconhecer se o primeiro desses números é divisível ou não pelo segundo.*

Conforme as estratégias i) - iv), serão apresentados critérios de divisibilidade por $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$, para um número $N \in \mathbb{N}$ escrito numa base genérica $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$.

2 Critérios comuns de divisibilidade

Estabeleceremos critérios de divisibilidade de N , na base b , por potências inteiras da base b^k , por potências inteiras de primos que compõem a base, e por $b - 1$ e por $b + 1$.

2.1 Critérios de divisibilidade baseados nos últimos algarismos de um número natural

Os critérios apresentados a seguir dizem que, para estudar a divisibilidade de N por d , basta discutir a divisibilidade por d do número formado pelos últimos algarismos de N .

Critério 2.1. *Seja $N \in \mathbb{N}$, como em (1.2). Para todo $k \in \mathbb{N}$, $0 < k < n$, tem-se que*

$$b^k \mid N \Leftrightarrow b^k \mid (r_{k-1} \dots r_0)_b. \quad (2.1)$$

Demonstração. Sabemos que $N = (r_n \dots r_0)_b$, por (1.2). Assim, para todo $k \in \mathbb{N}$, $0 < k < n$, N pode ser escrito como

$$N = (r_n \dots r_k)_b \cdot b^k + (r_{k-1} \dots r_0)_b, \quad (2.2)$$

em que $(r_{k-1} \dots r_0)_b$ é o número formado pelos k últimos algarismos de N . Como $b^k \mid (r_n \dots r_k)_b \cdot b^k$, segue de (1.3) e (2.2), que $b^k \mid N \Leftrightarrow b^k \mid (r_{k-1} \dots r_0)_b$. \square

Em (2.2), com $b = 10$, temos que $10^k \mid (r_n \dots r_k) \cdot 10^k$, $2^k \mid (r_n r \dots r_k) \cdot 10^k$ e $5^k \mid (r_n \dots r_k) \cdot 10^k$. Estudaremos, usando (2.2) e (1.3), critérios de divisibilidade de N por potências b^k , das bases $b = 10$, $b = 8$ e $b = 12$.

2.1.1 $b=10$

Do que foi discutido acima, seguem critérios de divisibilidade de N por 10^k , por 2^k e por 5^k , $k = 1, 2, 3$:

1. Critério de divisibilidade por 10:

$$10 \mid N \Leftrightarrow r_0 = 0.$$

2. Critério de divisibilidade por 10^2 :

$$10^2 \mid N \Leftrightarrow r_1 = r_0 = 0.$$

3. Critério de divisibilidade por 10^3 :

$$10^3 \mid N \Leftrightarrow r_2 = r_1 = r_0 = 0.$$

4. Critério de divisibilidade por 2:

$$2 \mid N \Leftrightarrow r_0 \in \{0, 2, 4, 6, 8\}.$$

5. Critério de divisibilidade por 2^2 :

$$2^2 \mid N \Leftrightarrow r_1 = r_0 = 0 \text{ ou } 2^2 \mid (r_1 r_0).$$

6. **Cr terio de divisibilidade por 2^3 :**

$$2^3 \mid N \Leftrightarrow r_2 = r_1 = r_0 = 0 \text{ ou } 2^3 \mid (r_2 r_1 r_0).$$

7. **Cr terio de divisibilidade por 5:**

$$5 \mid N \Leftrightarrow r_0 \in \{0, 5\}.$$

8. **Cr terio de divisibilidade por 5^2 :**

$$5^2 \mid N \Leftrightarrow r_1 = r_0 = 0 \text{ ou } 5^2 \mid (r_1 r_0).$$

9. **Cr terio de divisibilidade por 5^3 :**

$$5^3 \mid N \Leftrightarrow r_2 = r_1 = r_0 = 0 \text{ ou } 5^3 \mid (r_2 r_1 r_0).$$

Para as demais pot ncias de 2, 5 e 10, outros cr terios de divisibilidade podem ser estabelecidos, bastando para isso, tomar $k \in \mathbb{N}$, $k > 3$, em (2.2).

