ReviSeM

Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática

https://doi.org/10.34179/revisem.v10i2.21448

SOBRE OS PONTOS FIXOS DA FUNÇÃO FELICIDADE EM BASES PEQUENAS E EXPOENTE TRÊS

ON THE FIXED POINTS OF THE HAPPINESS FUNCTION IN SMALL BASIS AND EXPONENT THREE

Marcelo O. Veloso
Universidade Federal de São João del-Rei
veloso@ufsj.edu.br

Gilcélia R. de Souza
Universidade Federal de São João del-Rei
gilcelia@ufsj.edu.br

Thiago Patrocínio Rodrigues
Governo do Estado de Minas Gerais
thiago.patrocinio@educacao.mg.gov.br

Comunicado por M. Alegri

Resumo

Este texto apresenta alguns resultados sobre um subconjunto especial dos números inteiros positivos, os números $(3, b)$-felizes, representados em qualquer base posicional $b \geq 2$. Verificamos que todo inteiro positivo é $(3, 2)$-feliz conforme demonstrado no Teorema 2.2. Apresentamos também exemplos de números $(3, b)$-felizes em outras bases como ilustrado no Exemplo 2.3 e no Teorema 2.4. Em particular, caracterizamos os pontos fixos da função $(3, b)$-feliz, que atribui a cada inteiro positivo a soma dos cubos de seus dígitos conforme detalhado nos Teoremas 3.2 e 4.1. Além disso, calculamos os pontos fixos da função $(3, b)$-feliz em diversas bases.

Palavras-chave: Números Felizes; Pontos Fixos; Sequência de inteiros.

Abstract

This text presents some results on a subset of the positive integers, the $(3, b)$-happy numbers, represented in positional base $b \geq 2$. We verify that every positive integer is $(3, 2)$-happy, as demonstrated in Theorem 2.2. We also provide some examples of

This open access article is licensed under
a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0.

(3, b)-happy numbers in other bases, as illustrated in Example 2.3 and Theorem 2.4. In particular, we characterize the fixed points of the (3, b)-happy function, which assigns to each positive integer the sum of the cubes of its digits, as detailed in Theorems 3.2 and 4.1). Additionally, we compute the fixed points of the (3, b)-happy function in various bases.

Keywords: Happy Numbers; Fixed Points; Integer sequences.

1 Introdução

Os números felizes aparecem pela primeira vez na literatura no livro "Unsolved Problems in Number Theory", veja [3], do matemático inglês Richard K. Guy. Ele apresenta a definição e faz diversos questionamentos a respeito dos números felizes: a existência de infinitos números felizes, a relação entre números primos e números felizes, a densidade dos números felizes nos inteiros positivos e as possíveis sequências de números felizes, entre outros. Desde então, diferentes autores têm trabalhado com essas e outras questões que surgiram relacionadas com os números felizes (ver [1, 2, 4]).

Dado um número inteiro positivo, considere a seguinte função: somar o quadrado de seus dígitos. O processo para verificar se um número inteiro positivo é feliz consiste na iteração dessa função. Se a iteração dessa função, aplicada a um número, atinge o número 1, dizemos que esse número é feliz. Caso contrário, o número é denominado triste. Observe o exemplo:

$$32 \to 3^2 + 2^2 = 13 \to 1^2 + 3^2 = 10 \to 1^2 + 0^2 = 1.$$

Visto que a iteração termina em 1, dizemos que o número 32 é feliz. No entanto, ao aplicarmos esse processo no número 37, obtemos a sequência de inteiros:

$$37 \to 58 \to 89 \to 145 \to 42 \to 20 \to 4 \to 16 \to 37...$$

Essa sequência forma um ciclo. Como o número 1 não pertence a esse ciclo, dizemos que o número 37 é triste. Note que o mesmo ocorre com os demais números do ciclo. Portanto, todos os números desse ciclo são tristes.

Neste trabalho, exploraremos os números felizes considerando o expoente 3 em qualquer base posicional. Em especial, daremos ênfase às bases posicionais menores que seis.

O texto foi estruturado da seguinte maneira: na seção 2, apresentamos os números (3, b)-felizes, fornecemos exemplos e mostramos como verificar se um dado número é (3, b)-feliz (Teorema 12 e Corolário 13). Na seção 3, demonstramos como encontrar os pontos fixos da função (3, b)-feliz (Teorema 14). Na seção 4, exibimos os pontos

fixos da função (3, b)-feliz para $b = 2, 3, 4, 5$ (Teorema 15). Concluímos com algumas considerações finais sobre o trabalho realizado.

