REVISEM

Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática

https://doi.org/10.34179/revisem.v9i4.21346

TERNAS PITAGÓRICAS E SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS: NOVOS RESULTADOS

Thiago Yukio Tanaka
Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE)
thiago.tanaka@ufrpe.br

Gésica Peixoto Campos
Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE)
gesica.pcampos@gmail.com

Airton Temistocles Gonçalves de Castro
Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)
airton.castro@ufpe.br

Resumo

A partir de uma abordagem interdisciplinar, apresentamos respostas dentro da classe de problemas das Ternas Pitagóricas para três casos. Mais precisamente, provamos casos de existência e inexistência de Ternas Pitagóricas de termos envolvendo as Progressões Aritméticas, as Progressões Geométricas e a Sequência de Fibonacci. Mostramos que, no caso das Progressões Aritméticas, as únicas Ternas Pitagóricas são geradas por uma famosa tripla. No caso das PGs e da Sequência de Fibonacci, provamos a inexistência de Ternas Pitagóricas de inteiros positivos, mesmo quando os termos não são consecutivos. Até onde vai o nosso conhecimento, as respostas para os problemas aqui estabelecidos no caso das PGs e da Sequência de Fibonacci são inéditas. O trabalho é consequência dos estudos de uma dissertação de mestrado profissional (PROFMAT-UFRPE), na qual apresentamos alguns resultados clássicos sobre sequências numéricas e suas aplicações.

Palavras-chave: Ternas Pitagóricas; Progressão Aritmética; Progressão Geométrica; Sequência de Fibonacci; PROFMAT.

Abstract

Using an interdisciplinary approach, we present solutions within the class of Pythagorean triples problems for three cases. More precisely, we prove cases of existence and non-existence of Pythagorean triples involving Arithmetic Progressions, Geometric Progressions, and the Fibonacci Sequence. We show that, in the case of Arithmetic Progressions, the only Pythagorean triples are generated by a famous triple. In the case of GPs and the Fibonacci Sequence, we prove the non-existence of Pythagorean triples of positive integers, even when the terms are not consecutive. To the best of our knowledge, the answers to the problems established here for the GPs and the Fibonacci Sequence are original. This work is a consequence of the studies from a professional master's dissertation (PROFMAT-UFRPE), in which we present some classical results on numerical sequences and their applications.

Keywords: Pythagorean Triples; Arithmetic Progression; Geometric Progression; Fibonacci Sequence; PROFMAT.

1 Introdução

Durante nossa vida escolar, no Ensino Básico, nos deparamos com situações que envolvem o conteúdo Triângulos Retângulos e o Teorema de Pitágoras. Porém, o conceito das Ternas Pitagóricas raramente é abordado no currículo. Quando este tema aparece, está vinculado aos treinamentos olímpicos nacionais, como nos projetos Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo (POTI) e no Programa de Iniciação Científica voltado para a OBMEP (PIC-OBMEP).

Durante a resolução de problemas envolvendo esses conteúdos, é comum aparecerem triângulos retângulos com lados 3, 4 e 5; ou 5, 12 e 13; ou triângulos semelhantes a estes (como o triângulo com lados 6, 8 e 10, semelhante ao primeiro).

Uma Terna Pitagórica é uma tripla de números inteiros positivos (a, b, c) em que vale a relação pitagórica:

$$a^2 + b^2 = c^2. \tag{1.1}$$

O problema das Ternas Pitagóricas consiste em determinar todas as triplas de inteiros positivos que satisfaçam (1.1). Este é um problema famoso da classe das *Equações Diofantinas Não Lineares*. Recomendamos a leitura de [24] que trata da solubilidade de problemas de Equações Diofantinas Lineares e [21] para uma abordagem olímpica voltada para os casos não lineares. Na verdade, basta encontrar as soluções em que a, b e c sejam inteiros coprimos. É bem conhecido que a parametrização (1.2) gera todas as soluções.

$$a = m^2 - n^2, \quad b = 2mn \quad \text{e} \quad c = m^2 + n^2, \tag{1.2}$$

em que m e n e são inteiros positivos com $m > n$.