2.1.2 $b=8$

Para escrever N na base $8 = (10)_8$, tomamos $r_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Fazendo $b = 8$, em (2.2), como $8^k \mid (r_n \dots r_k)_8 \cdot 8^k$, tem-se $8^k \mid N \Leftrightarrow 8^k \mid (r_{k-1} \dots r_0)_8$, de (2.2) e (1.3). Seguem, portanto, cr terios de divisibilidade de N , na base 8, por 8, por 8^2 e por 8^3 :

1. **Cr terio de divisibilidade por $8 = (10)_8$:**

$$8 \mid N \Leftrightarrow r_0 = 0.$$

2. **Cr terio de divisibilidade por 8^2 :**

$$8^2 \mid N \Leftrightarrow r_1 = r_0 = 0.$$

3. **Cr terio de divisibilidade por 8^3 :**

$$8^3 \mid N \Leftrightarrow r_2 = r_1 = r_0 = 0.$$

Pondo $k = 1$ em (2.2), N pode ser escrito da seguinte maneira:

$$N = (r_n \dots r_1)_8 \cdot (10)_8 + r_0. \tag{2.3}$$

Em (2.3), tem-se que $2 \mid (r_n \dots r_1)_8 \cdot (10)_8$ e $4 \mid (r_n \dots r_1)_8 \cdot (10)_8$, pois $(10)_8 = 2_8 \cdot 4_8$ (ver Tabela 1) e, portanto, $2 \mid N \Leftrightarrow 2 \mid r_0$ e $2^2 \mid N \Leftrightarrow 2^2 \mid r_0$, por (1.3). Seguem, assim, as condi es de divisibilidade de N , na base 8, por 2 e por 2^2 :

1. **Cr terio de divisibilidade por 2:**

$$2 \mid N \Leftrightarrow r_0 \in \{0, 2, 4, 6\}.$$

2. **Cr terio de divisibilidade por 2^2 :**

$$2^2 \mid N \Leftrightarrow r_0 \in \{0, 4\}.$$

2.1.3 $b = 12$

Usaremos os s mbolos $r_i \in \{0, 1, \dots, \alpha = 10, \beta = 11\}$ para escrever N na base $12 = (10)_{12}$. Em (2.2), com $b = 12$, tem-se $12^k \mid (r_n \dots r_k)_{12} \cdot 12^k$, e assim, de (1.3), segue que $12^k \mid N \Leftrightarrow 12^k \mid (r_{k-1} \dots r_0)_{12}$. Temos, portanto, os seguintes cr terios de divisibilidade de N , na base 12, por $12 = (10)_{12}$, por 12^2 e por 12^3 :

1. **Cr terio de divisibilidade por $12 = (10)_{12}$:**

$$12 \mid N \Leftrightarrow r_0 = 0.$$

2. **Cr terio de divisibilidade por 12^2 :**

$$12^2 \mid N \Leftrightarrow r_1 = r_0 = 0.$$

3. **Cr terio de divisibilidade por 12^3 :**

$$12^3 \mid N \Leftrightarrow r_2 = r_1 = r_0 = 0.$$

Em (2.2), pondo $k = 1$, N pode ser escrito assim:

$$N = (r_n \dots r_1)_{12} \cdot (10)_{12} + r_0. \tag{2.4}$$

Como $2_{12} \cdot 6_{12} = (10)_{12}$ e $3_{12} \cdot 4_{12} = (10)_{12}$ (ver Tabela 2), seguem de (1.3) e (2.4), os cr terios de divisibilidade de N por 2, por 4, por 3 e por 6, na base $12 = (10)_{12}$:

1. **Cr terio de divisibilidade por 2:**

$$2 \mid N \Leftrightarrow r_0 \in \{0, 2, 4, 6, 8, \alpha\}.$$

2. **Cr terio de divisibilidade por 4:**

$$4 \mid N \Leftrightarrow r_0 \in \{0, 4, 8\}.$$

3. Critério de divisibilidade por 3:

$$3 \mid N \Leftrightarrow r_0 \in \{0, 3, 6, 9\}.$$

4. Critério de divisibilidade por 6:

$$6 \mid N \Leftrightarrow r_0 \in \{0, 6\}.$$

Pondo $k = 2$ em (2.2), N pode ser escrito da seguinte maneira:

$$N = (r_n \dots r_2)_{12} \cdot (10)_{12}^2 + (r_1 r_0)_{12}. \quad (2.5)$$

Como $(10)_{12}^2 = (16)_{12} \cdot 8_{12}$ e $(10)_{12}^2 = (14)_{12} \cdot 9_{12}$, temos que $8 \mid (r_n \dots r_2)_{12} \cdot (10)_{12}^2$ e $9 \mid (r_n \dots r_2)_{12} \cdot (10)_{12}^2$. Assim, de (2.5) e (1.3), seguem as condições de divisibilidade de N , na base $12 = (10)_{12}$, por 8 e por 9:

a) Critério de divisibilidade por 8:

$$8 \mid N \Leftrightarrow r_1 = r_0 = 0 \text{ ou } 8 \mid (r_1 r_0)_{12}.$$

b) Critério de divisibilidade por 9:

$$9 \mid N \Leftrightarrow r_1 = r_0 = 0 \text{ ou } 9 \mid (r_1 r_0)_{12}.$$

Exemplo 2.2. Neste exemplo, testaremos os critérios descritos acima:

- a) Os números $(1342)_8$, $(1344)_8$ e $(1430)_8$ são divisíveis, respectivamente, por 2, por 4 e por 8; $(1346)_8$ não é divisível por 4, pois, $(1346)_8 = (271)_8 \cdot 4_8 + 2_8$.
- b) $(1236)_{12}$ é divisível por 2, por 3 e por 6; e $(1234)_{12}$ é divisível por 4.
- c) Os números $(3\alpha 100)_{12}$ e $(\beta 1920)_{12}$ são divisíveis por 8, e os números $(3\beta 500)_{12}$ e $(\alpha 4\alpha 39)_{12}$ são divisíveis por 9.