2 Números (3,b)-Felizes

Os números (3, b)-felizes são o foco principal deste trabalho. Nesta seção, demostraremos que é sempre possível verificar quando um número é (3, b)-feliz. A caracterização desses números decorre da função (3, b)-feliz para qualquer base posicional $b \geq 2$.

Seja m um interio positivo, e

$$m = [a_r a_{r-1} a_{r-2} \dots a_1 a_0]_b = \sum_{i=0}^{r} a_i b^i$$

a sua representação na base posicional $b \geq 2$. A função (3, b)-feliz, $F_{3,b}$, é definida por

$$\begin{aligned} F_{3,\,b} : \mathbb{Z}_+ &\longrightarrow \mathbb{Z}_+ \\ m &\longmapsto \sum_{i=0}^{r} a_i^3 \end{aligned}$$

Ou seja,

$$F_{3,\,b}(m) = F_{3,\,b}(\sum_{i=0}^{r} a_i b^i) = \sum_{i=0}^{r} a_i^3.$$

Dizemos que n é um número (3, b)-feliz se existe $k \geq 1$ tal que $F_{3,\,b}^k(n) = 1$. Caso contrário, n é dito um número (3, b)-triste.

É usual, quando a base é evidente no contexto, dizer apenas que o número é feliz ou triste.

Exemplo 2.1. O número 1 é (3, b)-feliz em qualquer base, b. Observar que $1 = [1]_b$, em qualquer base. Assim, $F_{3,b}(1) = F_{3,b}([1]_b) = 1^3 = 1$.

Teorema 2.2. *Na base 2 todo número é* (3, 2)*-feliz.*

Demonstração. Vamos provar por indução. Note que

$$F(1) = 1, \quad F_{3,2}(2) = F_{3,2}([10]_2) = 1^3 + 0^3 = 1,$$

$$F_{3,2}(3) = F_{3,2}([11]_2) = 1^3 + 1^3 = 2 \text{ e } F_{3,2}^2(3) = F_{3,2}(F_{3,2}(3)) = F_{3,2}(2) = 1.$$

Isso implica que 1, 2 e 3 são números (3, 2)-felizes. Seja $n > 3$. Vamos supor, por hipótese de indução, que todo inteiro menor que n é um número (3, 2)-feliz. Seja

$n = a_r a_{r-1} \dots a_1 a_0$ a representação posicional de n, na base 2. Por suposição $r \geq 2$, $a_r = 1$ e $a_i \in \{0, 1\}$, para todo $0 \leq i \leq r-1$. Visto que $a_i^3 = a_i$, obtemos que

$$\begin{aligned} F_{3,2}(n) =& a_r^3 + a_{r-1}^3 + \cdots + a_1^3 + a_0^3 \\ =& 1 + a_{r-1} + \cdots + a_1 + a_0 \\ \leq& 1 + r \\ <& 2^r \\ \leq& 2^r + a_{r-1}2^{r-1} + \cdots + a_1 2 + a_0 \\ =& n. \end{aligned}$$

Verificando que $F_{3,2}(n) < n$. Segue, por hipótese de indução, que $F_{3,2}(n)$ é um número (3, 2)-feliz. Logo existe k tal que

$$F_{3,2}^k(F_{3,2}(n)) = 1.$$

Ou seja,

$$F_{3,2}^{k+1}(n) = F_{3,2}^k(F(n)) = 1.$$

Aferindo que n é um número (3, 2)-feliz. Portanto, todo número é (3, 2)-feliz. □

Se em determinada base posicional, b, todo número é (3, b)-feliz é usual chamar essa base posicional por **base** (3, 2)**-feliz**. O exemplo anterior mostra que a base 2 é uma base (3, 2)-feliz.

Exemplo 2.3. A felicidade em uma base não garante a felicidade em outra. Para ilustrar este fato, considere o número 112. Note que $F_{3,10}^2(112) = 1$. Logo 112 é um número (3, 10)-feliz. Contudo, ao analisarmos as iteradas da função $F_{3,5}$, obtemos que

$$F_{3,5}(112) = F_{3,5}([422]_5) = 4^3 + 2^3 + 2^3 = 80,$$

$$F_{3,5}^2(112) = F_{3,5}(80) = F_{3,5}([310]_5) = 3^3 + 1^3 + 0^3 = 28,$$

e

$$F_{3,5}^3(112) = F_{3,5}(28) = F_{3,5}([103]_5) = 1^3 + 0^3 + 3^3 = 28.$$

Assim $F_{3,5}^m(112) = 28$ para todo $m \geq 3$. Portanto, 112 é um número (3, 5)-triste.