A procura por padrões está presente em várias pesquisas matemáticas. Para motivar o estudo de sequências numéricas no Ensino Básico, destacamos a busca de padrões numéricos. As *Progressões Aritméticas (PA)*, como as sequências dos números pares, ímpares, formadas pelos números naturais consecutivos ou mesmo por múltiplos de um determinado inteiro, e as *Progressões Geométricas (PG)*, como as sequências formadas por potências inteiras de um determinado número, compõem parte do currículo comum no Ensino Básico. Nessa situação, estamos interessados na relação recorrente, em questões de posição, interpolação, soma ou produtos de termos.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) enfatiza a importância da integração entre conteúdos distintos, pois enriquece o aprendizado do aluno e ajuda no desenvolvimento de "competências para compreender o mundo, relacionar informações, representar e solucionar problemas de várias naturezas"(BNCC, 2018, p. 350). Geralmente, os conteúdos de triângulos retângulos e sequências são apresentados de forma separada no currículo de Matemática, e poucas ou quase nenhuma vez há integração entre esses conteúdos. O estudo de triângulos retângulos é parte essencial do programa de Geometria, focando principalmente nas propriedades, no Teorema de Pitágoras, e nas aplicações práticas, tanto na Matemática quanto nas outras áreas como Física e Engenharia. Já as Sequências Numéricas são abordadas no contexto das Progressões Aritméticas e Geométricas, com ênfase em encontrar padrões, deduzir e utilizar fórmulas. Nosso intuito é explorar a matemática de modo a integrar os dois temas citados como forma de incentivar os alunos aprofundarem seus conhecimentos matemáticos em "contextos significativos de aprendizagem"(BNCC, 2018, p. 350).

Durante uma das disciplinas do Programa de Pós-Graduação de Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE), surgiu um interessante questionamento relacionando conceitos que aparecem em momentos distintos no currículo do Ensino Básico: o das Ternas Pitagóricas e o das Sequências Numéricas. O questionamento foi sobre a existência de Ternas Pitagóricas como termos consecutivos de sequências conhecidas. Em [20], um dos livros adotados no programa, há o desenvolvimento do conteúdo de ternas, e um dos problemas contém: *"Encontre todas as triplas de números* (a, b, c) *tais que* a^2*,* b^2 *e* c^2 *estão em progressão aritmética."* (Exemplo 5.4., p. 165). Ainda na referência [20], há outros problemas dessa natureza; nas páginas 170-173, Seção 5.5, há uma seção inteira destinada à procura de triângulos com lados inteiros cujos ângulos estão em Progressão Aritmética. Em [18], há um outro questionamento interessante que determina quais são todos os pontos racionais sobre uma determinada circunferência (Teorema 4.3, p. 136), analisando um comportamento regular. O questionamento foi reformulado para determinar se seria possível encontrar Ternas Pitagóricas em Sequências Numéricas que possuem determinadas regularidades. Além dos problemas acima, encontramos outras referências que trabalharam especificamente com essa problemática. Em [6], há o desenvolvimento das respostas no caso de ternas de termos consecutivos de Progressões Aritméticas, provando, assim como nós faremos, que elas são geradas pela famosa $(3, 4, 5)$. Ainda sobre PAs, em [16] há uma investigação de conjuntos de quatro Razões Pitagóricas[1] em Progressão Aritmética, revelando suas relações com Progressões Aritméticas de três e de cinco termos. Ao final do trabalho, eles identificam a existência de uma família infinita de Razões Pitagóricas em Progressão Aritmética. No caso da Sequência de Fibonacci, encontramos diversos artigos que tentam encontrar identidades de ternas para combinações de termos de Fibonacci, como [1, 3, 13] e as referências contidas em cada trabalho. Por fim, não encontramos um desenvolvimento de resultado sistemático para o caso das PGs; apenas encontramos uma discussão em um fórum (veja [23]), a qual não estabelece um resultado para o problema. Ressaltamos que a busca por padrões em sequências, sejam de resultados novos ou de generalizações de resultados conhecidos, mas com modificações na sequência escolhida, é um tema recorrente em artigos da própria Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática. Recomendamos a leitura de [8, 25, 28, 31, 32] para trabalhos na mesma linha deste. Recomendamos também as dissertações de PROFMAT [2, 7, 9, 10, 11, 14, 15, 22, 26, 27] que percorrem todos os temas propostos neste artigo.

A partir das discussões subsequentes, surgiu este artigo. Mais precisamente, este trabalho é uma compilação de parte das respostas que descobrimos na investigação deste problema e compõem parte da dissertação de mestrado em andamento [4]. O objetivo deste trabalho é explorar padrões e relações entre os temas que compõem o título do mesmo. Até onde sabemos, as respostas que propomos aos questionamentos aqui presentes são inéditas. Esperamos também que este trabalho inspire e incentive discentes e docentes do programa PROFMAT a compartilharem seus estudos e suas pesquisas, enriquecendo as discussões em temas relativos ao Ensino Básico, cuja socialização pode trazer grandes melhorias no ensino e aprendizado de Matemática.