2.2 Critérios de divisibilidade baseados na soma dos algarismos e na soma alternada dos algarismos de um número natural

Daremos as condições para que N , na base b , seja divisível por $b-1$ e por $b+1$. Antes de estudá-las, apresentaremos duas proposições que nos ajudarão a validar essas condições.

Proposição 2.3. Dado $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$, para todo $n \in \mathbb{N}$, são válidas as seguintes afirmações:

a) $b^n = \underbrace{((b-1) \dots (b-1))}_n b + 1;$

b) $b^n = (1 \underbrace{0 \dots 0}_n 1)_b - 1.$

Demonstração. a) Para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $b^n = (b^n - 1) + 1$. Daí,

$$b^n = [(b-1) \cdot b^{n-1} + (b-1) \cdot b^{n-2} + \dots + (b-1) \cdot b^1 + (b-1) \cdot b^0] + 1.$$

De (1.1), segue que $b^n = \underbrace{((b-1) \dots (b-1))}_n b + 1.$

b) Como $b^n = (b^n + 1) - 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $b^n = [(1 \cdot b^{n-1} + 0 \cdot b^{n-2} + \dots + 0 \cdot b^1 + 0 \cdot b^0) + 1] - 1$. De (1.1), segue que $b^n = ((1 \underbrace{0 \dots 0}_n 0)_b + 1) - 1 = (1 \underbrace{0 \dots 0}_{n-1} 0 1)_b - 1. \quad \square$

Proposição 2.4. Dado $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$, para todo $n \in \mathbb{N}$, são válidas as seguintes afirmações:

a) $b-1 \mid \underbrace{((b-1) \dots (b-1))}_n b;$

b) $b+1 \mid \underbrace{((b-1) \dots (b-1))}_n b, \text{ para todo } n \text{ par};$

c) $b+1 \mid (1 \underbrace{0 \dots 0}_n 1)_b, \text{ para todo } n \text{ par}.$

Demonstração. a) Segue do item a), Proposição 2.3, e de (1.1) que

$$\underbrace{((b-1) \dots (b-1))}_n b = b^n - 1 = (b-1) \cdot (b^{n-1} + b^{n-2} + \dots + b + 1).$$

b) Se $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, então $b^{2k} - 1 = \underbrace{((b-1) \dots (b-1))}_{2k} b$, pelo item a), Proposição 2.3.

Como $b^{2k} - 1 = (b^2)^k - 1$, temos que

$$\underbrace{((b-1) \dots (b-1))}_{2k} b = (b-1) \cdot (b+1) \cdot (b^{2k-2} + b^{2k-4} + \dots + 1).$$

c) Seja $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$. Do item b), Proposição 2.3, segue que

$$\begin{aligned} (1\underbrace{0\dots 0}_{{2k \text{ 0's}}}1)_b &= b^{2k+1} + 1 \\ &= (b+1) \cdot (b^{2k} - b^{2k-1} + \dots - b^{2k-(2k-1)} + 1). \end{aligned}$$

□

Crítério 2.5. Dado $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$, temos que:

a) $b - 1 \mid N \Leftrightarrow b - 1 \mid r_n + \dots + r_0$;

b) $b + 1 \mid N \Leftrightarrow b + 1 \mid r_0 - r_1 + r_2 - r_3 + \dots + (-1)^n r_n$.

Demonstração. a) Usando o item a) da Proposição 2.3, podemos escrever N , em (1.1), como

$$\begin{aligned} N = [r_n \cdot (\underbrace{(b-1)\dots(b-1)}_{n \text{ (b-1)'s}})_b + \dots + r_2 \cdot ((b-1)(b-1))_b + r_1 \cdot (b-1)_b] + \\ + (r_n + \dots + r_1 + r_0). \end{aligned}$$

Portanto, $b - 1 \mid N \Leftrightarrow b - 1 \mid r_n + \dots + r_0$.

b) Sendo $i \in \mathbb{N}$, temos, pela Proposição 2.3, que $b^i = (\underbrace{(b-1)\dots(b-1)}_{i \text{ (b-1)'s}})_b + 1$, quando i é par, e $b^i = (1\underbrace{0\dots 0}_{{i-1 \text{ 0's}}}1)_b - 1$, quando i é ímpar. Substituindo b^i em (1.1), conforme a paridade de i , concluímos que $b + 1 \mid N \Leftrightarrow b + 1 \mid r_0 - r_1 + r_2 - r_3 + \dots + (-1)^n r_n$. □

Apresentaremos, agora, condições de divisibilidade para um número N escrito nas bases $b = 10$, $b = 8$ e $b = 12$, usando o critério de divisibilidade 2.5.