Teorema 2.4. *Existem infinitos números* (3, b)*-felizes.*

Demonstração. É suficiente observar que todo número da forma

$$a_k = [10 \dots 0]_b,$$

com k dígitos zero à direita do número 1, é um número (3, b)-feliz. De fato,

$$F_{3,\,b}(a_k) = 1^3 + 0^3 + \ldots + 0^3 = 1,$$

para todo $k \geq 0$. Assim, o número a_k atinge o valor 1 em uma única iteração da função $F_{3,\,b}$, o que implica que a_k é um número (3, b)-feliz para todo $k \geq 0$.

Como há infinitos valores possíveis para o índice k, concluímos que existem infinitos números (3, b)-felizes. □

Teorema 2.5. *Seja m um inteiro positivo.*

1. *Se m é (3, b)-feliz e $F^k_{3,\,b}(n) = m$, para algum $k \in \mathbb{N}$, então n é (3, b)-feliz.*
2. *Se m é (3, b)-triste e $F^k_{3,\,b}(n) = m$, para algum $k \in \mathbb{N}$, então n é (3, b)-triste.*

Demonstração. 1. Seja m um número (3, b)-feliz. Então existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $F^r_{3,\,b}(m) = 1$. Assim

$$F^{r+k}_{3,\,b}(n) = F^r_{3,\,b}(F^k_{3,\,b}(n)) = F^r_{3,\,b}(m) = 1.$$

Portanto, m é um número (3, b)-feliz.

2. Se m é (3, b)-triste, então $m \neq 1$ e $F^r_{3,\,b}(m) \neq 1$, para todo $r \in \mathbb{N}$. Visto que $F^k_{3,\,b}(n) = m$ e m é (3, b)-triste temos que $F^l_{3,\,b}(n) \neq 1$ para $0 \leq l \leq k$. Isto implica que

$$F^{r+k}_{3,\,b}(n) = F^r_{3,\,b}(F^k_{3,\,b}(n)) = F^r_{3,\,b}(m) \neq 1,$$

para todo $r \in \mathbb{N}$. Logo $F^r_{3,\,b}(n) \neq 1$, para todo $r \in \mathbb{N}$. Portanto, n é um número (3, b)-triste.

□

Teorema 2.6. *Sejam m e $b \geq 2$ inteiros positivos. Então $F_{3,b}(m) < m$, para todo $m \geq b^4$.*

Demonstração. Seja $m = [a_r a_{r-1} \cdots a_1 a_0]_b$ a representação posicional de m na base b. Por hipótese, $r \geq 5$ e $a_r \neq 0$. Logo m possui pelo menos 5 dígitos. Temos, por definição, que

$$F_{3,b}(m) = a_r^3 + a_{r-1}^3 + \cdots + a_1^3 + a_0^3.$$

O objetivo é verificar que a diferença entre m e $F_{3,\,b}(m)$ é maior que zero. Provando o resultado. De fato,

$$\begin{aligned} m - F_{3,b}(m) &= a_r b^r + a_{r-1} b^{r-1} + \cdots + a_1 b + a_0 - (a_r^3 + a_{r-1}^3 + \cdots + a_1^3 + a_0^3) \\ &= (a_r b^r - a_r^3) + (a_{r-1} b^{r-1} - a_{r-1}^3) + \cdots + (a_1 b - a_1^3) + (a_0 - a_0^3) \\ &= a_r(b^r - a_r^2) + a_{r-1}(b^{r-1} - a_{r-1}^2) + \cdots + a_1(b - a_1^2) + a_0(1 - a_0^2). \end{aligned}$$