Assumiremos estabelecidos os principais conceitos e resultados dos conteúdos das Ternas Pitagóricas e das sequências numéricas PA, PG e da Sequência de Fibonacci. Dessa forma o trabalho está organizado da seguinte maneira: Na Seção 2 apresentamos os resultados principais do trabalho, começando pelo caso de Ternas Pitagóricas e Progressões Aritmética, que foi estabelecido em [6], e que expandimos como forma de apresentar o problema. Em seguida, consideramos os casos inéditos com Progressões Geométricas e da Sequência de Fibonacci, estudando casos de termos consecutivos ou não consecutivos. Finalizamos o trabalho na Seção 3 com as considerações finais, seguido de algumas referências que encontramos no tema.

[1] Uma Razão Pitagórica denotada por a, b é definida pela razão $\frac{a^2-b^2}{2ab}$ entre os lados de um triângulo retângulo com medidas de lados racionais.

2 Resultados Principais

A partir da perspectiva de problemas descritos na introdução, buscaremos determinar a existência de Ternas Pitagóricas associadas a PAs, PGs e da Sequência de Fibonacci.

2.1 Ternas Pitagóricas e PAs

Apesar desse resultado já ter sido estabelecido em [6], descreveremos a nossa solução uma vez que o encaminhamento da solução nos dará um suporte nos demais casos.

Definição 2.1. *Uma PA é uma sequência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *que respeita a seguinte recorrência de primeira ordem não homogênea*

$$a_n - a_{n-1} = r,$$

para todo $n \geq 2$. *A constante* $r \in \mathbb{R}$ *é dita a razão da PA.*

Perceba que as ternas apresentadas na introdução $(3, 4, 5)$ e $(6, 8, 10)$ podem ser vistas como termos de PAs, a primeira como a da sequência formada pelos números inteiros e a segunda, como termos da sequência de números pares. Veremos que isso não é uma coincidência.

Proposição 2.2 ([6])**.** *Há uma única família de Ternas Pitagóricas* (a, b, c) *que são termos consecutivos de uma PA. Esta é formada pelas triplas da forma* $(3n, 4n, 5n)$ *com* $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Três termos consecutivos de uma PA são do tipo $a-r$, a e $a+r$. Como são lados de um triângulo, $0 < r < a$. Para o triângulo ser retângulo

$$(a + r)^2 = a^2 + (a - r)^2,$$

donde obtém-se $a = 4r$. Os lados do triângulo retângulo em PA são da forma $3r = 4r-r$, $4r$ e $5r = 4r + r$; ou seja, o triângulo é semelhante ao triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5. Resumindo, se uma Terna Pitagórica é formada por termos consecutivos de uma PA, então ela é um múltiplo inteiro de $(3, 4, 5)$. □

Mostramos assim que a tripla $(3, 4, 5)$ tem de fato uma particularidade importante nas Ternas Pitagóricas. Ela é uma Terna Pitagórica Primitiva e gera todas as Ternas Pitagóricas cujos termos estão em PA, estes são da forma $(3n, 4n, 5n)$ com $n \in \mathbb{N}$.

2.2 Ternas e PGs

A partir daqui, até onde sabemos, os resultados estabelecidos são inéditos.

Definição 2.3. *Uma PG é uma sequência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *que respeita a seguinte recorrência de primeira ordem não homogênea*

$$a_n = qa_{n-1},$$

para todo $n \geq 2$. *A constante* $q \in \mathbb{R}$ *é dita a razão da PG.*

Proposição 2.4 (Autores)**.** *Não há nenhuma Progressão Geométrica da qual podemos extrair três termos consecutivos de modo a obtermos uma Terna Pitagórica.*

Demonstração. Três termos consecutivos de uma PG são do tipo b, bq e bq^2. Como são lados de um triângulo, devemos ter $b > 0$ e, sem perda de generalidade, podemos supor $q > 1$, ou seja, bq^2 é a hipotenusa. Como o triângulo é retângulo, vale

$$(bq^2)^2 = (bq)^2 + b^2,$$

donde concluímos que

$$q^2 = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Como estamos procurando soluções reais positivas ($q > 0$), então $q = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \notin \mathbb{Q}$. Se um triângulo retângulo tem os lados como termos consecutivos de uma PG, então ele é semelhante ao triângulo de lados $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (hipotenusa), $\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ (cateto maior) e 1 (cateto menor). Note que os triângulos descritos no parágrafo anterior não geram Ternas Pitagóricas, pois não existe $\lambda > 0$ real tal que λ, $\lambda\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ e $\lambda\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ sejam todos inteiros. □