2.2.1 $b = 10$

Dado o item a), Proposição 2.3, segue um critério de divisibilidade de N por 3. Do critério de divisibilidade 2.5, seguem critérios de divisibilidade de N por 9 e por 11. Temos, assim, os seguintes critérios de divisibilidade de N , na base 10, por 3, por 9 e por 11:

1. Critério de divisibilidade por 3:

$$3 \mid N \Leftrightarrow 3 \mid r_n + \dots + r_0.$$

2. **Cr terio de divisibilidade por 9:**

$$9 \mid N \Leftrightarrow 9 \mid r_n + \dots + r_0.$$

3. **Cr terio de divisibilidade por 11:**

$$11 \mid N \Leftrightarrow 11 \mid r_0 - r_1 + r_2 - r_3 + \dots + (-1)^n r_n.$$

2.2.2 $b = 8$

Condi es de divisibilidade de N por 7 e por $9 = (11)_8$, na base $8 = (10)_8$, podem ser obtidas do crit rio de divisibilidade 2.5:

1. **Cr terio de divisibilidade por 7:**

$$7 \mid N \Leftrightarrow 7 \mid r_n + \dots + r_0.$$

2. **Cr terio de divisibilidade por $9 = (11)_8$:**

$$9 \mid N \Leftrightarrow 9 \mid r_0 - r_1 + r_2 - r_3 + \dots + (-1)^n r_n.$$

2.2.3 $b = 12$

Do crit rio de divisibilidade 2.5, seguem as condi es de divisibilidade de N , na base $12 = (10)_{12}$, por $\beta = 11$ e por $13 = (11)_{12}$:

1. **Cr terio de divisibilidade por $\beta = 11$:**

$$11 \mid N \Leftrightarrow 11 \mid r_n + \dots + r_0.$$

2. **Cr terio de divisibilidade por $12 = (11)_{12}$:**

$$13 \mid N \Leftrightarrow 13 \mid r_0 - r_1 + r_2 - r_3 + \dots + (-1)^n r_n.$$

Exemplo 2.6. Neste exemplo, testaremos alguns dos crit rios de divisibilidade acima.

- a) $N = (1231)_8$   divis vel por 7, pois, $1_8 + 2_8 + 3_8 + 1_8 = 7_8 = 1_8 \cdot 7_8$.
- b) O n mero $N = (73764)_8$   divis vel por $(11)_8$, pois, $(7_8 + 7_8 + 4_8) - (3_8 + 6_8) = (22)_8 - (11)_8 = (11)_8 = 1_8 \cdot (11)_8$.
- c) $(3251)_{12}$   divis vel por β , pois, $3_{12} + 2_{12} + 5_{12} + 1_{12} = \beta_{12}$; $(\alpha 5 \beta \alpha 8)_{12}$  , tamb m, divis vel por β , pois, $\alpha_{12} + 5_{12} + \beta_{12} + \alpha_{12} + 8_{12} = (38)_{12} = \beta_{12} \cdot 4_{12}$.
- d) $N = (3058)_{12}$   divis vel por $(11)_{12} = 13$, pois, $(3_{12} + 5_{12}) - (0_{12} + 8_{12}) = 0_{12} = 0_{12} \cdot (11)_{12}$.

3 Critério geral de divisibilidade

Teorema 3.1. *Sejam $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$, e $N \in \mathbb{N}$ como na Eq. (1.2). Se $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$, e $d \mid 1 - i \cdot b$, com $i \in \mathbb{Z}$, então*

$$d \mid N \Leftrightarrow d \mid (r_n \dots r_1)_b + i \cdot r_0. \quad (3.1)$$

Demonstração. De (1.2), segue que $N = (r_n \dots r_1)_b \cdot b + r_0$. Somando-se $b \cdot i \cdot r_0 - b \cdot i \cdot r_0$ a N , obtemos $N = ((r_n \dots r_1)_b + i \cdot r_0) \cdot b + (1 - i \cdot b)_b \cdot r_0$. Como $d \mid 1 - i \cdot b$, temos que $d \mid N \Leftrightarrow d \mid (r_n \dots r_1)_b \cdot b + i \cdot r_0$. \square