Faça

$$\alpha = a_r(b^r - a_r^2) + a_{r-1}(b^{r-1} - a_{r-1}^2) + \cdots + a_2(b^2 - a_2^2)$$

e

$$\beta = a_1(b - a_1^2) + a_0(1 - a_0^2).$$

Dessa forma,

$$m - F_{3,\,b}(m) = \alpha + \beta.$$

Note que $\alpha > 0$, pois $0 < a_i < b$ para todo $1 \leq i \leq r-1$ e $a_r \neq 0$. Assim o menor valor possível para α ocorre quando $r = 4$, $a_4 = 1$ e $a_3 = a_2 = 0$. Ou seja, quando

$$\alpha = b^4 - 1 = (b-1)[b^3 + b^2 + b + 1].$$

E o menor valor possível para β ocorre quando $a_1 = b - 1$ e $a_0 = b - 1$. Ou seja,

$$\begin{aligned}\beta &= (b-1).(b - (b-1)^2) + (b-1)(1 - (b-1)^2) \\ &= (b-1)[b + 1 - 2(b-1)^2] \\ &= (b-1)[-2b^2 + 5b - 1].\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}m - F_{3,b}(m) &= \alpha + \beta \\ &= (b-1)[b^3 + b^2 + b + 1] + (b-1)[-2b^2 + 5b - 1] \\ &= (b-1)[b^3 - b^2 + 6b] \\ &= (b-1)b[b^2 - b + 6] \\ &> 0,\end{aligned}$$

pois todos os fatores, da última igualdade, são positivos. Portanto, $F_{3,\,b}(m) < m$ quando $m \geq b^4$. □

Em virtude do Teorema 2.6, determinar os números (3, b)-felizes menores que b^4 é essencial para verificar se um número é (3, b)-feliz. O Teorema 2.5 garante que, se uma iterada da função $F_{3,\,b}$ é feliz, então toda iterada anterior também é (3, b)-feliz. O próximo resultado, Corolário 2.7, mostra que, para todo inteiro, existe uma iterada da função (3, b)-feliz, sobre esse inteiro, que pertence ao intervalo $[1, \ldots, b^4 - 1]$. Dessa forma, precisamos conhecer os números felizes do intervalo $[1, \ldots, b^4 - 1]$, o que pode ser feito com o auxílio computacional.

Corolário 2.7. *Seja $m \geq b^4$. Então existe k tal que $F_{3,b}^k(m) < b^4$.*

Demonstração. Suponha, por contradição, que $F_{3,b}^k(m) > b^4$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Segue do Teorema 2.6 que a sequência $(F_{3,b}^k(m))_{k\in\mathbb{N}}$ é estritamente decrescente. Ou seja,

$$m > F_{3,b}(m) > F_{3,b}^2(m) > F_{3,b}^3(m) > \cdots > F_{3,b}^i(m) > \cdots$$

e, por hipótese, todos os termos dessa sequência são maiores ou iguais a b^4. Desse modo obtemos uma sequência infinita de números inteiros positivos estritamente decrescente, todos maiores ou iguais a b^4.

No entanto, isso é impossível, pois uma sequência limitada superiormente e estritamente decrescente de inteiros positivos deve necessariamente ser finita. Assim, nossa suposição leva a uma contradição. Portanto, concluímos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $F_{3,b}^k(m) < b^4$. □

Quando a base é pequena, isto é, para $b < 6$, é suficiente conhecer os números felizes no intervalo $[1, \ldots, b^3 - 1]$. Este é o resultado garantido pelo próximo teorema.

Corolário 2.8. *Sejam m e b números naturais com $2 \leq b < 6$. Então $F_{3,b}(m) < m$, para todo $m \geq b^3$.*

Demonstração. É análoga a demostração do Teorema 2.6. Neste caso, é suficiente observar que,

$$\alpha + \beta = (b-1)[-b^2 + 6b].$$

E assim $m - F_{3,b}(m) > 0$, quando $2 \leq b < 6$. □

3 Pontos Fixos

Nesta seção, estudaremos os pontos fixos da função felicidade $F_{3,\,b}$. Além disso, mostraremos que é possível determiná-los encontrando as soluções de uma certa equação polinomial em várias variáveis.

Um número inteiro positivo n é dito **ponto fixo** da função felicidade $F_{3,\,b}$ quando

$$F_{3,\,b}(n) = n.$$

É imediato verificar que o número 1 é ponto fixo da função felicidade $F_{3,\,b}$ em qualquer base, mas não necessariamente o único.

Exemplo 3.1. Os números 1 e 371 são pontos fixos da função $F_{3,\,10}$. De fato,

$$F_{3,\,10}(1) = 1^3 = 1 \text{ e } F_{3,\,10}(371) = 3^3 + 7^3 + 1^3 = 27 + 343 + 1 = 371.$$

O próximo Teorema fornece um método para determinar os pontos fixos.