Observação 2.5. Diferente do caso das PAs, o caso das PGs nos dá uma inexistência de soluções de ternas em inteiros positivos. Um fato interessante é que as ternas soluções possuem uma relação direta com o número de ouro, definido por $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Observação 2.6. Uma observação importante é que, no caso das PGs, independente da escolha de λ, não é possível obter ternas com regularidade de termos racionais. Na melhor situação, temos dois lados com medidas irracionais e um dos lados com medida racional.

Observação 2.7. Perceba que todos os triângulos deverão ser semelhantes ao triângulo com medidas dos catetos iguais a 1, $\sqrt{\varphi}$ e hipotenusa igual a φ, que é um triângulo famoso na Geometria, conhecido como *Triângulo de Kepler* (veja [30]).

Diante da inexistência do caso anterior, um novo questionamento surge: será que este é um problema de ordenação ou é sobre a natureza (característica intrínseca) da sequência? Ou seja, será que podemos considerar uma outra ordenação nos termos da PG e agora sim obter uma terna? Esse questionamento está formulado na próxima proposição. Antes, precisaremos de dois lemas:

Lema 2.8 (Teorema das Raízes Racionais, [17])**.** *Considere o seguinte polinômio*

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

em que $a_i \in \mathbb{Z}$*. Se* $a_0 \neq 0$ *e* $a_n \neq 0$*, então toda solução racional* x *de* $p_n(x)$ *quando escrita como uma fração irredutível, ou seja,* $x = \frac{a}{b}$ *com* $\mathrm{mdc}(a, b) = 1$*, satisfaz:*

- a *é um fator inteiro do termo constante* a_0*;*
- b *é um fator inteiro do coeficiente* a_n*.*

Observação 2.9. O Teorema das Raízes Racionais é um caso particular do Lema de Gauss que trata sobre a fatoração de polinômios. Além disso, o Teorema da Raízes Inteiras é um caso particular do Lema 2.8 quando $a_n = 1$.

Vamos enunciar e provar uma proposição que usaremos para generalizar a Proposição 2.4

Lema 2.10 (Autores)**.** *Sobre as raízes da Equação* (2.1)*,*

$$x^n - x^m - 1 = 0 \qquad (n > m \geq 1). \tag{2.1}$$

temos:

(i) *A Equação* (2.1) *não tem raiz racional;*

(ii) *Se* $\alpha \geq 0$ *é raiz da Equação* (2.1) *então* $\alpha > 1$*;*

(iii) *A Equação* (2.1) *tem uma raiz real positiva no intervalo* $(1, 2)$*;*

(iv) *A Equação* (2.1) *tem apenas uma raiz real positiva.*

Demonstração. Seja $p_{n,m}(x) = x^n - x^m - 1$, com $n > m \geq 1$. Provaremos primeiro o item **(i)**. Observe que, em virtude do Lema 2.8, as únicas possíveis raízes racionais da Equação (2.1) são ± 1. Substituindo, concluímos que não são raízes: $1^n - 1^m - 1 = -1 \neq 0$ e $(-1)^n - (-1)^m - 1 \neq 0$. Portanto, a equação $x^n - x^m - 1 = 0$ não tem solução racional.

Para demonstrar o item **(ii)**, se $p_{n,m}(\alpha) = 0$ então $\alpha^n = \alpha^m + 1 > \alpha^m$, logo $\alpha > 1$. Agora, considerando o caso **(iii)**, como $n > m \geq 1$, temos

$$2^n \geq 2^{m+1} = 2^m + 2^m > 2^m + 1,$$

assim $p_{n,m}(2) > 0$. Por outro lado,

$$p_{n,m}(1) = 1^n - 1^m - 1 = -1 < 0.$$

O Teorema do Valor Intermediário (que pode ser encontrado em [29]) garante que a função $p_{n,m}(x)$ tem uma raiz real positiva no intervalo aberto $(1, 2)$.