Observação 3.2. Uma vez que $d \mid 1 - i \cdot b \Leftrightarrow b \cdot i + d \cdot k = 1$, $k \in \mathbb{Z}$, resolver o problema (3.1), significa encontrar i tal que $b \cdot i + d \cdot k = 1$, cuja solução geral é dada por $(i \pm d \cdot j, k \mp d \cdot j)$, $\forall j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Existem, portanto, infinitos valores de i que satisfazem (3.1): $i \pm d \cdot j$, $\forall j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, isto é, para cada j há um critério de divisibilidade por d . Assim, para tornar esses critérios aplicáveis, basta tomar o i particular que satisfaz $b \cdot i + d \cdot k = 1$, no cálculo do $\text{mdc}(b, d)$ usando o algoritmo das divisões sucessivas.

Estudaremos, agora, critérios de divisibilidade para N , nas bases $b = 10$, $b = 8$ e $b = 12$, à luz do Teorema 3.1. De acordo com a observação 3.2, precisamos encontrar i satisfazendo a equação $b \cdot i + d \cdot k = 1$.

3.1 Critérios de divisibilidade na base $b = 10$

Sejam $N \in \mathbb{N}$ e $d \in \mathbb{N}$, com $d \leq 13$ e $\text{mdc}(d, 10) = 1$. Estabeleceremos, nesta subseção, critérios de divisibilidade de N por d , na base 10, conforme observação 3.2.

3.1.1 Critérios de divisibilidade por 3

Se $d = 3$, então $i = 1$, conforme observação 3.2. Daí, o critério de divisibilidade por 3:

$$3 \mid N \Leftrightarrow 3 \mid (r_n \dots r_1) + 1 \cdot r_0.$$

3.1.2 Critérios de divisibilidade por 7

Apresentaremos duas versões de um critério de divisibilidade por 7. A primeira que, raramente está presente em livros didáticos do Ensino Fundamental, e a segunda, descoberta recentemente, serão descritas assim:

1) Critério de divisibilidade por 7 (Clássico):

“De um número dado, suprime-se o algarismo das unidades e multiplica-o por 2; em seguida, subtrai-se este produto do número restante. Se o resultado obtido for um

número divisível por 7, então o número dado será divisível por 7. Se não, repete-se o processo até encontrar um número que seja ou não divisível por 7.”

2) Critério de divisibilidade por 7 (Critério de Chika¹²):

“De um número dado, suprime-se o algarismo das unidades e multiplica-o por 5; em seguida, adiciona-se este produto ao número restante. Se o resultado obtido for um número divisível por 7, então o número dado será divisível por 7. Se não, repete-se o processo até encontrar um número que seja ou não divisível por 7”.

Duas soluções para o problema (3.1), quando $d = 7$, são $i = -2$ e $i = -2 + 7 = 5$, conforme observação 3.2. Seguem-se, assim, dois critérios de divisibilidade por 7, que na prática coincidem com as condições de divisibilidade descritas acima:

$$7 \mid N \Leftrightarrow 7 \mid (r_n \dots r_1) - 2 \cdot r_0 \text{ (Critério clássico)} \tag{3.2}$$

$$7 \mid N \Leftrightarrow 7 \mid (r_n \dots r_1) + 5 \cdot r_0 \text{ (Critério de Chika).} \tag{3.3}$$

Exemplo 3.3. Considere o número 1577. No caso clássico, suprime-se o algarismo 7, restando 157. Em seguida, calcula-se a diferença $157 - 2 \cdot 7 = 143$. Repetindo o processo para 143, obtem-se $14 - 2 \cdot 3 = 8$. Do critério de Chika, tem-se $157 + 5 \cdot 7 = 192$. Repete-se o processo para 192, obtendo-se $19 + 5 \cdot 2 = 29$. Logo, 1577 não é divisível por 7.

3.1.3 Critérios de divisibilidade por 9

Da observação 3.2, $i = 1$, quando $d = 9$. Segue, assim, o critério de divisibilidade por 9:

$$9 \mid N \Leftrightarrow 9 \mid (r_n \dots r_1) + 1 \cdot r_0.$$

3.1.4 Critério de divisibilidade por 11

Da observação 3.2, $i = -1$, quando $d = 11$. Segue daí, o critério de divisibilidade por 11:

$$11 \mid N \Leftrightarrow 11 \mid (r_n \dots r_1) - 1 \cdot r_0.$$

¹O número natural N , satisfazendo esta condição, é também chamado número de Chika.

²Chika Ofili é um jovem estudante nigeriano, radicado no Reino Unido, que, em 2019, com 12 anos de idade, descobriu uma fórmula para testar rapidamente se um número inteiro é divisível por 7 ([3], p. 121).