Teorema 3.2. *Os pontos fixos da função $F_{3,b}$ são da forma*

$$[xyzw]_b = xb^3 + yb^2 + zb + w$$

e satisfazem a equação $x^3 + y^3 + z^3 + w^3 = xb^3 + yb^2 + zb + w$.

Demonstração. Segue do Corolário 2.7 que os pontos fixos da função $F_{3,b}$ pertencem ao conjunto $\{1, 2, \ldots, b^4 - 1\}$. Visto que

$$b^4 - 1 = (b-1)b^3 + (b-1)b^2 + (b-1)b + (b-1),$$

temos que os possíveis candidatos a pontos fixos possuem no máximo 4 dígitos. Logo, se m é um ponto fixo, então m é da forma

$$m = [xyzw]_b = xb^3 + yb^2 + zb + w, \tag{3.1}$$

onde $0 \leq x, y, z, w \leq b - 1$. Como $F_{3,b}(m) = F_{3,b}([xyzw]_b) = x^3 + y^3 + z^3 + w^3$ e $F_{3,b}(m) = m = xb^3 + yb^2 + zb + w$, obtemos

$$x^3 + y^3 + z^3 + w^3 = xb^3 + yb^2 + zb + w. \tag{3.2}$$

Portanto, os pontos fixos da função $F_{3,b}$ são da forma 3.1 e satisfazem a equação 3.2. □

Uma consequência direta da equação 3.2 é que o único ponto fixo com um dígito é o número 1.

O próximo exemplo ilustra como determinar os pontos fixos em uma base dada.

Exemplo 3.3. Vamos calcular os pontos fixos da função $F_{3,13}$. Esses pontos fixos, pelo Teorema 3.2, são as soluções da equação

$$x^3 + y^3 + z^3 + w^3 = x13^3 + y13^2 + z13 + w,$$

onde $0 \leq x, y, z, w \leq 12$. Utilizando o *Octave* para resolver essa equação encontramos as soluções

$$1 = [1]_{13},\ 793 = [490]_{13},\ 794 = [491]_{13},\ 854 = [509]_{13} \text{ e } 1968 = [\alpha 85]_{13},$$

onde $\alpha = 11$. Portanto, os números 1, 793, 794, 854 e 1968 são os pontos fixos da função $F_{3,13}$.

Exemplo 3.4. Os pontos fixos da função $F_{3,6}$ são

$$1 = [1]_6,\ 99 = [243]_6,\ 190 = [514]_6 \text{ e } 251 = [1055]_6.$$

Esses pontos obtidos foram determinados encontrando as soluções da equação

$$x^3 + y^3 + z^3 + w^3 = 216x + 36y + 6z + w,$$

onde $0 \leq x, y, z, w \leq 5$.

É interessante observar que o ponto fixo $251 = [1055]_6$, do exemplo anterior, é justamente o número m que satisfaz $\alpha + \beta = 0$ no Corolário 2.8, quando $b = 6$. Ou seja, ao fazermos $b = 6$ obtemos,

$$m = 1 \cdot 6^3 + 0 \cdot 6^2 + (6-1)6 + (6-1) = 251 = [1055]_6.$$

4 Bases pequenas

Nesta seção, calculamos os pontos fixos da função felicidade $F_{3,\,b}$, quando $b = 2,\ 3,\ 4,\ 5$. Em virtude do Teorema 4.1, se temos uma base, b, menor que 6 (seis) e desejamos determinar os pontos fixos da função $F_{3,\,b}$, precisamos resolver uma equação com 3 (três) variáveis. Uma equação com uma variável a menos que o caso geral, Teorema 3.2.

Teorema 4.1. *Os pontos fixos da função $F_{3,\,b}$ quando $2 \leq b \leq 5$ são da forma*

$$[xyz]_b = xb^2 + yb + z$$

e satisfazem a equação $x^3 + y^3 + z^3 = xb^2 + yb + z$, onde $0 \leq x,\ y,\ z \leq b - 1$.

Demonstração. Segue do Corolário 2.8 que os pontos fixos da função $F_{3,b}$ se encontram no conjunto $\{1, 2, \ldots, b^3 - 1\}$. Note que

$$b^3 - 1 = (b-1)b^2 + (b-1)b + (b-1).$$

Assim, os possíveis pontos fixos têm, no máximo, 3 dígitos. Seja m um ponto fixo da função $F_{3,\,b}$. Então

$$m = [xyz]_b = xb^2 + yb + z,$$

onde $0 \leq x,\ y,\ z \leq b - 1$. Visto que $F_{3,b}(m) = F_{3,b}([xyz]_b) = x^3 + y^3 + z^3$ e m é ponto fixo, obtemos

$$x^3 + y^3 + z^3 = xb^2 + yb + z. \tag{4.1}$$

Verificando o resultado. □

Um ponto fixo em determinada base, não necessariamente, é ponto fixo em outra base. O número 371 é ponto fixo na base 10, Exemplo 3.1. Contudo, na base 5, ele não é um ponto fixo da função $F_{3,5}$. Conforme podemos verificar no exemplo abaixo.