Por fim, considerando o caso **(iv)**,

$$p_{n,m}(x) = x^n - x^m - 1 = x^m(x^{n-m} - 1) - 1,$$

sabemos que para $k \geq 1$ a função $h_k(x) = x^k$ é crescente no intervalo $[0, +\infty)$, em particular $x^k > 1$ se $x > 1$. Como o produto de funções crescente positivas é crescente, concluímos que a função $x^m(x^{n-m} - 1)$ é crescente no intervalo $[1, +\infty)$, então $p_{n,m}$ é crescente neste mesmo intervalo. Logo, unindo essa informação ao fato de que $p_{n,m}$ é negativa em -1 e positiva em 2, concluímos que $p_{n,m}$ admite somente uma solução no intervalo $[1, +\infty)$, a qual pertence ao intervalo $(1, 2)$. Por último, basta usar o item **(ii)** para concluir a prova de **(iv)**. $\square$

Proposição 2.11 (Autores)**.** *Não há nenhuma Progressão Geométrica da qual podemos extrair três termos de modo a obtermos uma Terna Pitagórica, mesmo que os termos não sejam consecutivos. De forma mais geral, se num triângulo retângulo os lados são termos de uma PG, não necessariamente termos consecutivos, então dois dos lados são irracionais.*

Demonstração. Três termos de uma PG são do tipo bq^n, bq^m e b. Como são lados de um triângulo, com o primeiro termo sendo a hipotenusa, temos $b > 0$, $q > 1$, $n > m \geq 1$. Podemos trocar o triângulo por um triângulo semelhante dividindo os lados por b: q^n, q^m e 1. Usando a informação de que o triângulo é retângulo, temos:

$$q^{2n} = q^{2m} + 1,$$

assim, se fizermos $x = q^2$, temos que $x^n - x^m - 1 = 0$. Em virtude do Lema 2.10, sabemos que a equação $x^n - x^m - 1 = 0$ não tem raiz racional. Suponha agora que $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $\alpha > 0$ seja uma raiz da equação. Temos $\alpha > 1$, logo $q = \sqrt{\alpha} > 1$. O triângulo retângulo de lados 1 (menor cateto), $q^m = \alpha^{m/2}$ (maior cateto) e $q^n = \alpha^{n/2}$

(hipotenusa), tem seus lados como termos de uma PG e gera todos os triângulos com lados em PG, nesta sequência de ordem numa PG.

Seja $\beta = \alpha^m$, temos que $\beta^{n/m} = \beta + 1$, assim $\beta^n - (\beta+1)^m = 0$, logo β é uma raiz positiva da equação:

$$x^n - (x+1)^m = 0 \tag{2.2}$$

Em virtude do Lema 2.8, sabemos que a Equação (2.2) não tem raiz racional, pois as únicas possíveis raízes racionais da equação são ± 1; substituindo, concluímos que não são raízes: $1^n - 2^m \neq 0$ e $(-1)^n - 0^m \neq 0$. Desta forma concluímos que $\beta = \alpha^m$ é irracional. Como $\alpha^n = \alpha^m + 1$ temos que α^n também é irracional.

Observe que para um triângulo retângulo ter dois de seus lados com comprimentos racionais, então pelo menos um razão trigonométrica terá que ser racional. Considerando θ o ângulo oposto ao maior cateto, temos:

$$\cos(\theta) = \alpha^{m/2}, \quad \operatorname{sen}(\theta) = \alpha^{n/2} \quad \text{e} \quad \tan(\theta) = \alpha^{(n-m)/2} \tag{2.3}$$

Acabamos de provar que $\alpha^n, \alpha^m \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, logo $\cos(\theta) = \sqrt{\alpha^m}$ e $\operatorname{sen}(\theta) = \sqrt{\alpha^n}$ são números irracionais. Temos também $\alpha^{n-m} = 1 + (\alpha^m)^{-1} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, donde $\tan(\theta) = \alpha^{(n-m)/2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Concluindo que, pelo menos, dois dos lados do triângulo são irracionais, em particular, não é possível extrair uma Terna Pitagórica deste triângulo retângulo. □

Observação 2.12. É interessante notar que, no caso das PGs, há uma inexistência de Ternas Pitagóricas de inteiros positivos, independente da ordenação, de fato o Lema 2.10 e a Proposição 2.11 garantem a existência de triângulos retângulos com lados termos de uma PG, mas no máximo eles têm um único lado com medida racional. Por outro lado, a procura de ternas em PAs, independentemente da ordenação, é um questionamento cuja resposta é elementar, uma vez que toda Terna Pitagórica pode ser vista como termos, não necessariamente consecutivos, da PA dos números naturais positivos $(n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2.3 Ternas e a Sequência de Fibonacci

Definição 2.13. *A Sequência de Fibonacci (clássica) é uma sequência $(a_n)_{n\geq 0}$ que respeita a seguinte recorrência de segunda ordem*

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2},$$

para todo $n \geq 2$, com condições iniciais $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$.