3.1.5 Critérios de divisibilidade por 13

Conforme observação 3.2, $i = 4$, quando $d = 13$. Portanto, tem-se o seguinte critério de divisibilidade por 13:

$$13 \mid N \Leftrightarrow 13 \mid (r_n \dots r_1) + 4 \cdot r_0.$$

Exemplo 3.4. Vamos verificar, neste exemplo, a divisibilidade para alguns casos acima:

- a) 4572 é divisível por 3, pois $457 + 1 \cdot 2 = 459$ e $45 + 1 \cdot 9 = 54$, e $54 = 18 \cdot 3$.
- b) 378 é divisível por 9, pois $37 + 1 \cdot 8 = 45$.

3.2 Critérios de divisibilidade para um número natural numa base não decimal

Nesta subseção apresentaremos critérios de divisibilidade de N , por d , nas bases $8 = (10)_8$ e $12 = (10)_{12}$, com $\text{mdc}(d, 8) = \text{mdc}(d, 12) = 1$.

3.2.1 Critérios de divisibilidade na base 8

Sejam $N \in \mathbb{N}$ e $d \in \mathbb{N}$, com $\text{mdc}(d, 8) = 1$. Estabeleceremos critérios de divisibilidade de N por d , na base $8 = (10)_8$, $d \in \{3, 5, 7, 9 = (11)_8\}$. Conforme observação 3.2, tem-se: $i = -1$, quando $d = 3$; $i = 2$, quando $d = 5$; $i = 1$, quando $d = 7$; e $i = -1$, quando $d = 9 = (11)_8$. Seguem, portanto, os critérios de divisibilidade:

1. Critérios de divisibilidade por 3:

$$3 \mid N \Leftrightarrow 3 \mid (r_n \dots r_1)_8 - 1 \cdot r_0.$$

2. Critério de divisibilidade por 5:

$$5 \mid N \Leftrightarrow 5 \mid (r_n \dots r_1)_8 + 2 \cdot r_0.$$

3. Critério de divisibilidade por 7:

$$7 \mid N \Leftrightarrow 7 \mid (r_n \dots r_1)_8 + 1 \cdot r_0.$$

4. Critério de divisibilidade por $9 = (11)_8$:

$$9 \mid N \Leftrightarrow 7 \mid (r_n \dots r_1)_8 - 1 \cdot r_0.$$

Exemplo 3.5. Neste exemplo, testaremos alguns dos critérios estabelecidos acima:

- a) Em $(1436)_8$, temos que $(143)_8 - 1 \cdot 6_8 = (135)_8$. Repete-se o processo para $(135)_8$, obtendo $(13)_8 - 1 \cdot 5_8 = (6)_8$ e $6_8 = 3_8 \cdot 2_8$. Logo, $(1436)_8$ é divisível por 3.
- b) Em $(3453)_8$, $(345)_8 + 2 \cdot 3_8 = (353)_8$, e $(35)_8 + 2 \cdot 3_8 = (43)_8$ é divisível por 5.
- c) Em $N = (1677)_8$, temos $(167)_8 + 1 \cdot 7 = (176)_8$; logo, $(17)_8 + 1 \cdot 6 = (25)_8$ e $(25)_8$ é divisível por 7.

3.2.2 Critérios de divisibilidade na base 12

Sejam $N \in \mathbb{N}$ e $d \in \mathbb{N}$, com $\text{mdc}(d, 12) = 1$. Estabeleceremos critérios de divisibilidade de N por d , na base $12 = (10)_{12}$, $d \in \{5, 7, 11, 13 = (11)_{12}\}$. Conforme observação 3.2, tem-se: $i = -2$, quando $d = 5$; $i = 3$, quando $d = 7$; $i = 1$, quando $d = 11$; e $i = -1$, quando $d = 13 = (11)_{12}$. Seguem, portanto, os critérios de divisibilidade:

1. **Critérios de divisibilidade por 5:**

$$5 \mid N \Leftrightarrow 5 \mid (r_n \dots r_1)_{12} - 2 \cdot r_0.$$

2. **Critério de divisibilidade por 7:**

$$7 \mid N \Leftrightarrow 7 \mid (r_n \dots r_1)_{12} + 3 \cdot r_0.$$

3. **Critério de divisibilidade por 11:**

$$11 \mid N \Leftrightarrow 11 \mid (r_n \dots r_1)_{12} + 1 \cdot r_0.$$

4. **Critério de divisibilidade por $13 = (11)_{12}$:**

$$13 \mid N \Leftrightarrow 13 \mid (r_n \dots r_1)_{12} - 1 \cdot r_0.$$

Exemplo 3.6. Testaremos a divisibilidade na base $12 = (10)_{12}$:

- a) Em $N = (3\alpha 56)_{12}$, temos que $(3\alpha 5)_{12} - 2 \cdot 6_{12} = (3\alpha 5)_{12} - (10)_{12} = (395)_{12}$. Por fim, $(39)_{12} = 9_{12} \cdot 5_{12}$ e, portanto, $(3\alpha 56)_{12}$ é divisível por 5.
- b) Em $N = (3\alpha\beta 81)_{12}$, temos que $(3\alpha\beta 8)_{12} + 1 \cdot 1_{12} = (3\alpha\beta 9)_{12}$ e $(3\alpha\beta)_{12} + 1 \cdot 9_{12} = (3\beta 8)_{12}$. Agora, $(3\beta)_{12} + 1 \cdot 8_{12} = (47)_{12} = 11_{12} \cdot 5_{12}$.
- c) $N = (37158)_{12}$ é divisível por 13.

Apresentamos, como aplicações do Teorema 3.1, critérios de divisibilidade de N por d , $d \leq 13$ e $\text{mdc}(d, b) = 1$. Para outros critérios de divisibilidade por d , $d \geq 13$, nas mesmas condições do Teorema 3.1, podem ser estabelecidos encontrando-se $i \in \mathbb{Z}$, conforme observação 3.2. O Teorema 3.1 representa um critério geral de divisibilidade, pois toda solução do problema 3.1 pode ser obtida, $\forall j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, de

$$d \mid N \Leftrightarrow d \mid (r_n \dots r_1) + (1 \pm d \cdot j) \cdot r_0.$$

Algumas situações, nas estratégias i) - iii), poderão não ser contempladas pelo Teorema 3.1, como é o caso dos critérios de divisibilidade por d , em que d e b não são primos entre si. Outros casos que, também podem não satisfazer o Teorema 3.1, são os casos da divisibilidade de N por $p \cdot q$, em que $p, q \in \mathbb{N}$ e $\text{mdc}(p, q) = 1$. Sabemos que se $p, q \in \mathbb{N}$, com $\text{mdc}(p, q) = 1$, então $\text{mmc}(p, q) = p \cdot q$. Desta maneira, temos a seguinte condição:

Critério 3.7. $p \cdot q \mid N \Leftrightarrow p \mid N$ e $q \mid N$.

Observação 3.8. Uma outra maneira de verificar a divisibilidade de $N = (r_n \dots r_1)_b$, $b \neq 10$, por d , seria escrevê-lo na base 10 e, em seguida, aplicar o critério de divisibilidade por d , na base 10. Por exemplo, para verificar a divisibilidade de $N = (37158)_{12}$ por 13, o transformaremos na base 10, da seguinte maneira

$$(37158)_{12} = 3 \cdot 12^4 = 7 \cdot 12^3 + 1 \cdot 12^2 + 5 \cdot 12 + 8$$

e, em seguida, usando o Teorema 3.1, aplica-se o critério de divisibilidade por 13 na base 10. Dessa maneira, é mais prático aplicar o critério de divisibilidade diretamente na base b , $b \neq 10$.

Para acompanhar os exemplos, apresentaremos as tabelas de multiplicação nas bases $8 = (10)_8$ e $12 = (10)_{12}$. Observe que $0 \cdot (r_n \dots r_0)_b = 0$, $\forall (r_n \dots r_0)_b \in \mathbb{N}$.

4 Comparação dos critérios de divisibilidade

Os critérios de divisibilidade, nas subseções 2.1 e 2.2, na base 10, são de conhecimento do leitor, visto que figuram nos livros do 6º ano do Ensino Fundamental com a mesma formulação apresentada aqui, alguns contemplados em [1], outros não, como o caso de divisibilidade por 7.

No que foi exposto, segundo as estratégias (iii) e (iv), pudemos observar que um mesmo critério de divisibilidade pode ter mais de uma formulação, numa mesma base. É o caso dos critérios de divisibilidade por 3 e por 9, na base 10, cujas formulações coincidem em cada uma dessas estratégias, mas diferentes de uma estratégia para outra. Na

\cdot_8	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7
2	2	4	6	(10)	(12)	(14)	(16)
3	3	6	(11)	(14)	(17)	(22)	(25)
4	4	(10)	(14)	(20)	(24)	(30)	(34)
5	5	(12)	(17)	(24)	(31)	(36)	(43)
6	6	(14)	(22)	(30)	(36)	(44)	(52)
7	7	(16)	(25)	(34)	(43)	(52)	(61)