Exemplo 4.2. Para calcular os pontos fixos da função $F_{3,5}$ temos que determinar as soluções da equação 4.1, com $b = 5$. Ou seja, encontrar as soluções da equação polinomial

$$x^3 + y^3 + z^3 = 25x + 5y + z.$$

onde $0 \leq x,\ y,\ z \leq 4$. Com o auxílio computacional verificamos que as únicas soluções são

$$1 = [1]_5 \ \ 28 = [103]_5 \text{ e } 118 = [433]_5.$$

Portanto, os números 1, 28 e 118 são os pontos fixos da função $F_{3,5}$.

Exemplo 4.3. Segundo o Teorema 4.1, para determinar os pontos fixos da função $F_{3,4}$ temos que determinar as soluções da equação

$$x^3 + y^3 + z^3 = 16x + 4y + z,$$

onde $0 \leq x, y, z \leq 3$. Com o auxílio do *Octave* foi fácil verificar que as únicas soluções, são

$$1 = [1]_4,\ 8 = [20]_4,\ \ 9 = [21]_4,\ 28 = [130]_4,\ 29 = [131]_4,\ 35 = [203]_4,$$
$$43 = [223]_4,\ 55 = [313]_4 \text{ e } 62 = [332]_4.$$

Portanto, os inteiros 1, 8, 9, 28, 29, 35, 43, 55 e 62 são os pontos fixos da função $F_{3,4}$.

Exemplo 4.4. Para determinar os pontos fixos da função $F_{3,3}$ é suficiente, pelo Teorema 4.1, determinar as soluções da equação

$$x^3 + y^3 + z^3 = 9x + 3y + z,$$

onde $0 \leq x, y, z \leq 2$. Com auxílio do *Octave* verificamos que as únicas soluções, dessa equação, são

$$1 = [1]_4 \quad \text{e } 17 = [122]_3.$$

Portanto, temos que 1 e 17 são os pontos fixos da função $F_{3,3}$.

Exemplo 4.5. Segue do Teorema 4.1 que todos os 3-pontos fixos, na base 2, satisfazem a equação

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4x + 2y + z,$$

com $0 \leq x, y, z \leq 1$. É claro, que se $x \neq 0$ ou $y \neq 0$ teremos $x^2 + y^2 + z^2 < 4x + 2y + z$. Portanto, o único ponto fixo da função $F_{3,2}$ é o trivial $1 = [1]_2$

5 Considerações Finais

É sempre possível verificar se um inteiro positivo é um número (3, b)-feliz em qualquer base posicional b (ver Seção 2). Esse fato permitiu a exploração de várias questões sobre os números (3, b)-felizes. Por exemplo, a caracterização dos pontos fixos da função felicidade $F_{3,b}$ (ver Teorema 3.2), a determinação de bases (3, b)-felizes (ver 2.2) e a forma de encontrar os pontos fixos da função (3, b)-feliz. Outras questões, como a quantidade de números primos (3, b)-felizes, os ciclos da função (3, b)-feliz e as sequências de números (3, b)-felizes, devem ser exploradas em trabalhos futuros. Especificamente, pretendemos investigar a soma dos dígitos elevados a diferentes expoentes, sem fixar um único expoente para todos os dígitos.

Referências

[1] Esam El-Sedy and Samir Siksek, *On Happy Numbers*, Rocky Mountain Journal of Mathematics, v. 30, p. 565-570, 2000.

[2] Robert Styer, *Smallest Examples of Strings of Consecutive Happy Numbers*, v. 82, p. 279-388, 1998.

[3] Richard K. Guy, *Unsolved Problems in Number Theory*, v. 3, 2004.

[4] Rudney Da Mata e Marcelo Veloso, *Números Felizes e Pontos Fixos*, Revista Eletrônica da Matemática, v. 9, n.1, 2023.

Recebido em 17 de Julho de 2024
Revisado em 07 de Abril de 2025
Aceito em 16 de Julho 2025