Proposição 2.14 (Autores)**.** *Na Sequência de Fibonacci não há Ternas Pitagóricas de termos sucessivos.*

Demonstração. Em geral, três termos consecutivos da Sequência de Fibonacci podem ser representados por a, b e $a+b$. É fácil provar que não existem três termos consecutivos que são Ternas Pitagóricas, pois $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ implica que $a \cdot b = 0$, a Sequência de Fibonacci só tem nulo o termo a_0, logo só a terna $(0, 1, 1)$ tem a propriedade desejada, só que não forma uma Terna Pitagórica, não são lados de um triângulo retângulo. □

Analogamente ao caso das PGs, podemos nos questionar se há ternas quando os termos não são necessariamente sucessivos. Nessa situação, temos o seguinte resultado.

Proposição 2.15 (Autores)**.** *Na Sequência de Fibonacci, não há Triplas Pitagóricas de termos, mesmo que não sejam sucessivos.*

Demonstração. Já sabemos a impossibilidade para termos consecutivos. Vamos escrever os três termos de forma diferente, olhando para a Sequência de Fibonacci começando de um dado termo, no nosso caso a_i.

Fazendo $a = a_i$ e $b = a_{i-1}$, assim temos $a_i = a$, $a_{i+1} = a_i + a_{i-1} = a + b$, $a_{i+2} = a_{i+1} + a_i = a + b + a = 2a + b$, $a_{i+3} = a_{i+2} + a_{i+1} = 2a + b + a + b = 3a + 2b$, é fácil provar por indução que: $a_{i+n} = a_{n+1}a + a_n b$. Vamos considerar então três termos em ordem crescente, não consecutivos, na forma: $a, (a_{m+1}a + a_m b)$ e $(a_{n+1}a + a_n b)$, com $a \geq 1$ e $1 \leq m < n$.

Suponha por absurdo que a tripla descrita acima é uma Terna Pitagórica:

$$(a_{n+1}a + a_n b)^2 = (a_{m+1}a + a_m b)^2 + a^2,$$

que por reorganização nos dá:

$$(a_{n+1}^2 - a_{m+1}^2 - 1)a^2 + (a_n^2 - a_m^2)b^2 + 2(a_{n+1}a_n - a_{m+1}a_m)ab = 0. \tag{2.4}$$

A Sequência de Fibonacci $(a_j)_{j=0}^{\infty}$ é monótona não-decrescente, ou seja, se $0 \leq i < j$ então $a_i \leq a_j$, na verdade temos $i < j$ e $j \neq 2$, assim $a_i < a_j$. Desta forma, a segunda e terceira parcelas da Equação (2.4) são não negativas:

$$(a_n^2 - a_m^2)b^2 \geq 0 \quad \text{e} \quad 2(a_{n+1}a_n - a_{m+1}a_m)ab \geq 0.$$

Como a_{n+1} e a_{m+1} são inteiros positivos e $a_{m+1} < a_{n+1}$, então $a_{m+1} + 1 \leq a_{n+1}$. Segue que

$$a_{m+1}^2 + 2a_{m+1} + 1 \leq a_{n+1}^2,$$

como $m \geq 1$ então $m+1 \geq 2$, consequentemente $a_{m+1} \geq a_2 = 1$, logo $a_{m+1}^2 + 3 \leq a_{n+1}^2$, assim temos $a_{n+1}^2 - a_{m+1}^2 - 1 \geq 2$, provando que $(a_{n+1}^2 - a_{m+1}^2 - 1)a^2 > 0$, uma contradição, uma vez que pela Equação (2.4) a soma dos três termos positivos tem resultado igual a zero. Isso demonstra a impossibilidade da terna ser Pitagórica. □

Observação 2.16. Somos tentados a generalizar, ampliar a definição da Sequência de Fibonacci considerando termos iniciais quaisquer, na esperança de obter um resultado diferente. Trocando os dados iniciais $\beta_0 = b$, $\beta_1 = a$ com $a, b \in \mathbb{R}$. Neste caso, é fácil exibir um contraexemplo: faça $a = 3$ e $b = -2$, listando alguns termos: $\beta_0 = -2$, $\beta_1 = 3$, $\beta_2 = 1$, $\beta_3 = 4$, $\beta_4 = 5$, $\beta_5 = 9$ e $\beta_6 = 14$. Encontramos uma Terna Pitagórica $(\beta_1, \beta_3, \beta_4) = (3, 4, 5)$, simplesmente a mais famosa Terna Pitagórica, exibindo assim um resultado positivo de existência. Porém, considerando a e b positivos, uma pequena alteração na demonstração apresentada prova a inexistência de três termos que sejam lados de um triângulo retângulo.