Tabela 1: Tábua de multiplicação na base $8 = (10)_8$

\cdot_{12}	1	2	3	4	5	6	7	8	9	α	β
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	α	β
2	2	4	6	8	α	(10)	(12)	(14)	(16)	(18)	(1α)
3	3	6	9	(10)	(13)	(15)	(19)	(20)	(23)	(26)	(29)
4	4	8	(10)	(14)	(18)	(20)	(24)	(28)	(30)	(34)	(38)
5	5	α	(13)	(18)	(21)	(26)	(2β)	(34)	(39)	(42)	(47)
6	6	(10)	(16)	(20)	(26)	(30)	(36)	(40)	(46)	(50)	(56)
7	7	(12)	(19)	(24)	(2β)	(36)	(41)	(48)	(53)	(5α)	(65)
8	8	(14)	(20)	(28)	(34)	(40)	(48)	(54)	(60)	(68)	(74)
9	9	(16)	(23)	(30)	(39)	(46)	(53)	(60)	(69)	(76)	(83)
α	α	(18)	(26)	(34)	(42)	(50)	(5α)	(68)	(76)	(84)	(92)
β	β	(1α)	(29)	(38)	(47)	(56)	(65)	(74)	(83)	(92)	($\alpha 1$)

Tabela 2: Tábua de multiplicação na base $12 = (10)_8$

primeira, para verificar a divisibilidade por 3 (resp. por 9), analisamos a divisibilidade da soma dos algarismos por 3 (resp. por 9). Na segunda, separa-se o algarismo das unidades e, em seguida, soma esse algarismo ao número restante; repete-se o processo até encontrar um número divisível ou não por 3 (resp. por 9). Para uma base, diferente de 10, aplicar a estratégia (iii) é mais fácil do que a (iv). Aqui, também, a formulação feita na estratégia (iii) é mais fácil de ser aplicada do que na (iv).

Já os critérios de divisibilidade por 11, têm formulações distintas em relação às estratégias (iii) e (iv): na primeira, estuda-se a divisibilidade da soma alternada dos algarismos por 11, enquanto, na segunda, separa-se o algarismo das unidades; em seguida, subtrai-se do número restante esse algarismo. Repete-se o processo, até encontrar um número divisível ou não por 11.

Observamos, também, que há critérios com a mesma formulação, porém, em bases distintas, como é o caso da divisibilidade por 11, por $9 = (10)_8$ e por $13 = (11)_{12}$,

e da divisibilidade por 9, por 7 e por 11, nas bases $8 = (10)_8$ e $12 = (10)_{12}$, respectivamente.

De maneira geral, um critério de divisibilidade para um número natural numa determinada base, poderá não valer em outra base, por exemplo, terminar em 0 não é condição de divisibilidade por 5, nas bases $8 = (10)_8$ e $12 = (10)_{12}$, como o é na base 10.

Considerações Finais

De forma elementar, não completa, porém, procurando ser um pouco abrangente, apresentamos critérios de divisibilidade para um número natural escrito numa base qualquer. Na base 10, apresentamos critérios, que consideramos comuns, e que obedecem a um determinado padrão, como é o caso da divisibilidade por uma potência de 2, de 5 e de 10, e outros, que não têm esse mesmo padrão, que são as condições de divisibilidade por 3 e por 9, por 6, por 12 e por 15, por 7, por 11 e por 13. Para números maiores do que 13 e que sejam relativamente primos com a base, novos critérios podem ser apresentados, via Teorema 3.1. Entretanto, pode ocorrer, nesses casos, que efetuar a divisão seja mais prático do que usar um critério e, por isso, não faria sentido estabelecer um critério, mas não deixa de ser importante conhecê-los pela curiosidade de saber como funcionam para números maiores.

Para uma base não decimal, o critério geral de divisibilidade nos fornece condições de divisibilidade por um número natural que é primo com a base do referido sistema.

Este trabalho pretende contribuir com a formação do professor de Matemática da Educação Básica e dos licenciandos em Matemática, mostrando que há outras possibilidades, além do decimal. Os critérios de divisibilidade em outras bases, talvez não tenham utilidade prática e nem são conhecidos por alunos e professores, pois não são estudados na escola regular e, geralmente, tudo o que fazemos no nosso dia a dia, é na base 10. No entanto, nos dão possibilidades de saber como funcionam numa base qualquer.

Referências

- [1] BRASIL, *Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.* <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 17 mai. 2024.
- [2] Filho, E. A. *Teoria Elementar dos Números.* São Paulo: Nobel, 1992.

- [3] Neves, E. M., Machado, G. B., Neves, G., Bahls, L. H., Alves, M. T., e Biehl, S. V. *O jovem nigeriano Chika Ofili e seu critério de divisibilidade por 7*. Revista da OPMat - UEPG, v. 5, p. 119 - 123, 2023.
- [4] Ripoll, C., Rangel, L. e Giraldo, V. *Livro do Professor de Matemática na Educação Básica: números naturais*. Coleção Matemática para o Ensino. Rio de Janeiro: SBM, v. 1, 2016.

Recebido em 20 de Junho de 2024
Revisado em 22 de Março de 2025
Aceito em 19 Maio 2025