3 Considerações Finais

Acreditamos que a busca por respostas para questionamentos iniciados durante uma prática docente levou a investigações interessantes e com respostas inéditas. Respondemos ao questionamento de buscar Ternas Pitagóricas, mesmo considerando o caso mais geral de lados de um triângulo retângulo nos conjuntos $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$, considerando-as como termos consecutivos ou não e pertencentes a uma Progressão Aritmética, Progressão Geométrica e da Sequência de Fibonacci. Apresentamos a solução no caso das PAs, que já havia sido estabelecida, porém, para o caso das PGs e da Sequência de Fibonacci, as soluções e os questionamentos apresentados são inéditos. Para o caso das PGs, provamos a inexistência de soluções em números racionais, o que mostra a impossibilidade de Ternas Pitagóricas considerando o problema original. Porém, ao considerarmos números reais, vimos que essas triplas são relacionadas com o Triângulo de Kepler. Respondemos também o caso para termos não consecutivos de uma PG. Considerando agora o caso da Sequência de Fibonacci, provamos a inexistência de ternas, mesmo considerando termos não consecutivos. Encontramos a Terna Pitagórica $(3, 4, 5)$ como termos não consecutivos de uma Sequência de Fibonacci generalizada. As resoluções para os problemas proporcionam um melhor entendimento sobre as relações entre os conteúdos de Ternas Pitagóricas e as Sequências Numéricas, além de agregar temas adjacentes. Além disso, as perguntas fomentam diversos outros questionamentos dentro da mesma classe de problemas, por exemplo, modificando a sequência ou modificando a equação. Assim, a presente investigação não é exaustiva, uma vez que há diversas outras sequências famosas que podem ser analisadas por essa perspectiva e inúmeras equações a serem consideradas, dando bons problemas a serem investigados.

Agradecimentos

Agradecemos ao Comitê Editorial e aos revisores do artigo pela oportunidade de divulgar parte dos resultados de nosso trabalho desenvolvidos no Programa de mestrado em Rede PROFMAT da UFRPE. Agradecemos também aos Programa de Pós-Graduação em rede PROFMAT da UFRPE por todo apoio e suporte.

Referências

[1] Bicknell-Johnson, Marjorie. Pythagorean Triples Containing Fibonacci Numbers: Solutions for $F_n^2 \pm F_k^2 = K^2$. The Fibonacci Quarterly, v. 17, p. 1-12, 1979.

[2] Bragagnolo, C. P. S., *Polinômios e sequências reais* Dissertação (Mestrado), Universidade Federal do Paraná, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Curitiba, 2020.

[3] Bogomolny, A. *Pythagorean Triples via Fibonacci Numbers*. Disponível em: https://www.cut-the-knot.org/Outline/Combinatorics/PythagoreanFibonacci.shtml. Acesso em: 15 dez. 2023.

[4] Campos, G. P., Tanaka, T. Y., *Um Estudo Sobre Sequências Numéricas: Novos Resultados*. Dissertação (mestrado) *em andamento*, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Departamento de Matemática, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Recife, 2024.

[5] Carmo, M.P.; Morgado, A. C.; Wagner, E., *Trigonometria Números Complexos*, 3ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

[6] COMUNNITY MATHEMATICS CENTRE, CoMaC. *How many primitive Pythagorean triples in arithmetic progression*. At Right Angles, 1 (1). pp. 33-34. (2012)

[7] Conceição, A. P. *Sequências recursivas e métodos iterativos aplicados no ensino básico: aplicações em raízes irracionais*. Dissertação (Mestrado) Universidade Estadual de Londrina, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Londrina, 2021.

[8] Costa, E. A. Os números mágicos de Ball e a sequência de Fibonacci. Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática, v. 6, n. 1, p. 19-25, 2021.

[9] Cunha, M. M., *Progressão Aritmética, Geométrica e Fractais* Dissertação (mestrado), Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Instituto de Matemática, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Campo Grande, 2013.

[10] Da Silva, C. M. *Propriedades Aritméticas e Geométricas da Ternas Pitagóricas* Dissertação (mestrado), Universidade Estadual de Feira de Santana, Departamento de Ciências Exatas, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Feira de Santana, 2014.

[11] Fonseca, L. C. *Desvendando as sequências de Fibonacci, Lucas e Gibonacci.*Dissertação (Mestrado) Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Curitiba, 2023.

[12] Hefez, A, *Elementos de Aritmética*, 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2004.

[13] Horadam, A. F. Fibonacci number triples. The American Mathematical Monthly, v. 68, n. 8, p. 751-753, 1961.

[14] Junior, E. W. *Identidades envolvendo números da sequência de Fibonacci demonstradas por prova combinatorial e indução finita* Dissertação (mestrado), Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Curitiba, 2022.

[15] Kelmer, L. R. G. *Um Estudo De Progressão Aritmética No Ensino Médio Com Uso De Uma Planilha Eletrônica Gratuita.* Dissertação (mestrado), Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF), Centro de Ciências Exatas, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Juiz de Fora, 2023.

[16] Lagrange, Jean; LEECH, John. Pythagorean ratios in arithmetic progression, part II. Four Pythagorean ratios. Glasgow Mathematical Journal, v. 36, n. 1, p. 45-55, 1994.

[17] Larson, Ron. *Cálculo aplicado.* São Paulo. Editora: Cengage Learning, 2011.

[18] Martinez, F. B.; Moreira, C. G.; Saldanha, N.; Tengan, E., *Teoria dos números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro*, 3ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

[19] Muniz Neto, A. C., *Tópicos de Matemática Elementar: Teoria dos números*, 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[20] Moreira, C. G. T. A., *Tópicos de Teoria dos Números*, Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[21] Nascimento, É. C. A., Tanaka, T. Y., Da Silva, B. C. Equações Diofantinas lineares e não lineares: uma abordagem por meio de questões de Olimpíadas de Matemática. Revista Professor de Matemática *Online*. v.10, n.3, 2022.

[22] Oliveira, A. L. C. *O Teorema de Pitágoras: Demonstrações e Aplicações*, Dissertação (mestrado), Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Fortaleza, 2013.

[23] QUORA. *What numbers have three Pythagorean partners in geometric progression?* Disponível em: https://www.quora.com/What-numbers-have-three-Pythagorean-partners-in-geometric-progression. Acesso em: 13 out. 2023.

[24] Richit, L. A., Richit, A.; Richit, A. Solução Particular de Equações Diofantinas Lineares $ax + by = c$ via abordagem por substituição progressiva do Algoritmo de Euclides. Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática, v. 6, n. 3, p. 97-122, 2021.

[25] Santos, R.; Costa, E. A. Números de Ball Generalizados. Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática, v. 7, n. 1, p. 61-85, 2022.

[26] Sena, C. Á. R., *Sequência de Fibonacci: Propriedades, Aplicações e Curiosidades.* Dissertação (mestrado), Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Fortaleza, 2013.

[27] Souza, I. R. S. *Relação entre função exponencial e progressão geométrica* Dissertação (mestrado), Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Centro de Ciências e Tecnologia, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Campos dos Goytacazes, 2016.

[28] Spreafico, Elen Viviani; Catarino, P. M. M. C. Sobre os números generalizados de Oresme e o Sistema Fundamental de Fibonacci. Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática, v. 9, n. 1, p. 68-80, 2024.

[29] Stewart, J. *Cálculo I*, volume 1. 7ª ed. São paulo: Cengage Learning, 2016.

[30] Verma, Pranav. Infinite kepler triangles. At Right Angles, n. 10, p. 70-72, 2021.

[31] Vieira, R. P. M.; Alves, F. R. V.; Catarino, P. M. M. C. Relações Bidimensionais e Identidades da Sequência de Leonardo. Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática, v. 4, n. 2, p. 156-173, 2019.

[32] Vieira, R. P. M.; Alves, F. R. V.; Catarino, P. M. M. C. A generalização dos quatérnios de Narayana. Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática, v. 6, n. 3, p. 12-22, 2021.

[33] Vieira, R. P. M.; Alves, F. R. V. Identidades Tribonacci. Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática, v. 4, n. 1, p. 216-226, 2019.

Recebido em 02 de Julho de 2024.
Aceito em 15 Outubro 2024.